2005 年 9 月 重庆大学学报(自然科学版) Sep. 2005
第 28 卷第 9 期 Journal of Chongqing University(Natural Science Edition) Vol. 28 No. 9

文章编号:1000 - 582X(2005)09 - 0068 - 03

基于鲁棒分析的一类随机系统的保性能控制*

蒲兴成[1,2],汪纪锋[3],尹帮勇[1],杨春德[1]
(1. 重庆邮电学院 计算机学院,重庆 400065; 2. 重庆大学 自动化学院,重庆 400030;
3. 重庆邮电学院 通信学院,重庆 400065)

摘 要:在不确定线性系统保性能控制研究的基础上,对成本控制矩阵不确定随机二次控制问题进行了研究,给出了一类线性随机系统及相应系数不确定线性随机系统保性能控制的定义,并利用伊藤公式和 LMI(线性矩阵不等式)方法,在其满足均方稳定的条件下,得到了相应线性随机系统的保性能控制律的存在条件,即若线性随机系统均方稳定,则其相应的保性能控制律存在. 最后将最优保成本控制律的设计转化为一个凸优化问题,即求解一个线性矩阵不等式问题.

关键词:随机系统;鲁棒性;保性能控制;线性矩阵不等式
中图分类号:TP273 **文献标识码**:A

由于受控制成本和精确度的影响,精确的系统动态模型的建立往往是难以达到的,故不确定系统的研究越来越引起人们的注意,并得到深入研究. 不确定系统的保性能控制最初是在文献[1]中提出的,其主要目的是设计一个控制器不仅满足系统具有鲁棒稳定性,且性能指标值有一个确定的上界. 由于保成本控制在工程中有许多实际意义,因此得到广泛的关注,文献[4-7]中已得到很多重要结果. 文献[2]利用文献[3]的研究方法,讨论了不确定奇异时滞系统的保性能控制,得到相应保性能控制器的存在条件和设计方法. 然而关于随机系统的保性能控制,甚至线性随机系统都很少提及. 为此,在文献[1-12]研究的基础上,对线性随机系统的保性能控制进行初步讨论,先给出了线性随机系统保性能控制的定义,再利用随机分析理论和现代控制方法去探讨线性随机系统的保性能控制器存在条件和设计方法.

1 问题描述

考虑由以下状态方程描述的一类线性随机系统:

$$\begin{cases} dx(t) = [\boldsymbol{A}x(t) + \boldsymbol{B}u(t)]dt + [\boldsymbol{C}x(t) + \boldsymbol{D}u(t)]dw(t) \\ x(0) = x_0 \in R^n \end{cases}, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 是具有适当维数的确定矩阵 $w(t)$. 是具有适当维数的标准布朗运动,对系统(1),定义一个性能指标:

$$J = E\int_0^{\infty}[\boldsymbol{x}(s)'\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(s) + \boldsymbol{u}^T(s)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(s)]ds, \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 是给定的正定对称矩阵. 值得注意的是,文献[7]指出,与确定性线性二次控制问题不同的是,在确定性问题中,一般假设成本控制矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 是正定的,若是负定的,则有控制量(范数)“越大越好”这一显著结论,而在上述随机控制问题中,这一结论将不再成立,从而导致了成本控制矩阵不确定问题的研究. 关于该问题的研究,文献[7,10-12]中已有一些研究成果,但对该类系统的保性能控制方面的研究还很少提及,为此先给出如下两个定义.

定义 1 系统(1)称为均方能稳的,如果存在一个反馈控制 $\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{k}\boldsymbol{x}(t)$,使得 $\lim\limits_{t\to\infty}E\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}^T(t) = 0$.

定义 2 对系统(1)和性能指标(2),若存在一个控制律 $\boldsymbol{u}^*(t)$ 和一个正数 J^*,使得系统(1)均方稳定,且性能指标值满足:$J \leqslant J^*$,则 J^* 称为系统(1)的一个性能上界,$\boldsymbol{u}^*(t)$ 称为系统(1)的一个保性能控制律.

从已有的研究结果易知随机线性二次控制问题最终可转化为如下 SARE(3)的求解问题.

$$A^TP + PA + C^TPC + Q - (PB + C^TPD)(R + D^TPD)^{-1}(B^TP + D^TPC) = 0, R + D^TPD > 0\,. \tag{3}$$

2 主要结果

定理 1 若 $\boldsymbol{P}$ 是系统(1)相应的 SARE(随机代数里卡提方程)(3)的一个反馈镇定正解. 则 $\boldsymbol{u}(t) =$

* **收稿日期**:2005 - 04 - 05
基金项目:重庆市科技计划资助项目(CSTC,2004BB2165)及重庆邮电学院青年基金资助项目($A_{2004-20}$)

作者简介:蒲兴成(1973 -),男,湖南邵阳人,重庆邮电学院讲师,重庆大学博士研究生,主要从事混沌控制和随机控制方面的研究.

$\boldsymbol{kx}(t)=-(R+D^TPD)^{-1}(B^TP+D^TPC)\boldsymbol{x}(t)$ 是系统(1)的一个保性能控制律,相应的一个系统上界是 $J^*=\boldsymbol{x}_0^TP\boldsymbol{x}_0$.

证明:由文献[10]和[11]知,当 SARE(3)反馈镇定正解存在时,系统(1)均方稳定. 对 $\boldsymbol{x}^T(t)P\boldsymbol{x}(t)$ 运用伊藤公式[13],两边积分后取数学期望有:

$$E[\boldsymbol{x}^T(t)P\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}_0^TP\boldsymbol{x}_0]=E\int_0^t\boldsymbol{x}^T(s)(A^TP+PA+C^TPC)\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s+E\int_0^t[2\boldsymbol{u}^T(B^TP+D^TPC)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}^TD^TPD\boldsymbol{u}]\mathrm{d}s,\tag{4}$$

利用配方法有:

$$\begin{aligned}&E\int_0^t[\boldsymbol{x}^T(s)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(s)+\boldsymbol{u}^T(s)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(s)]\mathrm{d}s=\\&-E\int_0^t\boldsymbol{x}^T(s)[(A+BK)^TP+P(A+Bk)+\\&(C+D\boldsymbol{k})^TP(C+D\boldsymbol{k})]x(s)\mathrm{d}s=\\&\boldsymbol{x}_0^TP\boldsymbol{x}_0-E[\boldsymbol{x}^T(t)P\boldsymbol{x}(t)]+\\&E\int_0^t[\boldsymbol{u}-\boldsymbol{kx}]^T(R+D^TPD)[\boldsymbol{u}-\boldsymbol{kx}]\mathrm{d}s,\end{aligned}\tag{5}$$

其中 $k=-(R+D^TPD)^{-1}(B^TP+D^TPC)$. 再将 $\boldsymbol{u}(s)=\boldsymbol{kx}(s)$ 代入(5)式有:

$$E\int_0^\infty[\boldsymbol{x}^T(s)Q\boldsymbol{x}(s)+\boldsymbol{u}^T(s)R\boldsymbol{u}(s)]\mathrm{d}s=\boldsymbol{x}_0^TP\boldsymbol{x}_0-\lim_{t\to\infty}E[\boldsymbol{x}^T(t)P\boldsymbol{x}(t)].$$

又系统(1)均方稳定,P 正定,从而 $\lim\limits_{t\to\infty}E[\boldsymbol{x}^T(t)P\boldsymbol{x}(t)]=0$,即 $E\int_0^\infty[\boldsymbol{x}^T(s)Q\boldsymbol{x}(s)+\boldsymbol{u}^T(s)R\boldsymbol{u}(s)]\mathrm{d}s=\boldsymbol{x}_0^TP\boldsymbol{x}_0$.

据(4),取 $\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{kx}(t)=-(R+D^TPD)^{-1}(B^TP+D^TPC)\boldsymbol{x}(t)$,再由 P 正定显然有:

$$E\int_0^\infty[\boldsymbol{x}^T(s)Q\boldsymbol{x}(s)+\boldsymbol{u}^T(s)R\boldsymbol{u}(s)]\mathrm{d}s\leqslant\boldsymbol{x}_0^TP\boldsymbol{x}_0.$$

根据定义 2, $\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{kx}(t)=-(R+D^TPD)^{-1}(B^TP+D^TPC)\boldsymbol{x}(t)$ 是系统(1)的一个保性能控制律,且 $J^*=\boldsymbol{x}_0^TP\boldsymbol{x}_0$ 是相应性能指标的一个上界.

注 1:定理 1 表明,对于已知的随机系统(1)和给定的性能指标(2),系统(1)的保性能控制律存在的一个充分条件为系统(1)均方稳定,基于此,很容易将定理 1 的结论推广到系统(1)的系数不确定的情形.

定理 2 对于已知系统:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)=&[(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}(t)+(\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{B})\boldsymbol{u}(t)]\mathrm{d}t+\\&[\boldsymbol{Cx}(t)+\boldsymbol{Du}(t)]\mathrm{d}w(t),\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0,\end{aligned}\tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D},\boldsymbol{E},\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2$ 是具有适当维数的矩阵,$\boldsymbol{w}(t)$ 是具有适当维数的标准布朗运动,$(\Delta\boldsymbol{A},\Delta\boldsymbol{B})=\boldsymbol{E}F(\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2)$,且 $F^TF\leqslant I$,若存在正定对称矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和控制增益 K 及某一个实数 $\varepsilon>0$,满足:

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}K)^T\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}K)+\varepsilon^{-1}\boldsymbol{PE}(\boldsymbol{PE})^T+\varepsilon(\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2K)^T(\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2K)+(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}K)^T\boldsymbol{P}(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}K)<0,\tag{7}$$

则是系统(6)的一个保性能控制律.

证明:由文献[15],当式(7)成立时,系统(6)均方稳定. 再由定理 1,当系统(6)均方稳定时,其保性能控制律必存在,且 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{kx}(t)$ 是系统(6)的一个保性能控制律,从而定理得证.

注 2:定理 1、2 表明若随机系统(1)和参数不确定随机系统(6)的均方反馈控制器存在,则该控制器也是性能指标(2)下的一个保性能控制器.

仿照定理 1 的证明容易得到如下的定理 3.

定理 3 设 $[A,C|Q]$ 是精确能观的,$(A,B;C,D)$ 是能稳的,则 SARE(3)有最大解 $P^*>0$,且 $\boldsymbol{k}=-(R+D^TP^*D)^{-1}(B^TP^*+D^TP^*C)$ 是系统(1)的一个保性能控制器,此时 $\boldsymbol{x}_0^TP^*\boldsymbol{x}_0$ 是系统(2)的一个性能上界.

定理 4 若 P^* 是 SARE(3)的一个最大定解,则系统(1)在积分限制条件(2)下的唯一最优保性能控制器为:

$$\boldsymbol{u}^*(t)=-(R+D^TP^*D)^{-1}(B^TP^*+D^TP^*C)\boldsymbol{x}(t).\tag{8}$$

证明:由文献[10],SARE(3)正解的存在性与系统(1)均方稳定是等价的,所以结论成立.

定理 5 若 $P^*>0$ 是凸优化问题:max $Tr(P)$;

$$\text{subject to}\begin{cases}\begin{bmatrix}A^TP+PA+C^TPC & PB+C^TPD\\ B^TP+D^TPC & R+D^TPD\end{bmatrix}\geqslant 0\\ R+D^TPD>0\end{cases}$$

的最优解. 则系统(1)均方稳定,且 $\boldsymbol{u}^*(t)=-(R+D^TP^*D)^{-1}(B^TP^*+D^TP^*C)\boldsymbol{x}(t)$ 是系统(1)在积分限制条件(2)下的唯一最优保性能控制器.

证明略.

注 3:定理 5 将线性保成本控制问题转化成了一个凸优化问题.

注 4:在文献[11]中利用半定规划方法及相应的 LMI 和文献[14]利用 BSDE(倒向随机微分方程)得到的最优控制律也是一个保性能控制器.

3 结束语

笔者讨论了一类线性随机系统的保性能控制问题,给出了该类线性随机系统的保性能控制的定义,利用伊藤公式和矩阵不等式的相关知识得到其保性能控制器存在的充分条件,从而得到了该类线性随机系统及系数不确定时系统的保性能控制器的设计方法. 值得注意的是,对线性随机系统的保性能控制的研究在此还是做初步探讨(假设 $Q\geqslant0,P>0$). 相关问题,如 Q 和 R 不定情况下保性能控制器的存在条件和设计方法有待进一步完善. 另外由于线性随机二次控制问题的研究,最终归结为相应 SARE 的解的存在和解的数字解法方面的探讨. 但到目前为止,由于随机控制和非

线性矩阵方面的理论还不完善,对成本矩阵不确定的 SLQR 问题的研究还处于初步探讨阶段,甚至在标准情况下($R>0,Q\geqslant 0$),相应的 SARE 的解的存在和唯一性还未获得完全解决,这是另一个值得深入研究的问题.

参考文献:

[1] CHANG S S L,PENG T K C. Adaptive Guaranteed Cost Control of Systems with Uncertain Parametets[J]. IEEE Trans. Autom. Control,1972,AC-17(4):474-483.

[2] 冯俊娥,程兆林. 不确定奇异时滞系统的保性能控制[J]. 控制与决策,2002,17(增刊):712-714.

[3] YU L,CHU J. An LMI Approach to Guaranteed Cost Control of Linear Uncertain Time-delay Systems [J]. Automatic, 1999,35(6):1 155-1 159.

[4] 俞立,王景成,诸健. 不确定离散动态系统的保成本控制[J]. 自动化学报,1998,24(5):414-417.

[5] KOSMIDOU O I. Robust Stability and Performance of Systems with Structured and Bounded Uncertainties: an Extension of the Guaranteed Cost Control Approach[J]. Int Control, 1990,52(3): 627-640.

[6] BERNSTEIN D S,HADDAD W M. Robust Stability and Performance Anlyasis for State-srace Systems Via Quadratic Lyapunov Bounds [J]. SIAM. Matrix Anal, 1990, 11 (2): 239-271.

[7] CHEN SHU-PING, LI XUN-JIN, ZHOU XUN-YU. Stochastic Linear Quadratic Regulators with Indefinite Control Weight Costs[J]. SIAM Contr Optim, 1998,36: 1 685-1 702.

[8] 郑飞其,冯昭枢,刘永清. 时不变伊藤型随机系统均方稳定的充要条件[J]. 自动化学报,1996,22(4):510-512.

[9] 吴淮宁,谢凯年,尤昌德. 随机系统的鲁棒状态反馈控制[J]. 信息与控制,1998,27(1):1-5.

[10] 张维海. 广义代数 Riccati 方程和最优调节器的研究[J]. 控制理论与应用,2003, 20(4):637-640.

[11] MUSTAPHA AIT RAMI, ZHOU XUN-Yu. Linear Matrix Inequalities,Riccati Equations,and Indefinite Stochastic Linear Quadratic Controls[J]. IEEE Trans Automat Contr, 2000, 45(6):1 131-1 142.

[12] ANDDREW E B LIM, ZHOU XUN-YU. Stochastic Optimal LQR Control with Integral Quadratic Constraints and Indefinite Control weights[J]. IEEE Trans Automat Contr,1999, 44(7):1 359-1 369.

[13] [美]BERNT, KSENDAL. Stochastic Differential Equations An Introduction with Application[M]. New York: Springer,1998.48.

[14] WANG XIANG-RONG, GAO ZI-YOU, WU ZHEN. Forward-Backward Stochastic Differential Equation and the Linear Quadratic Stochastic Optimal Control[J]. Acta Automatica Sinica,2003, 29(1):32-37.

[15] 蒲兴成,汪纪锋,黄席樾. 一类不确定随机系统均方稳定的充要条件[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2005,30(1):31-33.

Guaranteed Cost Control of a Class of Linear Stochastic Systems on the Basis of Robust Analysis

PU Xing-cheng[1,2], *WANG Ji-feng*[3], *YING Bang-yong*[1], *YANG Chun-de*[1]

(1. Department of Computer Science, Chongqing Post and Telecommunication University, Chongqing 400065, China;
2. College of Automation, Chongqing University, Chongqing 400030, China;
3. Department of Communication, Chongqing Post and Telecommunication University, Chongqing 400065, China)

Abstract: This paper discusses the guaranteed cost control of a class of linear stochastic systems on the research of uncertain linear systems. The authors give the definition of this linear stochastic systems′guaranteed cost control, by using Ito formula and linear matrix inequality, combined its square-stability, under the supposition of the square stability of this kind of linear stochastic system, gets the accordingly guaranteed cost control condition. The conclusion is, if the linear stochastic system is square-stability, then its guaranteed cost control exists. Finally, the problem of designing a optimal guaranteed cost control can be turned into a convex optimal problem.

Key words: stochastic system; robust; the guaranteed cost control; linear matrix inequality

(编辑 吕赛英)