文章编号:1000-582X(2005)10-0094-05

多重图的线图连通度*

田玉芳[1],何中市[2]
(重庆大学 1.数理学院; 2.计算机学院,重庆 400030)

摘 要:提出了多重图的线图的概念,研究了多重图的线图连通度的上界和下界.刻画了图的最小度与其线图连通度的关系:若$\delta(G)\geqslant\mu(\lfloor p/2\rfloor+1)$,则$\kappa_L(G)\geqslant\delta_L(G)-2(\mu-1)$,并通过构造出一系列的图,证明此结果是最好的:条件不能够被削弱,结论不能够被加强.同时,揭示了图的限制性边连通度就是线图连通度,推广了已有文献的结果.

关键词:连通度;限制性边连通度;线图;多重图
中图分类号:O157.5 **文献标识码**:A

通信网络的可靠性分析与高可靠性能网络的设计问题是可靠性研究的核心,这是两个非常重要的难题[1].图作为网络拓扑结构最有效模型,图的各种连通性指标被先后用来研究网络可靠性问题,如连通度与边连通度[1-3]、限制(边)连通度[4-7]、线图连通度[8-10]等等.最近国内关于限制边连通度的研究非常活跃[4-7],国际上关于线图及其连通度不断深化[11].而图的限制边连通度实质上就是图的线图连通度.文献[10]将线图的最佳连通性设计应用于多处理机总线网络的最佳容错性设计,并成功地提出了相当广泛的一类最佳容错总线网络.对于处理机个数较大时,必然面临多重图的线图.因此,关于多重图的线图及其连通性的研究,既具理论意义,又有重要的应用价值.

1 线图的已有定义与结论

对图G,用$V(G)$和$E(G)$分别表示G的顶点集和边集,$d_G(v)$表示G中顶点v的度.$\delta(G)$和$\Delta(G)$分别表示G的顶点最小度和最大度,$\lambda(G)$表示G的边连通度.在G图中,只与一个顶点相关联的边称为环,在同一对顶点之间可以有多条边,称之为重复边.不含重复边的图成为简单图,含有重复边的图称为多重图.这里研究无环图.

一个连通图G的边集的一个子集F称为一个限制性边割,如果它是一个边割,且$G-F$不含孤立点.图G的限制性边连通度$\lambda'(G)$定义为所有限制性边割的最小基数.$\lambda'(G)\leqslant\xi(G)$,其中$\xi(G)$表示图$G$的最小边度.如果上式等号成立,则称$G$是极大限制性边连通的.

欧见平研究了正则图的限制边连通性[4],证明了当$k>n/2$时,n阶k-正则图是极大限制性边连通.

性质1[4] 当$k>n/2$时,对于n阶k-正则图,有$\lambda'(G)=\xi(G)$,其中$n\geqslant4$.

关于图G的线图的定义如下.

定义1[2,8] 图G的线图记为$L(G)$:$L(G)$的顶点是G的边,$L(G)$中2个顶点邻接当且仅当G中相应的2条边含有公共顶点.若$x=\{u,v\}$是G的一条边,则x作为$L(G)$的顶点,其顶点度为:

$$d_{L(G)}(x)=d_G(u)+d_G(v)-2. \tag{1}$$

显然,定义1表明$L(G)$为简单图.

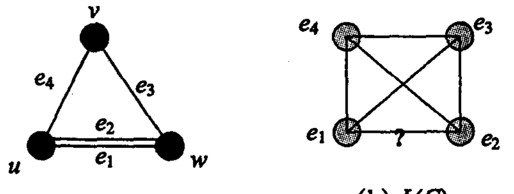
文献[9]把线图的概念广义化,引入了k-线图的定义如下.

定义2[9] 图G的k-线图记为$L_k(G)$:$L_k(G)$的顶点是G的k阶(k个顶点)完全子图;$L_k(G)$中两个顶点邻接当且仅当G中相应的2个k阶完全子图含有$k-1$个公共顶点.

由此可知,$L_2(G)$即为$L(G)$.定义1是针对G为简单图,并且定义2虽然推广了定义1,但仍是基于G为简单图.否则,若G为多重图(含有重复边),则对G

* 收稿日期:2005-05-20
基金项目:国家自然科学基金资助项目(60173060)
作者简介:田玉芳(1966-),女,四川中江人,重庆大学讲师,硕士,主要从事运筹与优化控制的研究.

的两条重复边 e_1 和 e_2，它们有 2 个公共顶点，导致如下 2 个矛盾(图 1).



(a) G　　(b) $L(G)$

图 1　一个多重图及其可能的线图

1) 由定义 1 知 $L(G)$ 为简单图，e_1 作为 $L(G)$ 的顶点，其度 $d_{L(G)}(e_1)=3$，但是 $e_1=\{u,v\}$ 作为图 G 中的边 $d_G(u)+d_G(v)-2=3+3-2=4$. 其度不满足式(1)，导致定义 1 自相矛盾.

2) 按定义 1，e_1 和 e_2 对应 $L(G)$ 中 2 个相邻的顶点；而由定义 2，则不能回答 e_1 和 e_2 是否对应 $L_2(G)$ 中的 2 个相邻的顶点，从而与定义 1 不一致，亦导致定义 1 与定义 2 相互矛盾.

因此，目前关于线图、k－线图以及迭线图(iterated line graphs)[11]的概念都是基于简单图.

笔者将推广线图的已有定义，提出多重图的线图概念.

关于图的连通性问题，从上面的定义可以看出：图 G 的边就是线图 $L(G)$ 的顶点，图 G 的限制边割集对应线图 $L(G)$ 的点割集，图 G 的最小限制性边割集对应线图 $L(G)$ 的最小点割集，因此图的限制性边连通度实质上就是图 G 的线图连通度，即：

$$\lambda'(G)=\kappa_L(G), \tag{2}$$

其中，$\kappa_L(G)=\kappa(L(G))$ 表示图 G 的线图连通度. 并有以下结果.

性质 2[10]　对 p 阶简单图 G，若 $\delta(G)\geqslant\lfloor p/2\rfloor+1$，则 $\kappa_L(G)\geqslant 2\delta(G)-2$.

注：$\lfloor x\rfloor$ 表示不超过 x 的最大整数.

图的连通性研究是一项理论与应用并重、颇具难度的课题. 目前已有一些一些特殊图的限制性边连通度结果[4-7]，对于更一般的图，其限制边性连通度(线图连通度)结论如何，正是笔者试图研究的内容.

笔者首先将线图的概念推广到多重图，并将简单图看作多重图的特例(所得到的结果既适合于简单图，也适合于多重图). 其次，研究了多重图的线图连通度的上界和下界，刻画了图的最小度与其线图连通度的关系，得到：若 $\delta(G)\geqslant\mu([p/2]+1)$，则 $\kappa_L(G)\geqslant\delta_L(G)-2(\mu-1)$，其中 $\delta_L(G)$ 表示线图 $L(G)$ 的顶点最小度. 并通过构造出一系列图，证明此结果是最好的：条件不能够被削弱，结论不能够被加强，推广了文献[4]和文献[10]的结果.

2　多重图的线图

笔者将线图的定义推广到多重图，提出的图(含多重图)的线图定义如下.

定义 3　图 G 的线图记为 $L(G)$：$L(G)$ 的顶点是 G 的边；$L(G)$ 中 2 个顶点由 m 条边关联当且仅当 G 中相应的两条边含有 m 个公共顶点.

显然，$m=1$、2. 若 $m=1$，即 G 的 2 条边只有一个公共顶点，从而 $L(G)$ 中相应的 2 个顶点由一条边关联；若 $m=2$，即 G 的 2 条边有 2 个公共顶点(即为重复边)，从而 $L(G)$ 中相应的 2 个顶点由两条边(即二重边)关联.

由定义 3 易知式(1)对于简单图和多重图都成立，即

$$d_{L(G)}(x)=d_G(u)+d_G(v)-2.$$

由此有：

$$\delta_L(G)\leqslant d_G(u)+d_G(v)-2. \tag{3}$$

若 G 为简单图，则 $L(G)$ 亦为简单图，且定义 3 与定义 1 等价；若 G 为多重图，则 $L(G)$ 为多重图，但 $L(G)$ 的重复度为 2.

用 $\mu_G(uv)$ 表示 G 中关联 2 个相邻顶点 u 和 v 的边的条数，称为图 G 中边 $\{u,v\}$ 的重复度. 则

$$\mu(G)=\max_{\{u,v\}\in E(G)}\mu_G(uv)$$

称为图 G 的最大重复度，简称为图 G 的重复度，简记为 μ. 并称重复度为 μ 的图为 μ 重图.

$$\mu_2(G)=\min_{\{u,v\}\in E(G)}\mu_G(uv)$$

称为图 G 的最小重复度，并简记为 μ_2. 显然有

$$\forall\{u,v\}\in E(G),\mu\geqslant\mu_G(uv)\geqslant\mu_2\geqslant 1.$$

若 G 为简单图，则 $\mu=\mu_2=1$. 所以，将简单图作为多重图的特例，所得到的结果既适合于简单图，又适合于多重图，下文将不再区分简单图与多重图.

由定义 3 即刻得到如下命题.

引理 1　对图 G，若 $\mu(G)=1$，则 $\mu(L(G))=1$；若 $\mu(G)\geqslant 2$，则 $\mu(L(G))=2$.

为方便起见，引进如下记号：

用 $(S,T)_G$ 表示 G 的顶点集 $V(G)$ 划分为不相交的两部分 S 和 T；$G[S]$ 表示 G 的 S 导出子图；$m_G(S,T)$ 表示所有一个端点属于 S，另一个端点属于 T 的边的条数，称为 G 中跨接顶点集 S 与 T 的边数[8]. $e(G)=|E(G)|$ 表示图 G 的边数. 关于 $\kappa_L(G)$ 有如下结论.

引理 2　设整数 $k<e(G)$，则 $\kappa_L(G)\geqslant k$ 当且仅当对于任意的 $(S,T)_G$，$G[S]$、$G[T]$ 都含有边，有 $m_G(S,T)\geqslant k$.

证 充分性:用反证法.

假设 $\kappa_L(G)<k$. 即 $L(G)$ 存在顶点割集 V_1 : $|V_1|<k-1$,用 F 表示 G 中相应于 V_1 的边集,则 $|F|\leqslant k-1$. 有以下 2 种情况:

情况 1 若 $G-F$ 只含一条边,则 $e(G)=|F|+1\leqslant k<e(G)$,导致矛盾.

情况 2 若 $G-F$ 至少含有 2 条边,则 $G-F$ 至少有 2 个含有边的连通分图. 令其中一个含有边的连通分图的顶点集为 S,其余顶点集为 T,由已知 $m_G(S,T)\geqslant k$,显然

$$|F|\geqslant m_G(S,T)\geqslant k,$$

这亦导致矛盾. 从而充分性得证.

必要性:用反证法.

假设存在 $(S,T)_G$: $G[S]$ 和 $G[T]$ 都含有边,而 $m_G(S,T)<k$. 记 F 为 G 中所有跨接 S 与 T 的边的集合,则 F 在 $L(G)$ 中相应的顶点子集构成 $L(G)$ 的点割集. 显然 $|F|=m_G(S,T)<k$,从而 $\kappa_L(G)\leqslant|F|<|k$,导致矛盾,因此必要性得证.

综上所述,命题成立.

引理 3 对 p 阶 $\mu(\geqslant 1)$ 重图 G,用 $e(G)$ 表示图 G 的边数,则 $e(G)-1\geqslant\delta_L(G)-2(\mu-1)$.

证 存在 G 中的边 $\{u,v\}$ 使得 $\mu_G(uv)=\mu$,于是

$$e(G)\geqslant(d_G(u)-\mu)+(d_G(v)-\mu)+\mu=d_G(u)+d_G(v)-\mu.$$

由式(3)得到

$$e(G)\geqslant\delta_L(G)+2-\mu\geqslant\delta_L(G)-2(\mu-1)+1.$$

引理得证.

3 线图连通度的上界

线图连通度的上界如下.

定理 1 若 $\delta(G)>2\mu$,则

1) $\kappa_L(G)\leqslant 2\Delta(G)-2\mu$;

2) $\kappa_L(G)\leqslant\delta_L(G)-2(\mu_2-1)$.

证 1) 不失一般性,可设 $\{u_1,v_1\}\in E(G)$,使 $\mu_G(u_1v_1)=\mu$. 由 $\delta(G)>2\mu$ 得 G 含有与边 $\{u_1,v_1\}$ 没有公共顶点的边,令 $S=\{u_1,v_1\}$, $T=V(G)\backslash S$,有 $(S,T)_G$ 满足 $G[S]$ 和 $G[T]$ 都含有边,显然

$$m_G(S,T)=d_G(u_1)+d_G(v_1)-2\mu_G(u_1v_1)\leqslant 2\Delta(G)-2\mu.$$

由引理 2 知 $\kappa_L(G)\leqslant 2\Delta(G)-2\mu$.

2) 可设 $x=\{u_2,v_2\}\in E(G)$,使 $\delta_L(G)=d_{L(G)}(x)=d_G(u_2)+d_G(v_2)-2$. 由 $\delta(G)>2\mu$ 知 G 含有与 $\{u_2,v_2\}$ 没有公共顶点的边,令 $S=\{u_2,v_2\}$, $T=V(G)\backslash S$,则有

$$m_G(S,T)=d_G(u_2)+d_G(v_2)-2\mu_G(u_2v_2)\leqslant\delta_L(G)+2-2\mu_2=\delta_L(G)-2(\mu_2-1).$$

由引理 2 即得 $\kappa_L(G)\leqslant\delta_L(G)-2(\mu_2-1)$.

考虑到:若 G 为正则图,则 $\Delta(G)=\delta(G)$,且 $\delta_L(G)=2\delta(G)-2$,由定理 1 即刻得到:

推论 1 对正则图 G,若 $\delta(G)>2\mu$,则 $\kappa_L(G)\leqslant 2\delta(G)-2\mu=\delta_L(G)-2(\mu-1)$.

若 G 为拟正则图,则 $\Delta(G)\leqslant\delta(G)+1$, $\delta_L(G)\leqslant\delta(G)+\Delta(G)-2\leqslant 2\delta(G)-1$,由定理 1 即得:

推论 2 对拟正则图 G,若 $\delta(G)>2\mu$,则

1) $\kappa_L(G)\leqslant 2\delta(G)-2\mu+2$;

2) $\kappa_L(G)\leqslant 2\delta(G)-2\mu_2+1$.

推论 3 对图 G,若 $\mu_2=\mu$,则 $\kappa_L(G)\leqslant\delta_L(G)-2(\mu-1)$.

4 线图连通度的下界

下面以图 G 和其线图 $L(G)$ 的顶点最小度 $\delta(G)$ 和 $\delta_L(G)$ 为工具,刻画线图 $L(G)$ 的连通度 $\kappa_L(G)$ 的下界,得到:

定理 2 对 p 阶 μ 重图 G,若 $\delta(G)\geqslant\mu(\lfloor p/2\rfloor+1)$,则 $\kappa_L(G)\geqslant\delta_L(G)-2(\mu-1)$.

注: $\lfloor x\rfloor$ 表示不超过 x 的最大整数.

证 对 p 分以下 2 种情况:

情况 1 若 $p\leqslant 3$,则 G 的任何两条边都含有公共顶点,即 $L(G)$ 的任何 2 个顶点都相邻,结合引理 3 得 $\kappa_L(G)=e(G)-1\geqslant\delta_L(G)-2(\mu-1)$.

情况 2 若 $p\geqslant 4$,则由已知, $\delta(G)\geqslant 3\mu>2\mu$,可知 G 存在 2 条不含公共顶点的边,从而 G 存在划分 $(S,T)_G$,使 $G[S]$ 和 $G[T]$ 都含有边. 设 $(S,T)_G$ 为 $V(G)$ 的任意一个划分, $G[S]$ 和 $G[T]$ 都含有边. 可得 $|S|\geqslant 2$, $|T|\geqslant 2$,且不失一般性,可设 $|S|\leqslant\lfloor p/2\rfloor$,并记 $n=|S|$.

设 $\{u_1,v_1\}$ 为 $G[S]$ 的一条边, w 为 $L(G)$ 中相应于边 $\{u_1,v_1\}$ 的顶点,则有:

$$d_G(u_1)+d_G(v_1)-2=d_{L(G)}(w)\geqslant\delta_L(G).$$

因为: $\forall v\in S$, $G[S]$ 中关联顶点 v 的边数至多为 $\mu\times(|S|-1)=\mu(n-1)$,从而 G 中一个端点为 v,另一个端点属于 T 的边数至少为 $d_G(v)-\mu(n-1)$. 因此, G 中 S 与 T 之间的跨接边数为

$$\begin{aligned}m_G(S,T)&\geqslant\sum_{v\in S}(d_G(v)-\mu(n-1))\geqslant\\&d_G(u_1)+d_G(v_1)-2\mu(n-1)+\\&(\delta(G)-\mu(n-1))(n-2)\geqslant\\&\delta_L(G)+2-2\mu-2\mu(n-2)+\\&(\delta(G)-\mu(n-1))(n-2)\geqslant\\&\delta_L(G)-2(\mu-1)+(n-2)(\delta(G)-\mu n-\mu)\geqslant\\&\delta_L(G)-2(\mu-1)+\end{aligned}$$

$$(n-2)(\mu(\lfloor p/2\rfloor+1)-\mu\lfloor p/2\rfloor-\mu)=\delta_L(G)-2(\mu-1).$$

由$(S,T)_G$的任意性，结合引理 2 即得 $\kappa_L(G)\geqslant\delta_L(G)-2(\mu-1)$.

定理 3　对 p 阶 μ 重图 G，若 $p\leqslant5$，则 $\kappa_L(G)\geqslant\delta_L(G)-2(\mu-1)$.

证　分以下 2 种情况：

1) G 的任何 2 条边都含有公共顶点. 则 $L(G)$ 的任何两个顶点都相邻，结合引理 3 有

$$\kappa_L(G)=e(G)-1\geqslant\delta_L(G)-2(\mu-1).$$

2) G 存在 2 条边不含有公共顶点. 则 G 存在划分 $(S,T)_G$，使 $G[S]$、$G[T]$ 中都含有边. 由于 $p\leqslant5$ 可得 $|S|=2$ 或 $|T|=2$. 不妨设 $S=\{u,v\}$，则有

$$m_G(S,T)=d_G(u)+d_G(v)-2\mu_G(uv)\geqslant\delta_L(G)+2-2\mu=\delta_L(G)-2(\mu-1).$$

由引理 2 知 $\kappa_L(G)\geqslant\delta_L(G)-2(\mu-1)$.

考虑到：对于正则图 G，$\delta_L(G)=2\delta(G)-2$；对于拟正则图 G，$2\delta(G)-2\leqslant\delta_L(G)\leqslant2\delta(G)$. 由定理 3，结合定理 2 与推论 1－3 可得：

推论 4　设 $p\geqslant4$，对 p 阶 μ 重正则图 G，若 $\delta(G)\geqslant\mu(\lfloor p/2\rfloor+1)$，则

$$\kappa_L(G)=\delta_L(G)-2(\mu-1)=2\delta(G)-2\mu.$$

推论 5　设 $p\geqslant4$，对 p 阶 μ 重拟正则图 G，若 $\delta(G)\geqslant\mu(\lfloor p/2\rfloor+1)$，则

1) $2\delta(G)-2\mu\leqslant\kappa_L(G)\leqslant2\delta(G)-2\mu+2$；

2) 若 G 的任何 2 个 $\delta(G)$ 度顶点都不相邻，则 $2\delta(G)-2\mu+1\leqslant\kappa_L(G)\leqslant2\delta(G)-2\mu+2$.

推论 6　设 $p\geqslant4$，对 p 阶 μ 重图 G，若 $\mu_2=\mu$，且 $\delta(G)\geqslant\mu(\lfloor p/2\rfloor+1)$，则

$$\kappa_L(G)=\delta_L(G)-2(\mu-1).$$

性质 1 和性质 2 就是该推论 6 的一个特殊情况.

对于 $n(n\geqslant4)$ 阶 k－正则图（简单图：$\mu=1$）G，当 $k>n/2$ 时，有 $\delta(G)\geqslant\mu(\lfloor p/2\rfloor+1)$ 成立，由推论 6，$\kappa_L(G)=\delta_L(G)$，由式(2)知 $\lambda'(G)=\xi(G)$ 成立，这就是性质 1.

对 p 阶简单图 G，若 $\delta(G)\geqslant\lfloor p/2\rfloor+1$，即 $\delta(G)\geqslant\mu(\lfloor p/2\rfloor+1)$ 成立. 由推论 6，$\kappa_L(G)=\delta_L(G)$ 成立，结合式(3)即可得到 $\kappa_L(G)\geqslant2\delta(G)-2$，这就是性质 2.

对 p 阶 μ 重图 G：当 $p\leqslant5$ 时，由定理 3、$\kappa_L(G)\geqslant\delta_L(G)-2(\mu-1)$ 成立.

当 $p\geqslant6$ 时：

1) 若 $\delta(G)\geqslant\mu(\lfloor p/2\rfloor+1)$，由定理 2 可知，$\kappa_L(G)\geqslant\delta_L(G)-2(\mu-1)$ 成立.

2) 若 $\delta(G)<\mu(\lfloor p/2\rfloor+1)$，则不能保证 $\kappa_L(G)\geqslant\delta_L(G)-2(\mu-1)$ 成立.

下面对任意的 2 个整数 $p\geqslant6$、$\mu\geqslant1$，构造出 p 阶 μ 重图 G，使 $\delta(G)=\mu(\lfloor p/2\rfloor+1)-1$，而 $\kappa_L(G)<\delta_L(G)-2(\mu-1)$.

分 2 种情况构造 G：

情况 1　若 p 为偶数，不妨设 $p=2k(k\geqslant3)$，则 G 构造如下：

设 G_1 和 G_2 都是 μ 重 k 阶完全图，即每条边的重复度都为 μ 的 k 阶完全图，并记 $V(G_1)=\{u_1,\cdots,u_k\}$，$V(G_2)=\{v_1,\cdots,v_k\}$，则

$$G:\quad V(G)=V(G_1)\cup V(G_2),$$

$$E(G)=E(G_1)\cup E(G_2)\cup\{\mu\{u_i,v_i\},(\mu-1)\{u_i,v_{i+1}\},\ i=1,\cdots,k-1\}\cup\{\mu\{u_k,v_k\},(\mu-1)\{u_k,v_1\}\}.$$

可知，对 $\forall i$，$d_G(u_i)=d_G(v_i)=(k-1)\mu+\mu+(\mu-1)=(k+1)\mu-1$，即

$\delta(G)=\mu(k+1)-1=\mu(\lfloor p/2\rfloor+1)-1$，$\mu(G)=\mu$，且 $\delta_L(G)=2\mu(k+1)-4$. 从而 $\delta_L(G)-2(\mu-1)=2\mu k-2$.

若令 $S=V(G_1)$，$T=V(G_2)$，则 $G[S]$ 和 $G[T]$ 都有边，且

$$m_G(S,T)=(\mu+(\mu-1))k<2\mu k-2=\delta_L(G)-2(\mu-1),$$

由引理 2 即得 $\kappa_L(G)<\delta_L(G)-2(\mu-1)$.

情况 2　若 p 为奇数，不妨设 $p=2k+1(k\geqslant3)$，则 G 构造如下：

$$G:\quad V(G)=V(G_1)\cup V(G_2)\cup\{w\},$$

$$E(G)=E(G_1)\cup E(G_2)\cup\{\mu\{u_i,w\},\mu\{v_i,w\}:i=1,\cdots,k\}\cup\{(\mu-1)\{u_i,v_i\},\ i=1,\cdots,k\}.$$

其中 G_1 和 G_2 同情况 1.

可知 $d_G(u_i)=d_G(v_i)=(k+1)\mu-1$，即

$\delta(G)=\mu(k+1)-1=\mu(\lfloor p/2\rfloor+1)-1$，$\mu(G)=\mu$，且 $\delta_L(G)=2\mu(k+1)-4$，从而 $\delta_L(G)-2(\mu-1)=2\mu k-2$.

若令 $S=V(G_1)$，$T=V(G_2)\cup\{w\}$，则 $G[S]$ 和 $G[T]$ 都含有边，且

$$m_G(S,T)=(\mu+(\mu-1))k=2\mu k-k<2\mu k-2=\delta_L(G)-2(\mu-1).$$

由引理 2 得 $\kappa_L(G)<\delta_L(G)-2(\mu-1)$.

综上得到：

定理 4　对 $\forall p\geqslant6$，$\mu\geqslant1$，都存在 p 阶 μ 重图 G，使 $\delta(G)=\mu(\lfloor p/2\rfloor+1)-1$；而 $\kappa_L(G)<\delta_L(G)-2(\mu-1)$.

5　结束语

笔者推广了图的线图定义，明确地提出了多重图

的线图的概念,并研究了线图连通度的界. 对 p 阶 μ 重图 G 得到以下主要结果:

1) 若 $\delta(G) > 2\mu$ 时,则 $\kappa_L(G) \leqslant 2\Delta(G) - 2\mu$,且 $\kappa_L(G) \leqslant \delta_L(G) - 2(\mu 2 - 1)$. (定理1).

2) 若 $\delta(G) \geqslant \mu(\lfloor p/2 \rfloor + 1)$,则 $\kappa_L(G) \geqslant \delta_L(G) - 2(\mu - 1)$. (定理2).

3) 若 $p \leqslant 5$, 则 $\kappa_L(G) \geqslant \delta_L(G) - 2(\mu - 1)$. (定理3).

4) 对 $\forall p \geqslant 6, \mu \geqslant 1$,构造了 p 阶 μ 重图 G,使 $\delta(G) = \mu(\lfloor p/2 \rfloor + 1) - 1$;而 $\kappa_L(G) < \delta_L(G) - 2(\mu - 1)$. (定理4).

5) 定理 2 条件中关于 $\delta(G)$ 取值范围,是不能被改进的. (由结论(4)).

6) 定理 2 结论中关于 $\kappa_L(G)$ 的界, 在一般情况下也是不能被改进的.

因为对于任意的正整数 $p \geqslant 4, \mu, m$, 都存在 p 阶 μ 重(每条边的重复度都是 μ)图 G(例如 μ 个哈拉里图 $H_{m,p}$ 的迭加得到的图),使 $\delta(G) = \mu m$, 而 $\kappa_L(G) = 2\delta(G) - 2\mu = \delta_L(G) - 2(\mu - 1)$,并且. 若取 $m \geqslant \lfloor p/2 \rfloor + 1$,则 $\delta(G) = \mu m \geqslant \mu(\lfloor p/2 \rfloor + 1)$ 成立, 即满足定理的条件.

7) 性质 1 和性质 2 就是文中推论 6 的一种特殊情况.

参考文献:

[1] BOESCH F T. Synthesis of Reliable Networks—a Survey[J]. IEEE Trans Reliab, 1986, (R-35): 240-246.

[2] HARARY F. Graph Theory[M]. Reading: Addison-wesley, 1969. 83-97.

[3] 何中市,杨晓帆,田玉芳. 二元图的最佳连通性[J]. 应用数学,1997,10(3):35-38.

[4] 欧见平. 正则图的限制性边连通度[J]. 数学研究, 2001,34(4):345-350.

[5] 徐俊明. 点可迁图的限制边连通度[J]. 数学年刊(A 辑), 2000,21A(5):605-608.

[6] 吕长虹,张克民. 无向 de-Bruijn 图的超级边连通性和限制性边连通度[J]. 应用数学学报,2002,25(1):29-35.

[7] 孟吉翔. 极小 Cayley 图的限制性边连通度[J]. 运筹学学报, 2001,5(1):33-38.

[8] BAUER D, TIDELL R. The Connectivities of Line and Total Graphs[J]. J Graph Theory, 1982,(6):197-203.

[9] BANGLE V. Perfect k-line Graphs and k-total Graphs[J]. J Graph Theory, 1993,17(1): 65-73.

[10] 何中市,杨晓帆. 线图连通度的界[J]. 重庆大学学报(自然科学版),1995,18(5): 90-94.

[11] MARTIN KNOR. Connectivity of Iterated Line Graphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 2003,(125):255-266.

Connectivities of Line Graphs Over Multigraphs

TIAN Yu-fang[1], *HE Zhong-shi*[2]

(1. College of Mathematics and Physics; 2. College of Computer Science, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

Abstract: The previous concept of line graph is generalized, and the concept of line graph over multigraph is proposed. The line graph of a multigraph G, $L(G)$, is defined to be a graph whose vertices are the edges in G, and there are exactly m edges between two vertices of $L(G)$ if and only if they have exactly m common vertices in G. Both lower bounds and upper bounds are obtained. Furthermore, a sharp lower bound of the connectivities of $L(G)$ is given as follows: For a p-vertex μ-multiple multigraph G, let $\kappa_L(G)$ and $\delta_L(G)$ denote the connectivity and the minimum degree of $L(G)$, respectively. If the minimum degree $\delta(G) \geqslant \mu(\lfloor p/2 \rfloor + 1)$, then $\kappa_L(G) \geqslant \delta_L(G) - 2(\mu - 1)$. It is shown that the lower bound is best possible. It improves the results on the subject.

Key words: connectivity of graph; conditional edge-connectivity; line graph; multigraph

(编辑 张小强)