2006 年 11 月 重庆大学学报(自然科学版) Nov. 2006
第 29 卷第 11 期 Journal of Chongqing University(Natural Science Edition) Vol. 29 No. 11

文章编号:1000-582X(2006)11-0119-03

有限群的弱拟正规子群*

赵振华[1],肖志祥[2]

(1.重庆工学院 数理学院,重庆 400050;2.重庆大学 数理学院,重庆 400030)

摘 要:群 G 的一个子群 H 称为弱拟正规的,若对 G 的任意子群 K,至少存在一个 K 的共扼子群 K^x,$x \in G$,使得 $HK^x = K^xH$.研究了某些子群的弱拟正规性对群构造的影响,并得到了一些结果.

关键词:弱拟正规群;超可解群;Fitting 子群;群系

中图分类号:O152.1 **文献标识码**:A

1 引 言

本文讨论的群都是有限群,概念均如文献[1]中是标准的.通过研究某些子群的性质来得到群结构的信息一直是一个令人关注的课题.Buckley 在文献[2]中给出:如果一个奇阶有限群 G 的任一 Sylow 子群的极小子群在群 G 中正规,那么群 G 是超可解的.Srinivasan 在文献[3]中得到:如果有限群 G 的任一 Sylow 子群的极大子群在群 G 中正规,那么群 G 是超可解的.随后,许多学者通过减弱正规性或缩小极大与极小子群的数目来研究群的结构,譬如 Li 和 Guo 在文献[4]和文献[5]中将 c-正规性和可补性限制在可解群的 Fitting 子群的极大和极小子群上也得到了同样的结论.现在,通过弱拟正规性来研究某些子群对群结构的影响.Qian 和 Zhu 在文献[6]中通过用弱拟正规性来代替正规性推广了 Buckley[2]和 Srinivasan[3]的结果,Zhong[7]在 Qion and Zhu[6]研究的基础上又得到了一些推广的结论.在本文中,作者利用弱拟正规性给出了类似文献[4]和[5]中的限制,并把研究推广到群系的框架中而得到了一些结果.

2 预备知识

一个群类 $\mathscr{F}$ 称为一群系,若 $\mathscr{F}$ 满足下列两个条件:(1)若 $G \in \mathscr{F}$,则 G 的所有同态像也在 $\mathscr{F}$ 中;(2)设 $N \trianglelefteq G$,$M \trianglelefteq G$,若 $G/N \in \mathscr{F}$,$G/M \in \mathscr{F}$,则 $G/(M \cap N) \in \mathscr{F}$.一个群系 $\mathscr{F}$ 称为饱和群系,若 $G/\Phi(G) \in \mathscr{F}$,则 $G \in \mathscr{F}$([8;Chapter Ⅳ]).在文中 $\mathscr{U}$ 表示全体超可解群构成的群类.显然,$\mathscr{U}$ 是一个饱和群系([9;Ⅵ,P_{713}]).

定义 1[6] 群 G 的一个子群 H 称为弱拟正规的,若对 G 的任意子群 K,至少存在一个 K 的共扼子群 K^x,$x \in G$,使得 $HK^x = K^xH$.

引理 1[6] 若群 G 的子群 H 在 G 中弱拟正规,则对任意的 $N \trianglelefteq G$,HN 在 G 中弱拟正规,HN/N 在 G 中弱拟正规.

定义 2[11] 群 G 的一个子群 H 称为 S-拟正规的,若 H 与 G 的所有 Sylow 子群可交换.

引理 2[9] 群 N 和 D 都是群 G 的正规子群,$D \leqslant N$,$D \leqslant \Phi(G)$.如果 N 是幂零的,那么 N/D 也是幂零的.

引理 3[11] 设 $\mathscr{F}$ 是包含 $\mathscr{U}$ 的饱和群系.设群 G 存在一个可解正规子群 N,使得 $G/N \in \mathscr{F}$.如果 $F(N)$ 的任意 Sylow 子群的极大子群在群 G 中 S-拟正规,那么 $G \in \mathscr{F}$.

引理 4[4] 群 N $(N \neq 1)$ 是群 G 的可解正规子群.如果群 G 的包含在子群 N 中的每个极小正规子群不包含在 $\Phi(G)$ 中,那么 $F(N)$ 是包含在 N 中的 G 的极小正规子群的直积.

引理 5[12] 令 $\mathscr{F}$ 是包含超可解群类的群系.如果群 G 存在一个循环的正规子群 N,使得 $G/N \in \mathscr{F}$,则 $G \in \mathscr{F}$.

3 主要结果

定理 1 设 G 为可解群,若 $F(G)$ 的 Sylow 子群的极大子群在 G 中弱拟正规,则 G 超可解.

证明 假设定理不真,G 为极小阶反例.有:

(1) $\Phi(G) = 1$.

否则,$\Phi(G) \neq 1$.于是存在一个素数 p,使得 $p / |\Phi(G)|$.由于 $\Phi(G) \leqslant F(G)$,则 $p / |F(G)|$.令

* 收稿日期:2006-05-20
作者简介:赵振华(1974-),女,湖南常德人,硕士,重庆工学院讲师,主要从事有限群方向研究.

P_1 为 $\Phi(G)$ 的一个 Sylow p －子群，于是由 P_1 char $\Phi(G) \trianglelefteq G$，有 $P_1 \trianglelefteq G$. 由引理 2，有 $F(G/P_1) = F(G)/P_1$. 令 P_2/P_1 为 $F(G)/P_1$ 的 Sylow p －子群的一个极大子群，则 P_2 是 $F(G)$ 的 Sylow p －子群的一个极大子群. 由假设 P_2 在 G 中弱拟正规，于是由引理 1，P_2/P_1 在 G/P_1 中弱拟正规. 令 Q_2P_1/P_1 为 $F(G)/P_1$ 的 Sylow q －子群 $(q \neq p)$ 的一个极大子群，则 Q_2 是 $F(G)$ 的 Sylow q －子群的一个极大子群. 由假设 Q_2 在 G 中弱拟正规，再次由引理，Q_2P_1/P_1 在 G/P_1 中弱拟正规. 从而 G/P_1 满足定理条件，由 G 的极小性，有 G/P_1 超可解. 由 [9, P_{713}]，G 是超可解的，这是一个矛盾.

(2) 令 P 为 $F(G)$ 的 Sylow 子群，则 P 的极大子群在 G 中 S －拟正规.

令 P 为 $F(G)$ 的 Sylow p－子群. 于是由 P char $F(G) \trianglelefteq G$，有 $P \trianglelefteq G$，从而 $\Phi(P) \leqslant \Phi(G) = 1$. 这样对 $F(G)$ 的每一 Sylow 子群 P 有 $\Phi(P) = 1$.

G 是可解的且 $\Phi(G) = 1$，则 $F(G) = R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_m$，其中 R_i 是 G 的极小正规(初等交换)子群. 于是我们可以假定 $R_1 \leqslant P$，下面证明 P 的极大子群在 G 中 S －拟正规.

情况 1 $R_1 = P$.

令 P_1 是 P 的一个极大子群. 由假设 P_1 在 G 中弱拟正规，则存在 G 的一个 Sylow q －子群 $Q(\forall q \neq p)$，使得 $P_1Q = QP_1$，即 $QP_1 \leqslant G$. 有 $Q \leqslant N_G(P_1)$. 事实上，这里有 $P_1 = QP_1 \cap P \trianglelefteq QP_1$，由于 $P \trianglelefteq G$，则对于 G 的一个 Sylow p －子群 G_p，有 $P_1 \leqslant P \leqslant G_p$，于是由 q 的任意性可知，P_1 在 G 中 S －拟正规.

情况 2 $R_1 < P$.

假设 $P = R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_t (t \leqslant m)$，其中 $R_i(i = 1,2,\cdots,t)$ G 的极小正规 p －子群. 令 R_1^* 为 R_1 的一个极大子群，则 $R_1^*(R_2 \times R_3 \times \cdots \times R_t) = P_2$ 是 P 的极大子群，且由假设 P_2 在 G 中弱拟正规. 令 $T = R_2 \times R_3 \cdots \times R_t$，则 $P_2 = R_1^*T$. 由于 P_2 在 G 中弱拟正规，则存在 G 的一个 Sylow q －子群 $Q(q \neq p)$，使得 $P_2Q = QP_2$. 因此 $P_2Q \leqslant G$，即 $R_1^*TQ \leqslant G$. 显然 $R_1^*TQ \cap R_1 \trianglelefteq R_1^*TQ$，则 $Q \leqslant N_G(R_1^*)$，类似上面的讨论，P_1 在 G 中 S －拟正规.

(3)最后的矛盾

在引理 3 中令 $N = G$，可得 G 是超可解的.

定理 2 $\mathscr{F}$是包含 U 的饱和群系. 设群 G 存在一个可解正规子群 N，使得 $G/N \in \mathscr{F}$. 如果 $F(N)$ 的任意 Sylow 子群的极大子群在群 G 中弱拟正规，那么 $G \in \mathscr{F}$.

证明 假设定理不真，G 为极小阶反例. 仅需考虑 $1 < N < G$ 的情况. 事实上，若 $N = 1$，则 $G \in \mathscr{F}$. 若 $N = G$，则由定理 1 G 超可解，从而 $G \in \mathscr{U} \subseteq \mathscr{F}$.

有 $\Phi(G) \cap N = 1$. 若 $\Phi(G) \cap N \neq 1$，则存在一个素数 p，使得 $p/|\Phi(G) \cap N|$. 令 P_1 为 $\Phi(G) \cap N$ 的一个 Sylow$p$ －子群. 由于$\Phi(G) \cap N$幂零，则$P_1 \trianglelefteq G$. 由 $(G/P_1)/(N/P_1) \cong G/N$，有 $(G/P_1)/(N/P_1) \in \mathscr{F}$. 由引理 2，可得 $F(N/P_1) = F(N)/P_1$. 令 P_2/P_1 为 $F(N)/P_1$ 的 Sylow p －子群的一个极大子群，则 P_2 是 $F(N)$ 的 Sylow p －子群的一个极大子群. 由假设 P_2 在 G 中弱拟正规，于是由引理 1，P_2/P_1 在 G/P_1 中弱拟正规. 令 Q_2/P_1 为 $F(N)/P_1$ 的 Sylow q －子群 $(q \neq p)$ 的一个极大子群，则 Q_2 是 $F(G)$ 的 Sylow q －子群的一个极大子群. 显然 $Q_2 = Q_2^*P_1$，其中 Q_2^* 是 $F(N)$ 的 Sylow q －子群的一个极大子群. 由假设 Q_2^* 在 G 中弱拟正规，从而由引理 1，$Q_2^*P_1/P_1$ 在 G/P_1 中弱拟正规. 这样 G/P_1 满足定理条件，于是由 G 的极小性，$G/P_1 \in \mathscr{F}$，而 $P_1 \leqslant \Phi(G)$，则 $G \in \mathscr{F}$，这是一个矛盾，于是 $\Phi(G) \cap N = 1$.

由引理 4，$F(N)$ 是包含在 N 中的 G 的极小正规子群的直积. 令 P 为 $F(N)$ 的 Sylow 子群，则 P 是 G 的某些极小正规子群的直积，于是可假设 $P = R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_t$，其中 $R_i(i = 1,2,3\cdots,t)$ 是 G 的极小正规子群. 这样对 P 的任一极大子群 P_1，P_1 有如下结构：$P_1 = R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_{i-1} \times R_i^* \times R_{i+1} \times \cdots \times R_t$，其中 R_i^* 是 R_i（对某个 i）的一个极大子群. 由假设 P_1 在 G 中弱拟正规，则存在 G 的一个 Sylow q －子群 $Q(q \neq p)$，使得 $P_1Q = QP_1$. 显然 $R_1^* = P_1Q \cap R_1 \trianglelefteq P_1Q$，则 $Q \subseteq N_G(R_1^*)$. 对于 G 的一个 Sylow p －子群 G_p，既然我们有 $\Phi(G) \cap N = 1$，$\Phi(N) \leqslant \Phi(G)$，于是 $\Phi(N) = 1$. 这样 $F(N)$ 是交换群且 $P_1 \trianglelefteq P \trianglelefteq G$，从而 $P_1 \leqslant G_p$，由 q 的任意性可知，P_1 在 G 中 S －拟正规. 于是由引理 3，我们有 $G \in \mathscr{F}$，导出最后的矛盾，定理证毕.

推论 1 设群 G 存在一个可解正规子群 N，使得 G/N 超可解. 如果 $F(N)$ 的任意 Sylow 子群的极大子群在群 G 中弱拟正规，那么 G 超可解.

定理 3 $\mathscr{F}$是包含 $\mathscr{U}$ 的饱和群系. 设群 G 存在一个可解正规子群 N，使得 $G/N \in \mathscr{F}$. 如果 N 的任意循环子群在群 G 中弱拟正规，那么 $G \in \mathscr{F}$.

证明 假设定理不真，G 为极小阶反例. 若 $N = 1$，则 $G \in \mathscr{F}$. 于是仅需考虑 $N \neq 1$ 的情况.

由于 N 是可解正规子群，且 $N \neq 1$，则存在一个素数 p，使得 $p/|G|$. 令 R 是包含在 $O_p(N)$ 中的 G 的极小正规子群，则 R 是一个 p －群，且 $R \leqslant P$，其中 P 是

G 的一个 p -群.

令 $<x>$ 是包含在 R 中的 P 的极小正规子群. 显然, $o(x)=p$. 下面我们有 $R=<x>$.

事实上,由 $<x>$ 的弱拟正规性,则存在 G 的一个 Sylow q -子群 $Q\ (q\neq p)$,使得 $Q<x>=<x>Q$. 显然 $<x>=<x>Q\cap R\trianglelefteq <x>Q$. 这样 $Q\subseteq N_G(<x>)$,于是 $<x>\trianglelefteq G$,则由 R 的极小性,有 $R=<x>$.

令 K/R 是 N/R 的任一循环群. 设 $K/R=<yR>$, $o<yR>=r$,则 $y^r\in R$. 若 $y^r=1$,则 $K=<y>R$. 由于 $<y>$ 在 G 中弱拟正规,且 $R\trianglelefteq G$,于是由引理 1, K 在 G 中弱拟正规;若 $y^r\neq 1$,则 $K=<y>$ 在 G 中弱拟正规. 这样 K/R 在 G/R 中弱拟正规. 由于 $(G/R)/(N/R)\cong G/N\in\mathscr{F}$,则 G/R 满足定理条件,从而由 G 的极小性 $G/R\in\mathscr{F}$,进而由引理 5 有 $G\in\mathscr{F}$,矛盾.

推论 2　设群 G 存在一个可解正规子群 N ,使得 G/N 超可解. 如果 N 的任意循环子群在群 G 中弱拟正规,那么 G 超可解.

参考文献:

[1] XU MINGYAO. Introduction to Finite Groups[M]. Beijing: Science Press, 1999.

[2] BUCKLEY, J. Finite Groups of Whose Minimal Subgroups are Normal[J]. Math Z,1970,116:15 - 17.

[3] SRINVASSAN. S. Two Sufficient Conditions for Supersolvability of Finite Groups[J]. Israel J Math, 1980,35(3): 210 - 214.

[4] LI DEYU, GUO XIUYUN. The Influence of c-Normal of Subgroups on the Structure of Finite Groups Ⅱ[J]. Comm Algebra,1998,26 (6) :1 913 - 1 922.

[5] LI DEYU, GUO XIUYUN. On Complemented Subgroups of Finite Groups [J]. Chin Ann of Math, 2001, 22B(2):249 - 254.

[6] QIAN GUOHUA, ZHU PINGTIAN. Some Sufficient Conditions for Supersolvability of Groups[J]. Journal of Nanjing Normal University (Natural Science),1998,2(11) :15 - 17.

[7] ZHONG XIANGGUI. Influence of Weakly Quasi-normal Subgroups on the Structure of Finite Groups[J]. Journal of Guangxi Normal University,2003,21(3) : 38 - 40.

[8] K DOERK, T HAWKES. Finite Solvable Groups[M]. Berlin-New York: Walter De Gruyter,1992.

[9] B HUPPERT. Endliche Gruppen I[M]. Berlin: Springer-Verlay,1983.

[10] H WEI. On C-Normal Maximal and Minimal Subgroups of Sylow Subgroups of Finite Groups[J]. Comm Algebra, 2001,(29) : 2 193 - 2 200.

[11] M ASSAD. On Maximal Subgroups of Sylow Subgroups of Finite Groups[M]. Comm Algebra,1998,26: 347 - 352.

[12] LI SHIRONG. On Minimal Subgroups of Finite Groups (Ⅲ)[J]. Comm Algbra,1998,26(8): 2 453 - 2 461.

On Weakly Qnasi-normal Subgroups of Finite Groups

ZHAO Zhen-hua[1] , *XIAO Zhi-xiang*[2]

(1. Department of Mathematics ,Chongqing Institute of Technology,Chongqing 400050,China;

2. College of Mathematics and Physics, Chongqing University,Chongqing 400030,China)

Abstract: A subgroup H of a group G is said to be weakly quasi-normal in G , if for any subgroup K of G ,there exists a conjugate subgroup K^x of K such that $HK^x=K^xH$,where $x\in G$. The authors investigate the influence of weakly quasi-normality of some subgroups on the structure of finite groups and obtain some results on some kinds of weaker conditions.

Key words: weakly quasi-normal subgroup; supersolvable group; fitting subgroup; formation

(编辑　张小强)