

文章编号:1000-582X(2004)06-0102-04

约束多体系统动力学方程的辛算法*

吴永^{1,2}, 杜思义^{2,3}, 胡继云⁴, 刘保国⁴, 钟坚敏¹

(1. 重庆工学院 数理学院, 重庆 400050; 2. 重庆大学 土木工程学院, 重庆 400030;

3. 郑州大学 土木工程学院, 河南 郑州 450002; 4. 郑州工程学院 机械系, 河南 郑州 450052)

摘要:多体系统动力学的微分/代数方程求解一般是所谓的指标-3问题,是十分困难的,可以说,目前还没有使人非常满意的关于它的数值积分方法。多体系统动力学的微分/代数方程的辛算法,是近几年出的新的数值方法,一般它具有精度高、数值稳定性等优点。笔者建立了约束多体系统动力学的微分/代数形式的约束正则方程形式,利用 Runge-Kutta 法合成辛算法对约束多体系统的约束哈密顿形式的方程进行仿真研究取得了较好的结果。

关键词:多体系统;辛算法;正则方程

中图分类号:TB122

文献标识码:A

约束多体系统动力学方程的数值方法,当前是计算多体系统动力学的难点,主要是对产生的违约现象没有很好地解决,达不到数值仿真的精度要求。将通常的 R^{2n} 空间的辛算法直接应用到这类动力学对应的正则形式方程,一般也要出现违约。笔者利用流形上的辛算法理论构造的一些辛算法可很好地解决违约问题。

1 基本理论

在约束多体系统动力学不考虑耗散力时,应用约束变分原理,关于完整约束 $g(q) = 0$ 及 Hamilton 量 $H(q, p)$, 可得约束 Hamilton 正则形式方程

$$\begin{cases} \dot{q} = H_p^T(q, p) \\ \dot{p} = -H_q^T(q, p) - G^T(q)\lambda \\ g(q) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中, $q = (q_1, \dots, q_n)^T \in R^n$ 为广义坐标, $p = (p_1, \dots, p_n)^T \in R^n$ 为广义动量, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T \in R^m$ 为 Lagrange 乘子, $G(q) \in R^{m \times n}$ 为 $g(q)$ 的 Jacobian (简记为

G), 且秩为 m , 一般地假设 $G(q)H_{pp}(q, p)G^T(q)$ 可逆 (它保证了系统(1)是指标为 3 的微分/代数方程组)。显式(隐式)一步数值积分方法,可表为,这里 z^i 表示 $z(t_i)$ 的近似值。若算法 F_h 满足关系

$$\left(\frac{\partial F_h^i}{\partial z}\right)^T J \left(\frac{\partial F_h^i}{\partial z}\right) = J,$$

$$\left(J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}, I \text{ 为 } n \text{ 级单元矩阵}\right) \quad (2)$$

则称 F_h 为辛算法。易证辛算法的合成也是辛算法。关于 Runge-Kutta 法,在里面可找到一类 R^{2n} 空间的辛算法。现设 Runge-Kutta 法系数如下:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{ss} \end{pmatrix}$$

$$b = (b_1 \quad \cdots \quad b_s)^T$$

$$c = (c_1 \quad \cdots \quad c_s)^T$$

关于式(1)利用下列 3 步式辛算法^[1]

第 1 步:

* 收稿日期:2004-01-26

基金项目:重庆市教委资助项目(020601)

作者简介:吴永(1961-),四川宜宾人,重庆工学院副教授,博士,重庆大学在站博士后,主要从事应用数学与力学方面的研究。

$$\bar{q}_k = q_k$$

$$\bar{p}_k = p_k - \frac{h}{2} G(q_k)' \Lambda_k$$

第 2 步(辛 RK 法):

$$\bar{q}_{k+1} = \bar{q}_k + h \sum_{i=1}^s b_i k_i,$$

$$\bar{p}_{k+1} = \bar{p}_k + h \sum_{i=1}^s b_i l_i,$$

第 3 步:

$$q_{k+1} = \bar{q}_{k+1},$$

$$p_{k+1} = \bar{p}_{k+1} - \frac{h}{2} G(\bar{q}_{k+1}) \Lambda_{k+1}$$

上面 Λ_k, Λ_{k+1} 的选取使得以下两式成立

$$q = g(q_{k+1}),$$

$$0 = f(q_{k+1}, p_{k+1}), (f = g')$$

这样构成的算法能保速度约束、位置约束不变。

易证以上第 1、第 3 步是辛算法 (Euler 格式的特殊情况)。所以,上面 3 步的合成中,若第 2 步也取成辛算法,则合成是辛算法,由此可构成许多约束多体系统动力学的辛算法。

一般的 Hamilton 系统在 Runge-Kutta 法中,记 $m_{ij} = b_i a_{ij} + b_j a_{ji} - b_i b_j, i, j = 1, 2, \dots, s$, 则有^[2-3]

定理 若 $M = (m_{ij}) = 0$, 则下面的 Runge-Kutta 法是辛算法

$$q_{k+1} = q_k + h \sum_{i=1}^s b_i H'_p(Q, P_i),$$

$$p_{k+1} = p_k - h \sum_{i=1}^s b_i H'_q(Q, P_i),$$

其中, $Q = q_k + h \sum_{j=1}^s a_{ij} H'_p(Q_j, P_j),$

$$P_i = p_k - h \sum_{j=1}^s a_{ij} H'_q(Q_j, P_j)$$

例如下式是 4 阶 2 步隐式 Runge-Kutta 法 (2 级 Gauss-Legendre 法):

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \sqrt{3} \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \sqrt{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$c = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \sqrt{3}, \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \sqrt{3} \right)$$

$$b = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

是辛算法。

2 正则方程的推导^[6]

考查系统为带完整约束的多体系统,利用变分原理推导正则方程。

设系统的 Lagrange 函数为 $L = L(q, \dot{q}), \dot{q} = \frac{d}{dt} q$ 是广义速度, $g(q) = 0$ 为系统约束,系统广义动量为 $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$, 系统的 Hamilton 函数为 $H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q})$, 则系统的 Euler-Lagrange 方程为

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \quad (3)$$

求 Hamilton 函数的变分得

$$\delta H = \sum (p_i \delta \dot{q}_i + \dot{q}_i \delta p_i -$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} \delta q_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}_i) = \sum (\dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q} \delta q_i)$$

再由 Hamilton 函数的定义式得

$$\frac{\partial H}{\partial q} = 0$$

所以 Hamilton 函数 H 为 p, q 的函数, $\delta H = \frac{\partial H}{\partial q} \delta q +$

$\frac{\partial H}{\partial p} \delta p$, 因此有

$$\left(q - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \delta p - \left(\frac{\partial L}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial p} \right) \delta q = 0$$

由 Euler-Lagrange 方程得

$$\left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \delta p - \left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial p} \right) \delta q = 0$$

因 q, p 为非独立变量,再考虑约束的变分得

$$\delta g = \frac{\partial g}{\partial q} \delta q + \frac{\partial g}{\partial p} \delta p = G(q) \delta q = 0$$

引入 Lagrange 乘子 λ , 又由上面两式即可得约束 Hamilton 系统的正则方程为

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

$$\dot{p} = - \frac{\partial H}{\partial q} - \lambda G(q) \quad (4)$$

$$g(q) = 0$$

这样,可将以上构造的辛算法应用到以上约束正则形式的多体系统动力学方程。

3 算 例

如图 1 所示 (N 表向量误差的 z -范数), 有一平面三极摆, 不计摆长的质量, 且设摆长分别为 $l_1 = l_2 =$

$l_3 = 1 \text{ m}, g = 1 \text{ m/t}^2, m_1, m_2, m_3$ 分别描述每个摆的位置及集中质量, 取 $m_1 = m_2 = m_3 = 1 \text{ kg}$, 初值为 $q_1(0) = 0.5, q_2(0) = -\sqrt{0.75}, q_3(0) = 0, q_4(0) = -2\sqrt{0.75}, q_5(0) = 0, q_6(0) = -1 - 2\sqrt{0.75}, p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = p_4(0) = p_5(0) = p_6(0) = 0, \lambda_0 = 0$ 。

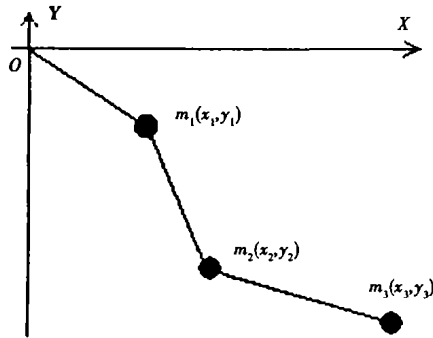


图 1 平面三级摆

若前面的算法的第 3 步中, 利用二阶中点公式合成一辛算法, 得仿真结果如图 2、图 3 所示(步长 0.12, 时间 60 s, 双精度计算)。

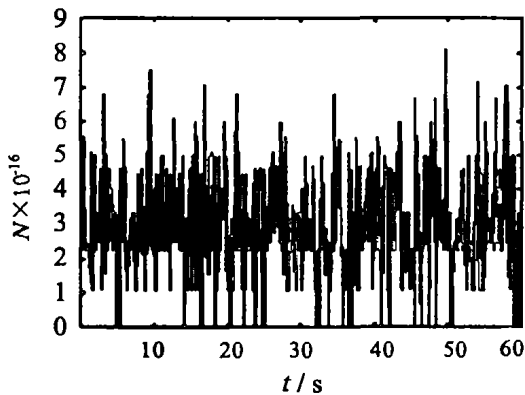


图 2 位置约束误差

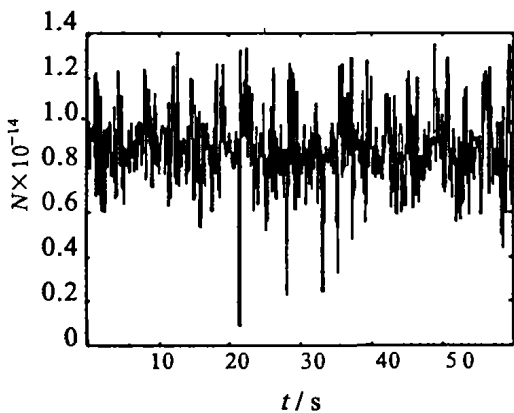


图 3 速度约束误差

若利用 Baumgarte(违约校正法)法用 4 阶 Runge-Kutta 法进行仿真研究^[4-6], 结果则如图 4、图 5 所示。

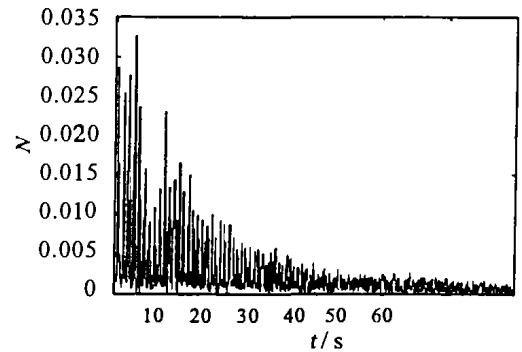


图 4 位置约束误差

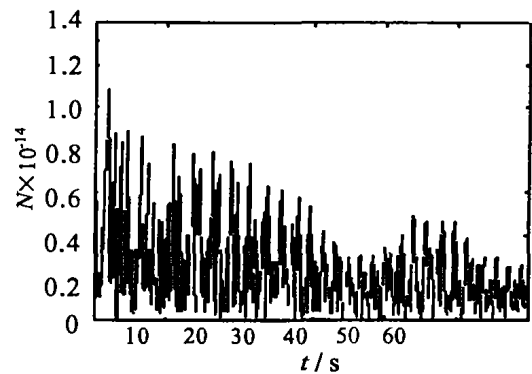


图 5 速度约束误差

4 结 语

1) 利用合成辛算法理论构造一些约束多体系统动力学的辛算法, 进行仿真研究, 与流行的 Baumgarte(违约校正法)法进行比较, 所构造的辛算法精度高, 稳定。

2) 目前, 这里构造的约束多体系统动力学方程的辛算法的应用困难在于一般多体系统的约束 Hamilton 正则方程的建立, 这涉及到动力学的逆问题; 另外, 由于本文的辛算法一般是隐式的, 对刚性问题也有很好的效果, 但寻求程式化的方法也有待于进一步研究。

3) 这里的工作只是初步的, 广泛应用还有待于计算机技术的发展, 但从算法上考虑, 也有许多工作可供研究。

参 考 文 献:

[1] 吴永, 胡继云, 殷学钢. 多体系统动力学方程在流形上的辛算法[J]. 力学进展, 2002, 32(2): 189 - 195.
 [2] SANZ-SERNA J M. Runge-kutta schemes for hamiltonian systems[J]. BIT, 1988, 28: 877 - 883.
 [3] POTRA F A, YEN J. Implicit numerical integration for euler-lagrange equations via tangent space parameterization[J]. Mechanics of Structure Machines, 1991, 19(1): 77 - 98.
 [4] 赵维加, 潘振宽, 王艺兵. 多体系统动力学微分/代数方程约束误差小扰动自我稳定方法[J]. 应用数学和力学, 2000, 21(1): 94 - 97.

[5] 张学盛,陈万吉. 约束多体系统动力学正则方程的约束边尺度法[J]. 计算力学学报, 1999, 16(3): 314-319.

[6] ARNOLD V I. Mathematical methods of classical mechanics [M]. (2nd ed). New-York: Spring-Verlag, 1989.

Symplectic Methods of the Dynamic Equations of Constrained Multibody Systems

WU Yong^{1,2}, DU Si-yi^{2,3}, HU Ji-yun⁴, LIU Bao-guo, YIN Xue-gang²

(1. Mathematics Department of Engineering College of Chongqing, Chongqing 400050;

2. College of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400030, China;

3. Colleg of Civil Engineerng, Zhengzhou University, Zhengzhou 450002, China;

4. Department of Mechanics, College of Engineering, Zhengzhou 450052, China)

Abstract: The differential-algebraic equation of the dynamic equations of constrained multibody system is a system of index three. It is a very difficult problem for solving. At present, there are no satisfactory numerical methods yet, we construct the symplectic composition Runger-Kutta methods for the differential-algebraic equations, and use mainly it for simulation in the canonical form of the equations. The results are better than Baumgarte's methods.

Key words: multibody systems; symplectic methods; canonical equation

(编辑 吕赛英)

~~~~~  
(上接第95页)

## Electric Horizontal Adjust Servomechanism for Radar Antenna Truck

*LI Di-ke<sup>1</sup>, LI Ping<sup>1</sup>, MENG Jian-bo<sup>1</sup>*

*LIU Jin-jiang<sup>2,3</sup>, WANG Da-en<sup>3</sup>, LIU Jiang<sup>3</sup>*

(1. Institute of Process Automation Instrumentation, Chongqing University, Chongqing 400030, China;

2. Key Laboratory of Optoelectronic Technology and System Under the State Ministry of Education,  
Chongqing University, Chongqing 400030, China;

3. Chongqing Aerospace New Century Satellite Application Technology Co. Ltd., Chongqing 400010, China)

**Abstract:** Before working, the radar's antenna needs to be adjusted into horizontal. A multiprocessor electric horizontal adjust servomechanism is introduced to solve the problem. The authors compares this electric servomechanism to hydraulic servomechanism and point out its advantages and disadvantages to the latter. Difference between three-points adjust mode and four-points adjust mode on stability are given, along with cost and precise. The hardware and software of the system are introduced.

**Key words:** platform; horizontal adjustment; single chip microprocessor

(编辑 吕赛英)