文章编号:1000 - 582X(2005)01 - 0147 - 02

一类非线性广义 Burgers 方程转向点问题*

王　庚

(南京财经大学 应用数学系,江苏 南京　210003)

摘　要:讨论了一类二阶非线性广义 Burgers 方程形如 $\varepsilon \frac{d^2x}{dt^2} + (A - Bx)\frac{dx}{dt} = 0, t \in (0,1)$ 的转向点问题(其中 ε 为正的小参数,A、B 为实数且 $B \neq 0$)。在适当的条件下,用一种较简便的方法研究了转向点的所处位置,以及问题解的渐近性态。

关键词:非线性方程;转向点;冲击层

中图分类号:O175.14　　**文献标识码**:A

笔者在文献[1 - 4]中讨论了椭圆型方程的转向点问题和非线性方程的奇摄动问题,在本文中将讨论一类非线性方程的转向点问题的一个典型的模型。转向点问题是当前国内外十分关注的研究对象。在所给的条件下,笔者用一种较简便的方法来讨论一类非线性方程的转向点问题的冲击层位置及其解的渐近性态。

考虑如下二阶非线性广义 Burgers 方程:

$$\varepsilon \frac{d^2x}{dt^2} + (A - Bx)\frac{dx}{dt} = 0, t \in (0,10) \qquad (1)$$

且边界条件满足

$$x(0) < \frac{A}{B} < x(1), B \neq 0 \qquad (2)$$

和 Rankine-Hugoniot 条件[5,7]:

$$x(0) + x(1) = \frac{2A}{B} \qquad (3)$$

其中 ε 为正的小参数,A、B 为实数且 $B \neq 0$。显然,在上述条件下,方程(1)在 $t \in (0,1)$ 上具有转向点。

由式(1)不难得到问题的唯一单调解:

$$x(t) = \frac{A}{B} + k\tanh\left(\frac{k}{2\varepsilon}(t - c)\right), 0 \leqslant t \leqslant 1 \qquad (4)$$

$$k = \sqrt{(A - Bx(0))^2 + 2B\varepsilon \dot{x}(0)}$$

且 $\dot{x}(t) > 0$,其中

$$x(0) = \frac{A}{B} + k\tanh\left(-\frac{kc}{2\varepsilon}\right),$$

$$x(1) = \frac{A}{B} + k\tanh\left(\frac{k(1 - c)}{2\varepsilon}\right) \qquad (5)$$

而 $\dot{x}(0)$,$\dot{x}(1)$ 可由满足条件(2)的边界值 $x(0)$、$x(1)$ 确定。

再由式(4),可知 $t = c$ 为转向点所在的位置,而转向点处的冲击层的厚度为 $O(\varepsilon)$。再由 Rankine-Hugoniot 条件得

$$\tanh\left(\frac{k}{2\varepsilon}c\right) = \tanh\left(\frac{k}{2\varepsilon}(1 - c)\right), \quad \text{故可得 } c = \frac{1}{2}。$$

即冲击层是在 $t = \frac{1}{2}$ 的邻域内发生。这与 Bohe 用非标准分析的方法所得出的推论一致[6-7]。

因 $\tanh\theta = 1 + O(e^{-2\theta})$,$\theta \to +\infty$,并考虑到(5),可得问题的解 $x(t)$ 具有如下的渐近表示式:

$$x(t) = \begin{cases} x(0) + O\left(\varepsilon\exp\left(-\frac{k}{\varepsilon}\left(t - \frac{1}{2}\right)\right)\right), 0 \leqslant t < \frac{1}{2}, 0 < \varepsilon << 1 \\ x(1) + O\left(\varepsilon\exp\left(-\frac{k}{\varepsilon}\left(t - \frac{1}{2}\right)\right)\right), \frac{1}{2}t \leqslant 1, 0 < \varepsilon << 1 \end{cases}$$

研究方程(1)的边界值不满足 Rankine-Hugoniot 条件的情形:

设边界值 $x(0)$ 和 $x(1)$ 满足:

$$x(0) = \frac{A}{B} - k_0, x(1) = \frac{A}{B} + k_0 1 - 2e^{\frac{a}{\varepsilon}}) \qquad (6)$$

其中 a 为正常数。显然满足式(6)的 $x(0)$ 和

* **收稿日期**:2004 - 09 - 17

基金项目:教育部"新世纪高等教育教学改革"项目(1283B01071)

作者简介:王庚(1960 -),男,安徽桐城人,南京财经大学教授。主研方向:非线性微分方程。

$x(1)$,一定不满足式(3)。

由式(4)和式(5)得

$$-k_0 = k\tanh\left(\frac{k(0-c)}{2\varepsilon}\right)$$

从而有 $k = k_0\coth\left(\frac{kc}{2\varepsilon}\right) \sim k_0(1+2e^{-\frac{kc}{\varepsilon}}+\Lambda)$, 即 $k \approx k_0$

又 $k_0(1-2e^{-\frac{a}{\varepsilon}}) = k\tanh\left(\frac{k(1-c)}{2\varepsilon}\right)$

于是

$$k_0(1-2e^{-\frac{a}{\varepsilon}}) = k_0\tanh\left(\frac{k_0}{2\varepsilon}(1-c)\right) \sim k_0(1-2e^{-\frac{k_0}{\varepsilon}(1-c)}+\Lambda)$$

故 $\frac{a}{\varepsilon} = \frac{k_0(1-c)}{\varepsilon}$ 所以应有 $a = k_0(1-c)$

由此可知

$$c = 1 - \frac{a}{k_0} \tag{7}$$

由式(7)得出结论:

当 $0 < a < \frac{k_0}{2}$ 时, $0 < c < 1$。这说明边值问题解的冲击层在 $t=1$ 到 $t=0$ 之间出现。又由式(6)知

$$x(0) + x(1) = \frac{2A}{B} + O\left(\exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)\right), 0 < \varepsilon << 1 \tag{8}$$

由式(8)知,边界值 $x(0)$ 和 $x(1)$ 不满足 Rankine-Hugoniot 条件,式(6)只是渐近地小。然而,当常数 a 从 0 变到 $\frac{k_0}{2}$ 时,冲击层的位置从 $t=1$ 移到 $t=0$。

当 $a > \frac{k_0}{2}$ 时,即 $c < 0$。这说明,即使边界值 $x(0)$ 和 $x(1)$ 不满足 Rankine-Hugoniot 条件,式(6)只是渐近地小,但在这种情况下冲击层也不可能在区间(0,1)内出现。

参考文献:

[1] 王庚. 具有转向点曲线的椭圆型方程边值问题奇摄动[J]. 数学杂志,2002,21(2):233-236.

[2] 王庚. 一类具有转向点超曲面的椭圆方程边值问题的奇摄动[J]. 兰州大学学报, 2001,37(2):29-33.

[3] 王 庚 . A Class of of Singularly Perturbed Boundary Value Problems for Elliptic Equation with A Super Surface of Turning Point in n-Dimensional Space[J]. 数学季刊, 2002,17(1):41-45.

[4] 王庚. 一类拟线性椭圆型方程 Robin 边值问题(英文)[J]. 兰州大学学报, 2003,38(3):5-9.

[5] DE JAGER E M, JIANG FURU. The Theory of Singular Perturbation [M]. Amsterdam: North-Holland Publishing Co, 1996.

[6] O'MALLEY, JR R E. On the Asymptotic Solution of the Singularly Perturbed Boundary Value Problems Posed by Boh [J], J Math Anal Appl, 2000, 242:18-38.

[7] DIENER F DIENER M. Nonstandard Analysis in Practice [M]. Berlin: Springer-Verlag,1995.

A Class of Nonlinear Burgers Equation Turning Point Problem

WANG Geng

(Nanjing University of Finance and Economics, Nanjing 210003, China)

Abstract: A turning point problem on nonlinear equation of the form $\varepsilon\frac{d^2x}{dt} + (A-Bx)\frac{dx}{dt} = 0, t \in (0,1)$ is considered. Under suitable conditions and using a simple and special method, the location of turning point and the asymptotic behavior of the solution for the original boundary value problems are studied.

Key words: nonlinear equation; turning point; shock layer.

(编辑 吕赛英)