文章编号:1000 - 582X(2005)06 - 0129 - 04

具有随机特征的风险投资组合问题分析*

蒲兴成[1,2],黄席樾[2],汪纪锋[1]

(1. 重庆邮电学院 计算机学院;重庆　400065; 2. 重庆大学 自动化学院;重庆　400030)

摘　要:利用随机微分方程理论,对一类具有随机特征的风险投资组合问题进行深入研究. 通过选择适当的效用函数,在假设最优投资组合方案存在的情况下,结合随机最优控制中的 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程,建立相应的拉格朗日函数,得到具有随机特征的风险投资组合问题最优投资策略的一个定量结果. 并在定量研究的基础上进行定性分析,得到与风险投资理论相吻合的结论.

关键词:随机微分方程; 风险投资组合; 最优投资; Hamilton-Jacobi-Bellman 方程;拉格朗日函数

中图分类号:F224. 11　　　　**文献标识码**:A

利用随机过程理论研究风险投资问题最初在文献[1]中提出,该文献[1]建立了风险投资模型:$X_t = x + ut + \sigma w_t, t \geqslant 0$,其中 x 表示在时刻 $t = 0$ 时的资产价格,u 表示漂移,σ 表示风险,w_t 是一个标准的一维布朗运动,X_t 表示资产在时刻 t 的价格. 文献[2]则考虑指数形式的风险投资模型:$X_t = x e^{\sigma w_t + (u - \frac{\sigma^2}{2})t}, t \geqslant 0$,其它假设如文献[1]. 利用随机微分方程理论,不难得到文献[1]和文献[2]中关于 X_t 相应的随机微分方程: $dX_t = u dt + \sigma dw_t$ 和 $dX_t = X_t u dt + \sigma X_t dw_t$. 文献[3]则以由文献[2]中得到关于 X_t 相应的随机微分方程为基础,利用随机分析中的伊藤公式和无风险投资理论,得到 Black-Scholes 偏微分方程,利用该方程,结合欧式看涨期权和看跌期权相应的边界条件,然后由求解偏微分方程的 Feynman-Kac 公式得到著名的 Black-Scholes 公式,从而奠定了金融工程的理论基础. 金融工程中,风险投资组合问题是一个热点问题,在一个风险投资组合问题中,如何确定最佳投资组合,以实现收益的最大化,则是投资组合问题的一个难点. 笔者在文献[4]研究的基础上,讨论一类风险投资组合问题的资金流最佳分配,在假设资金流最佳分配方案存在的情况下,将每一种可能的投资看作一个随机过程,再利用随机控制理论中最优控制存在的必要条件,即 HJB(Hamilton-Jacobi-Bellman)方程,得到资金流最佳分配方案存在的一个定量结果,并在该定量结果下进行定性分析,得到与风险投资理论相一致的结论,从而也说明了该方法的实用性.

1　风险投资组合模型

1. 1　二元风险投资模型

在文献[4]的基础上考虑如下风险投资组合问题:假设在一完备市场中,以 X_t 表示投资者在时刻拥有的资产,该时刻投资者有 2 种风险投资方案可选择,一种风险投资的单位价格满足随机微分方程:

$$dp_1 = a_1 p_1 dt = \sigma_1 p_2 dw_1(t). \tag{1}$$

另一种风险投资的单位价格满足随机微分方程:

$$dp_2 = a_2 p_2 dt + \sigma_2 p_2 dw_2(t), \tag{2}$$

其中 $a_1 > a_2 > 0, \sigma_1 > \sigma_2 > 0$ 且 $w_1(t), w_2(t)$ 是相互独立的一维标准布朗运动.

假设以 $uX_t (0 \leqslant u \leqslant 1)$ 用于满足方程(1)的风险投资,以 $(1 - u)X_t$ 用于满足方程(2)的风险投资,为说明问题起见,选择效用函数:

$$\Phi(s,x) = \sup_u \{E^{s,x}[\log(X_T^{(u)})]\}, \tag{3}$$

此处 $T = \min(t_1, \tau_0), \tau_0 = \inf\{t > s; X_t = 0\}$,$t_1$ 为将来的某一确定时刻,方程(1)(2)的系数满足随机微分方程的解的存在性条件. 相应的问题是:如何确定 u 使式(3)在确定的时刻 T 取得最大值,即投资收益最大.

* 收稿日期:2005 - 01 - 05
基金项目:重庆市科技计划资助项目(CSTC,2004BB2165);重庆邮电学院青年基金资助项目($A_{2004-20}$)
作者简介:蒲兴成(1973 -),湖南洞口人,重庆邮电学院讲师,重庆大学博士研究生,主要研究方向为随机控制与混沌控制.

说明 1:由上述假设知当 $a_1>a_2>0$ 有 $\sigma_1>\sigma_2>0$,这表明在风险投资中,风险越大,则相应的期望收益也越大,这符合投资者的投资心理.

说明 2:下面讨论是在上述风险投资中最优存在的情况下进行的,这样假设的目的是为了利用 HJBE(Ⅰ)(Hamilton-Jacobi-Bellman 方程(Ⅰ)),因为 HJBE(Ⅰ)的结论是在最优控制存在的条件下得到的.

说明 3:效用函数的选择一般只需满足单增凹即可,在式(3)中也可选择 $\Phi(s,x)=\sup\limits_u[E^{s,x}(X_T^{(u)})^r]$,此时可得相同的定性结论,但得到的定量结果相对来说要复杂一些,并且定量结果随效用函数的变化而变化.

1.2 多元风险投资模型

假设在一完备市场中,同样以 X_t 表示投资者在时刻 t 拥有的资产,该时刻投资者有 n 种投资方案可选择,每一种投资的单位价格遵循如下的随机微分方程:

$$\mathrm{d}p_i=a_ip_i\mathrm{d}t+\sigma_ip_i\mathrm{d}w_i(t),(i=1,2,\cdots,n),\tag{4}$$

其中 $a_i>0,\sigma_i>0(i=1,2,\cdots,n),w_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$是相互独立的一维标准布朗运动,且式(4)相应的随机微分方程都有解. 现以 $u_iX_t(i=1,2,\cdots,3)$ $(\sum\limits_{i=1}^n u_i=1)$表示用于满足式(4)中的第 $i(i=1,2,\cdots,n)$个方程的风险投资. 选择类似式(3)的效用函数:$\Phi(s,x)=\sup\limits_u E^{s,x}[\log(X_T^{(u)})]$,$T$ 为某一确定时刻,相关问题是如何确定 $u_i(i=1,2,\cdots,n)$使上述效用函数在确定时刻 T 取得最大值.

同样,下面讨论都是在假设最优投资策略存在的情况下讨论,因为只有这样,才符合 HJBE(Ⅰ)成立所必需的条件.

2 主要结果

定理 1 若 1.1 中的风险投资组合问题的最优 u^* 存在,则 $u^*=\dfrac{a_1-a_2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$.

证明 由式(1)有:

$$\mathrm{d}(uX_t)=a_1uX_t\mathrm{d}t+\sigma_1uX_t\mathrm{d}w_1(t),\tag{5}$$

由式(2)有:

$$\mathrm{d}[(1-u)X_t]=a_2(1-u)X_t\mathrm{d}t+\sigma_2(1-u)X_t\mathrm{d}w_2(t),\tag{6}$$

由式(5)、(6)即得:

$$\mathrm{d}X_t=[a_1uX_t+a_2(1-u)X_t]\mathrm{d}t+\sigma_1uX_t\mathrm{d}w_1(t)+\sigma_2(1-u)X_t\mathrm{d}w_2(t),\tag{7}$$

故式(7)的微分算子[5]为:

$$(\mathrm{L}^vf)(x)=\frac{\partial f}{\partial s}f(x)+\sum_{i=1}^2 b_i(x,v)\frac{\partial f}{\partial x_i}+\sum_{i,j=1}^2 a_{i,j}(x,v)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=a_1vx\frac{\partial f}{\partial x_1}+a_2(1-v)x\frac{\partial f}{\partial x_2}+\frac{1}{2}\sigma_1^2v^2x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\frac{1}{2}\sigma_2^2(1-v)^2x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2},\tag{8}$$

其中 $x_1=vx,x_2=(1-u)x$,由于最优控制 u^* 存在,则相应的 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程变成:

$$\sup_v\{(\mathrm{L}^v\Phi)(t,x)\}=0,\tag{9}$$

此处(t,x)符合相应的假设条件[5]. 将 $\Phi(t,x)=\log x=\log(x_1+x_2)$代入(8)中有:

$$\eta(v)=\mathrm{L}^v\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial t}+a_1vx\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}+a_2(1-v)x\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}+\frac{1}{2}\sigma_1^2v^2x^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}+\frac{1}{2}\sigma_2^2(1-v)^2x^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2}=a_1v+a_2(1-v)-\frac{1}{2}\sigma_1^2v^2-\frac{1}{2}\sigma_2^2(1-v)^2,$$

则相关的问题变成寻找 v 使 $\eta(v)=a_1v+a_2(1-v)-\frac{1}{2}\sigma_1^2v^2-\frac{1}{2}\sigma_1^2(1-v)^2$ 取得最大值.

由$\dfrac{\partial\eta(v)}{\partial v}=0$ 得:$a_1-a_2-\sigma_1^2v+\sigma_2^2(1-v)=0$

所以

$$u^*=\frac{a_1-a_2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}.\tag{10}$$

说明 4:由 u^* 的表达式即知,u^* 是关于 a_1 单增、a_2 单减的函数,且在 $\sigma_2=0$ 时,得出文献[4]相同的结论. 因此不难得到定理 2.

定理 2 在风险投资中,投资分额是关于预期收益的单增函数.

说明 5:该结论也符合人们的投资行为,即只有在较大投资偏好的支配下,才有较大的投资行为发生. 与定理 2 不同的是,人们在投资中总希望减少自己投资所带来的风险,即风险厌恶投资行为,下面的定理也得到了这一定性结果.

定理 3 在风险投资中,投资分额是关于相应风险的单减函数,是关于其它风险的单增函数.

证明 由$\dfrac{\partial u^*}{\partial\sigma_1}=-\dfrac{(a_1-a_2+\sigma_2^2)\cdot 2\sigma_1}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2}<0$ 及

$$\frac{\partial u^*}{\partial\sigma_2}=\frac{2\sigma_2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)-2\sigma_2(a_1-a_2+\sigma_2^2)}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2}=\frac{2\sigma_2(\sigma_1^2-a_1+a_2)}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2}=\frac{2\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}(1-u^*)>0,$$

故 u^* 是关于 σ_1 的单减、σ_2 的单增函数,因而结论成立.

定理 4　$\lim_{\sigma_1\to\infty} u^* = 0, \lim_{\sigma_2\to\infty} u^* = 1$.

证明　由定理 1 中得到 u^* 的表达式即知结论显然成立.

说明 6:定理 4 是对定理 3 结论的进一步加强,定理 4 表明,在二元风险投资中,若一种投资的风险变得相当大,则对应的投资行为几乎不能发生;反之,若另一种投资的风险变得相当大,在其它因素不变情况下,则投资行为几乎都发生在风险不变的投资上. 下面在定理 1 的基础上,研究 1.2 中多元投资问题,在假设最优投资策略存在的情况下,同样得到一个定量结果.

定理 5　若 1.2 中 $n\geqslant 3$ 元风险投资组合的最优 $u^* = (u_1^*, u_2^*, \cdots, n)$ 存在,则

$$u_i^* = \frac{\sum_{k=1,k\neq i}^{n}\left[(a_i - a_k)\prod_{j=1,j\neq k,i}^{n}\sigma_j^2\right] + \prod_{j=1,j\neq i}^{n}\sigma_j^2}{\sum_{m=1}^{n}\left(b_m\prod_{j=1,j\neq m}^{n}\sigma_j^2\right)},$$

$(i = 1,2,\cdots,n)$,其中 $b_m = 1(m = 1,2,\cdots,n)$.

证明　类似定理 1 的证明,记 $X_t = u_i X_i (i = 1,2,\cdots,n)$, $\sum_{i=1}^{n} u_i = 1, 0 \leqslant u_i \leqslant 1 (i = 1,2,\cdots,n)$. 由式(4)有:

$$\mathrm{d}X_t = \sum_{i=1}^{n}(u_i X_t)\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n}(\sigma_i u_i X_t)\mathrm{d}w_i(t). \quad (11)$$

再由文献[6]得式(11)的微分算子为:

$$(\mathrm{L}^v f)(x) = \frac{\partial f}{\partial s}f(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,v)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,v)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\sigma_i x_i)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}. \quad (12)$$

将 $f = \log x = \log(x_1 + x_2 + \cdots + x_n), x_i = u_i x (i = 1,2,\cdots,n)$ 代入式(12)有:

$$(\mathrm{L}^v f)(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} = [(\sigma_i u_i)^2], \quad (13)$$

则相应的问题变成在限制条件 $\sum_{i=1}^{n} u_i = 1$ 下求函数 $(\mathrm{L}^v f)(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[(\sigma_i u_i)^2]$ 的最大值. 由 $\sum_{i=1}^{n} u_i = 1$ 及式(13)得相应的拉格朗日函数为:

$$\mathrm{L}(u_1, u_2, \cdots, u_n; \lambda) = \sum_{i=1}^{n}(a_i u_i) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[(\sigma_i u_i)^2] + \lambda\left(1 - \sum_{i=1}^{n} u_i\right), \quad (14)$$

据式(14)得: $\frac{\partial L(u_1, u_2, \cdots, u_n; \lambda)}{\partial u_i} = a_i - \sigma_i^2 u_i - \lambda = 0 (i = 1,2,\cdots,n)$,即 $u_i = \frac{a_i - \lambda}{\sigma_i^2}(i = 1,2,\cdots,n)$. 将 $u_i = \frac{a_i - \lambda}{\sigma_i^2}(i = 1,2,\cdots,n)$ 代入 $\sum_{i=1}^{n} u_i = 1$ 中有: $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i - \lambda}{\sigma_i^2} = 1$,由此求得:

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(a_i \prod_{j=1,j\neq i}^{n}\sigma_j^2\right) - \prod_{j=1}^{n}\sigma_j^2}{\sum_{m=1}^{n}\left(b_m \prod_{j=1,j\neq m}^{n}\sigma_j^2\right)},$$

$$b_m = 1(m = 1,2,\cdots,n). \quad (15)$$

将式(15)中求得的 λ 代入 $u_i = \frac{a_i - \lambda}{\sigma_i^2}(i = 1,2,\cdots,n)$ 中再整理有:

$$u_i^* = \frac{\sum_{k=1,k\neq i}^{n}\left[(a_i - a_k)\prod_{j=1,j\neq k,i}^{n}\sigma_j^2\right] + \prod_{j=1,j\neq i}^{n}\sigma_j^2}{\sum_{m=1}^{n}\left(b_m \prod_{j=1,j\neq m}^{n}\sigma_j^2\right)},$$

$$(i = 1,2,\cdots,n),$$

其中 $b_m = 1(m = 1,2,\cdots,n)$,即结论成立.

说明 7　定理 4 表明,若多元最优投资策略存在,利用 HJBE 和相应的拉格朗日函数,就能得到该最优投资策略的一个定量结果,这在最优投资理论中具有一定的理论价值. 在多元情况,即 $n\geqslant 3$ 时,与定理 4 类似的结论为:

定理 4'　当 $n\geqslant 3$ 时有:

1) $\lim_{\sigma_i\to\infty} u_i^* = 0, (i = 1,2,\cdots,n)$;

2) $\lim_{\sigma_j\to\infty (j\neq i; j = 1,2,\cdots,n)} u_i^* = 1$;

3) $\lim_{\sigma_s\to\infty, s\neq i} u_i^* = \frac{\sum_{k=1,k\neq i,s}^{n}\left[(a_i - a_k)\prod_{j=1,j\neq k,i,s}^{n}\sigma_j^2\right] + \prod_{j=1,j\neq i,s}^{n}\sigma_j^2}{\sum_{m=1}^{n}\left(b_m \prod_{j=1,j\neq m,s}^{n}\sigma_j^2\right)}$,

$(i = 1,2,\cdots,n)$.

证明　由定理 5 的结果易证上述结论成立.

3　应用举例

例 1　若在一完备无套利市场中,2 种金融资产的价格分别服从如下随机微分方程:

$$\mathrm{d}p_1 = a_1 p_1 \mathrm{d}t + \sigma_1 p_2 \mathrm{d}w_1(t) \text{ 与}$$
$$\mathrm{d}p_2 = a_2 p_2 \mathrm{d}t + \sigma_2 p_2 \mathrm{d}w_2(t),$$

其中 $a_1 = 0.1, a_2 = 0.05, \sigma_1 = 0.5, \sigma_2 = 0.4$. $w_1(t), w_2(t)$ 是相互独立一维标准布朗运动,效用函数为 $N(x) = \log x$,则由定理 1 有 $u^* = \frac{a_1 - a_2 + \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \frac{0.1 - 0.05 + 0.4^2}{0.5^2 + 0.4^2} = 0.5$.

4 结束语

以随机微分方程理论为基础,结合随机最优控制理论中的 HJBE(I),讨论了一类具有随机特征的风险投资组合问题的资金最优分配,在假设最优分配方案存在的条件下,选择适当的效用函数,得到了相关的定量结果,并在定量结果下进行定性分析,得到与风险投资理论一致的结论. 该结论都是在假设最优分配方案存在的条件下讨论的,而在何种情况下最优分配方案的存在是另一个值得研究的课题.

参考文献:

[1] BACHELIER L. Théorie de la Speculation[J]. Ann Sci Ecole Norm Sup, 1900,(17):21 -86.

[2] BENES V E, SHEPP L A, WITSENHAUSEN H S. Some Solvable Stochastic Control Problems [J]. Stochastics, 1980, (4):39 -83.

[3] BLACK F, SCHOLES M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities [J]. Journal of Political Economy, 1973, 81(3):635 -654.

[4] 蒲兴成,王海英. Hamilton-Jacobi-Bellman-方程在最优投资中的应用[J]. 重庆大学学报(自然科学版),2003, 26(12):119 -121.

[5] DAMIEN LAMBERTON,LAPEYRE. Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance [M]. London : Chapman & Hall. 1996.

[6] BERNT & KSENDAL. Stochastic Differential Equations an Introduction with Application [M]. 5th ed. New York: Springer,1998.

Research on a Risk Investment Portfolio with Stochastic Character

PU Xing-cheng[1,2], *HUANG Xi-yue*[2], *WANG Ji-feng*[1]

(1. Computer Department, University of Chongqing Post and Telecommunication, Chongqing 400065,China;
2. College of Automation, Chongqing University, Chongqing 400030,China)

Abstract: With the theory of stochastic differential equation, the authors discuss a problem of a class of risk investment portfolio with stochastic character. With the selection of appropriate utility function and combines the Hamilton-Jacobi-Bellman equation, under the assumption that an optimal portfolio exists, and by using the Homologous Lagrangian function, some quantitative results of this risk optimal investment portfolio are given. With these quantitative results, some qualitative results are got. These results concord with the results of the theory of risk investment.

Key words: stochastic differential equation; risk investment portfolio; optimal-investment; Hamilton-Jacobi-Bellman equation; lagrangian function

(编辑 张 苹)