文章编号:1000 - 582X(2004)08 - 0136 - 03

一类非线性微分方程极限环的存在性*

张　谋,魏曙光
(重庆大学 数理学院,重庆　400030)

摘　要:利用环域定理得到一类非线性微分方程极限环存在的充分条件,去掉了过去结论中的某些限制条件,推广了文献[1]的定理1。

关键词:极限环; 方程; 存在性
中图分类号:O175.12　　　　**文献标识码**:A

过去人们常讨论的是方程 $\dot{x} = y - F(x)$, $\dot{y} = -g(x)$ 及 $\dot{x} = P(y)$, $\dot{y} = Q(x,y)$ 的极限环的存在性[1-6],做了大量工作,但大部分假设了条件 $Q(\pm\infty) = +\infty$ 或 $Q^*(\pm\infty) = +\infty$,其中 $G(x) = \int_0^x g(x)\,\mathrm{d}x$, $Q^*(x) = -\int_0^x Q(x,0)\,\mathrm{d}x$。这里讨论非线性方程

$$\begin{cases}\dot{x} = y - F(x)\\ \dot{y} = Q(x,y)\end{cases} \tag{1}$$

极限环的存在的充分条件,但本文的定理1去掉了限制条件 $Q^*(\pm\infty) = +\infty$,其中当 $Q(x,y) = -g(x)$ 时即为文献[1]的定理1。

在本文中,总假设所涉及的函数是连续的,方程初值问题解的存在唯一性条件被满足,点 $O(0,0)$ 是唯一的奇点。记

$$h(x,y) = \frac{Q(x,y) - Q(x,0)}{y},$$

$$\lambda(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - \int_0^x Q(x,0)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}y^2 + Q^*(x)$$

定理1　设方程(1)中的函数满足

1) $xQ(x,y) < 0$,当 $(x,y) \neq (0,0)$ 时;

2) $\exists \delta > 0$,当 $|x| \in (0,\delta)$ 时 $xF(x) < 0$,且 $F(\pm\infty) = \pm\infty$;

3) 对充分小的非零 $|x|$, $|y|$ 有 $h(x,y) > 0$,当 $0 < x < b$, $y < B$ 时 $h(x,y) > 0$,其中 $0 < b < +\infty$, $B = \inf\limits_{0<x<b} F(x) < 0$;

4) $\exists M > 0$,使 $\sqrt{-2\int_0^b Q(x,0)\,\mathrm{d}x} < B + M$

则方程(1)存在稳定的极限环。

证　因为 $\left.\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)} = y^2 h(x,y) + Q(x,0)F(x) > 0$(当 $|x|$, $|y| \neq 0$ 充分小时),所以点 $O(0,0)$ 是不稳定奇点,即 $\lambda(x,y) = C$(C 充分小)可作为环域的内境界线。

下面作环域的外境界线(如图1)。

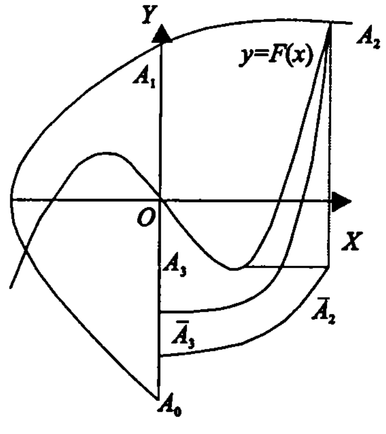

图1　环域的外境界线

过 $A_0(0,-M)$ 作方程(1)的正向轨线 $f(A_0,I^+)$,在区域 $\{(x,y)\mid x<0, y<F(x)\}$ 内 $\dot{x}<0$, $\dot{y}>0$ 又 $F(-\infty) = -\infty$,所以 $f(A_0,I^+)$ 必与 $y = F(x)$ 相交,在区域 $\{(x,y)\mid x<0, y>F(x)\}$ 内 $\dot{x}>0$, $\dot{y}>0$ 轨线 $f(A_0,I^+)$ 必交正 y 轴于 A_1,过 A_1 作方程(1)的正向轨线 $f(A_1,I^+)$,在区域 $\{(x,y)\mid x>0, y>F(x)\}$ 内 $\dot{x}>0$, $\dot{y}<0$ 又

* 收稿日期:2004 - 02 - 18
作者简介:张谋(1963 -),男,重庆人,重庆大学副教授,硕士,主要从事常微分方程方面的研究。

$F(+\infty)=+\infty$，所以过 A_1 的轨线 $f(A_1,I^+)$ 必与 $y=F(x)$ 相交于 $A_2(\bar{x},F(\bar{x}))$。过 A_2 作方程(1)的正向轨线 $f(A_2,I^+)$；过点 $\bar{A}_2(\bar{x},B)$ 作方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q(x,0)}{y-B} \tag{2}$$

的正向轨线 $L(\bar{A}_2,I^+)$，在区域 $\{(x,y)\mid x>0,y<F(x)\}$ 内 $f(A_2,I^+)$ 和 $L(\bar{A}_2,I^+)$ 均与负 y 轴相交，设交点分别为 $A_3(0,y_3)$，$\bar{A}_3(0,\bar{y}_3)$，方程(2)两边 0 到 $\bar{x}$ 积分得

$$\bar{y}_3=B-\sqrt{-2\int_0^{\bar{x}}Q(x,0)\mathrm{d}x}>B-\sqrt{-2\int_0^{b}Q(x,0)\mathrm{d}x}>-M$$

即 $\bar{A}_3$ 在 A_0 之上。比较方程(1)和(2)有

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1)}<\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2)}$$

从而 A_3 在 $\bar{A}_3$ 之上，且在线段 A_3A_0 上 $\dot{x}<0$，所以闭路 $A_0A_1A_2A_3A_0$ 可作为环域的外境界线，由环域定理知方程(1)存在稳定的极限环。

定理 2　设方程(1)满足

1) $xQ(x,0)<0,x\neq0$

2) 对充分小的 $|x|$、$|y|\neq0$ 有 $h(x,y)>0,xF(x)<0$

3) $\exists a>0,H(x)$ 使 $h(x,y)<H(x)$，且当 $|x|\geqslant a$ 时 $H(x)<0$，同时设

$$0<k_1=\inf_{x\geqslant a}\{F(x)\},0>k_2=\sup_{x\leqslant -a}\{F(x)\}$$
$$k_3=\max_{|x|\leqslant a}\{|F(x)|\}$$

4) $\exists C>0,M>0$ 使

a. $\int_{x_1}^{x}(H(x)+CQ(x,0))\mathrm{d}x<-M$，对任意 $x_1\leqslant0$，当 $x\leqslant x_1$ 时或

b. $\int_{x_1}^{x}(H(x)-CQ(x,0))\mathrm{d}x<M$，对任意 $x_1\geqslant0$，当 $x\geqslant x_1$ 时

5) $Q^{\cdot}(\pm\infty)=+\infty$

则方程(1)至少存在一稳定的极限环。

证　类似定理 1 的证明知，原点是不稳定奇点。

首先证明 (x,y) 平面内，方程(1)的过任何点的正半轨绕原点盘旋。

由已知 $\exists N>0$，当 $|x|\leqslant a,y>N$ 时，$\dot{x}=y-F(x)>1$；

当 $|x|\leqslant a,y<-N$ 时，$x=y-F(x)<-1$

所以，在 $|x|\leqslant a$，$|y|>N$ 内任何点，方程(1)的轨线无垂直渐近线。

$$\left.\frac{d\lambda}{dt}\right|_{(1)}=y^2h(x,y)+Q(x,0)F(x)<y^2H(x)+k_1Q(x,0)<0\text{，当 }x\geqslant a,|y|<+\infty\text{ 时}$$

$$\left.\frac{d\lambda}{dt}\right|_{(1)}=y^2h(x,y)+Q(x,0)F(x)<y^2H(x)+k_2Q(x,0)<0\text{，当 }x\leqslant -a,|y|<+\infty\text{ 时}$$

$$y\cdot\left.\frac{dx}{dt}\right|_{\substack{x=0\\y\neq0}}=y^2>0,x\cdot\left.\frac{dy}{dt}\right|_{\substack{x\neq0\\y=0}}=xQ(x,0)<0$$

所以 (x,y) 平面内，方程(1)的过任何点的正半轨绕原点盘旋。

其次证明，总能在正轴 y 上找到一点 A 使过 A 点的负向轨线 $f(A,I^-)$ 永远在 $y=M$ 的上方。

由条件知 $\exists\varepsilon>0,N_1>0$，当 $|y|>N_1$ 时有 $|k_i/y|\leqslant1-\varepsilon(i=1,2,3)$，所以

$y-F(x)<y-k_1=y(1-k_1/y)\leqslant\varepsilon y$，当 $y\leqslant-N_1$，$x\geqslant a$ 时；

同理，$y-F(x)\geqslant\varepsilon y$，当 $y\geqslant N_1,x\leqslant-a$ 时；$y-F(x)\geqslant\varepsilon y$，当 $y\geqslant N_1,|x|\leqslant a$ 时；$y-F(x)\leqslant\varepsilon y$，当 $y\leqslant-N_1$，$|x|\leqslant a$ 时。

由条件知 $\exists N_2>M,\forall C>0$，当 $y\geqslant N_2$ 时 $1/y<C$，取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，分 3 种情况讨论：

1) 若 $x\leqslant0,y>N$ 时 $Q(x,y)<0$，此时 $\dot{x}>0,\dot{y}<0$，点 $A(x_A,y_A)$，$y_A>N$ 的负向轨线 $f(A,I^-)$ 必在 $y=y_A$ 之上，当然也在 $y=M$ 之上。

2) 若 $x\leqslant0,y>N$ 时 $Q(x,y)\geqslant0$，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q(x,y)}{y-F(x)}\leqslant\frac{Q(x,y)}{\varepsilon y}\leqslant\frac{1}{\varepsilon}(H(x)+CQ(x,0)) \tag{3}$$

设 $A(x_A,y_A)$ 是正 y 轴上的一点，$y_A>N+M/\varepsilon$，如果 $f(A,I^-)$ 与直线 $y=M$ 相交则它首先必与 $y=N$ 相交，这时在 $y=N$ 上必存在一点 $P_0(x_0,N)$ 使 $f(A,I^-)$ 的纵坐标 $y(x)>N$ 当 $x_0<x<0$ 时，且 $y(x_0)=N$。因 $y>N$ 时 $\dot{x}>0$，由式(3)知及所给条件知

$$dy\leqslant\frac{1}{\varepsilon}[H(x)+CQ(x,0)]dx$$

$$\int_{y(x_0)}^{y_A}dy\leqslant\int_{x_0}^{0}\frac{1}{\varepsilon}[H(x)+CQ(x,0)]dx\text{ 所以}$$

$$y(x_0)\geqslant y_A+\int_0^{x_0}\frac{1}{\varepsilon}[H(x)+CQ(x,0)]dx>y_A+\frac{1}{\varepsilon}(-M)>N$$

这与 $y(x_0)=N$ 相矛盾，所以此时 $f(A,I^-)$ 必在 $y=M$ 之上。

3) 若当 $x\leqslant0,y>N$ 时 $Q(x,y)$ 有正有负。

设 A 是正 y 轴上任意一点 $y_A>N+2M/\varepsilon$，不妨设

$f(A,I^-)$只在两点 B、C 之间 $Q(x,y)$ 为负，其余地方 $Q(x,y)$ 均为正，过 B 作平行于 x 轴的直线，必交于轨线$f(A,I^-)$另一点 D(若没有交点，则$f(A,I^-)$在直线 $y=y_B$ 之上，结论成立)。用反证法，如果$f(A,I^-)$与直线 $y=M$ 相交，则它首先必与 $y=N$ 相交，则在 $y=N$ 上必有一点 $P_0(x_0,N)$ 使当 $x_0<x\leqslant 0$ 时 $y(x)>N$ 且 $y(x_0)=N$。当 $y\geqslant N$ 时 $\dot{x}>0$，所以

$$\mathrm{d}y=\frac{Q(x,y)}{y-F(x)}\mathrm{d}x$$

$$\int_{y(x_0)}^{y_A}\mathrm{d}y=\int_{y(x_0)}^{y_D}\mathrm{d}y+\int_{y_D}^{y_B}\mathrm{d}y+\int_{y_B}^{y_A}\mathrm{d}y=$$

$$\int_{y(x_0)}^{y_D}\mathrm{d}y+\int_{y_B}^{y_A}\mathrm{d}y=\int_{x_0}^{x_D}\frac{Q(x,y)}{y-F(x)}\mathrm{d}x+\int_{x_B}^{0}\frac{Q(x,y)}{y-F(x)}\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\int_{x_0}^{x_D}\frac{Q(x,y)}{\varepsilon y}\mathrm{d}x+\int_{x_B}^{0}\frac{Q(x,y)}{\varepsilon y}\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\int_{x_0}^{x_D}\frac{1}{\varepsilon}[H(x)+CQ(x,0)]\mathrm{d}x+$$

$$\int_{x_B}^{0}\frac{1}{\varepsilon}[H(x)+CQ(x,0)]\mathrm{d}x\leqslant-\frac{2M}{\varepsilon}$$

即有 $y(x_0)\geqslant y_A-\dfrac{2M}{\varepsilon}>N$，这与 $y(x_0)=N$ 相矛盾，即$f(A,I^-)$不与 $y=M$ 相交，亦即 $f(A,I^-)$ 必在 $y=M$ 之上。

所以，在正 y 轴上存在一点 A，当 y_A 充分大，时间 $t\to-\infty$ 时，过 A 点的负向轨线$f(A,I^-)$永远在 $y=M$ 的上方，走向无穷远处。

综上所述，若 A 是正 y 轴上的一点(y_A 充分大)，过 A 点的负向轨线$f(A,I^-)$将绕原点盘旋且再一次与正 y 轴相交，由方程解的唯一性，其交点必在点 A 之下，又$\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{\substack{x=0\\y>0}}>0$，所以曲线 $AmE\cup EA$ 可作为环域的外境界线(如图 2)，由环域定理知存在稳定的极限环。

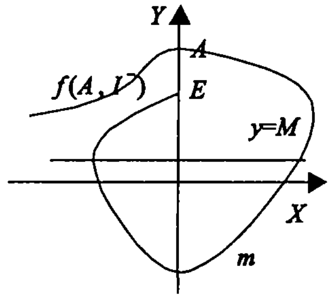

图2 境界线

参考文献：

[1] 梁锦鹏. Lienard 方程极限环存在定理[J]. 高校应用数学学报，2000，15(2)：163－168.

[2] ZHAN ZUNKAI. On the existence of limit cycles for differential equation $\dot{x}=P(y)$，$\dot{y}=Q(x,y)$[J]. Ann of Diff Eqs, 1989，5(3)：341－348.

[3] WANG GAOXIANG. Existence of limit cycles of equation[J]. Acta Sci Nat Sunyatseni，1986，1：77－83.

[4] 丁大正. Liénard 方程极限环的存在性[J]. 应用数学学报，1984，7(2)：166－174.

[5] 余澍祥. 极限环存在定理[J]. 数学进展，1965，8(2)：187－194.

[6] 陈新一. 方程 $\dot{x}=\varphi(y)-F(x)$，$\dot{y}=h(x,y)-g(x)$的极限环存在定理[J]. 数学学报，1999，42(5)：853－858.

The existence of limit cycles of some non-linear differential equations

ZHANG Mou, *WEI Shu-guang*

(College of Mathematics and Science, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

Abstract: The existence of limit cycles for the nonlinear oscillation equation is discussed, in which some hypothesis is omitted. The results of theorem 1 generalized the corresponding results for[1].

Key words: the limit cycle; equation; the existence

(编辑 张 苹)