文章编号:1000 - 582X(2006)02 - 0132 - 05

一类非线性抛物方程的均匀化*

李伟燕,张兴友
(重庆大学 数理学院,重庆 400030)

摘　要:讨论一类非线性抛物方程$\partial_t u_\varepsilon - \mathrm{div}(a_\varepsilon(x,\nabla u_\varepsilon)) = f_\varepsilon$ 的均匀化问题,其中 $a_\varepsilon(x,\lambda)$是一列快速振荡单调算子且满足文中给出的一致椭圆非一致有界条件. 在对这类可能奇异的抛物方程做均匀化时,主要困难来自条件中的 $\|\beta_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \to +\infty$,即二阶算子的系数的上界随参数 $\varepsilon \to 0$ 而趋于 $+\infty$. 给出最优条件,再仔细结合补偿列紧方法、单调性方法来克服这个困难,得出均匀化结论.

关键词:均匀化;单调算子;非一致有界;一致椭圆算子
中图分类号:O175.25; O175.29　　**文献标识码**:A

令 $T>0$ 及 $\Omega \subset R^n$ 为有界开集,在空间 $X = L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$或 $L^2(0,T;L^2(\Omega))$中研究初 - 边值问题:

$$(P_\varepsilon)\quad \begin{cases} \partial_t u_\varepsilon - \mathrm{div}(a_\varepsilon(x,\nabla u_\varepsilon)) = f_\varepsilon, & \Omega \times (0,T); \\ u_\varepsilon = 0, & \partial\Omega \times (0,T); \\ u_\varepsilon(x,0) = u_\varepsilon^0(x), & \Omega \end{cases}$$

其中 $f_\varepsilon \in L^2(0,T;(H^{-1}(\Omega))^n)$,$u_\varepsilon^0 \in (L^2(\Omega))^n$,$a_\varepsilon: R^d \times R^{nd} \to R^{nd}$ 是一列快速振荡算子,且定义 $a_\varepsilon(x,\lambda) := A_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon},\lambda\right)$,$x \in \Omega \subset R^d$,$\lambda \in R^{nd}$.

假定 $A_\varepsilon(y,\lambda)$满足下列条件:

(H_1):A_ε 是 Carathédory 型算子,即

$\forall \lambda \in R^{nd}$,$y \to A_\varepsilon(y,\lambda)$可测;

a. e $y \in R^d$,$\lambda \to A_\varepsilon(y,\lambda)$连续;

(H_2):A_ε 关于 y 是 Y - 周期的,关于 λ 是严格单调的,即

a. e $y \in R^d$,$\forall \lambda,\mu \in R^{nd}$,$\lambda \neq \mu$,

$(A_\varepsilon(y,\lambda) - A_\varepsilon(y,\mu)) \cdot (\lambda - \mu) > 0$;

(H_3):A_ε 是一致椭圆的,即

$\exists \alpha > 0$,s. t a. e $y \in R^d$,$\forall \lambda \in R^{nd}$,

$A_\varepsilon(y,\lambda)\lambda \geqslant \alpha|\lambda|^2$;

(H_4):A_ε 满足一定的有界性条件,即:

a. e $y \in R^d$,$\forall \lambda \in R^{nd}$,

$|A_\varepsilon(y,\lambda)| \leqslant \beta_\varepsilon(y)(1+|\lambda|)$,

其中 $\beta_\varepsilon \in L^\infty(Y)$,且 $\|\beta_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \to +\infty$,as$\varepsilon \to 0$;

(H_5):A_ε 关于 λ 是 1 - 齐次性,即 a. e $y \in Y$,$\forall t \in R$,$\forall \lambda \in R^{nd}$,$A_\varepsilon(y,t\lambda) = tA_\varepsilon(y,\lambda)$;

(H_6):A_ε 满足 Hölder 型不等式,即

a. e $y \in Y$,$\forall \lambda,\mu \in R^{nd}$,$\exists C > 0$,s. t

$$|A_\varepsilon(y,\lambda) \cdot \mu| \leqslant C(A_\varepsilon(y,\lambda) \cdot \lambda)^{\frac{1}{2}}(A_\varepsilon(y,\mu) \cdot \mu)^{\frac{1}{2}}.$$

文献[1]是均匀化理论的一本入门教材,M. Briane[2-3]讨论了一类可能奇异的椭圆方程的均匀化,张兴友和黄勇在文献[4]中讨论了一类退化抛物方程的均匀化. 文中所讨论的问题是一类可能奇异的抛物问题,主要困难来自(H_4)中的 $\|\beta_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \to +\infty$,即二阶算子的系数的上界随参数 $\varepsilon \to 0$ 而趋于 $+\infty$. 主要采用文献[2]的思想,仔细结合补偿列紧方法、单调性方法来克服这个困难.

1　预备定理

先引入空间(如文献[1]中 Th3.58):

$$W = \{v \mid v \in L^2(a,b;H_0^1(\Omega)),\ \partial_t v \in L^2(a,b;H^{-1}(\Omega))\},$$

$$W_1 = \{v \mid v \in L^2(a,b;L^2(\Omega)),\ \partial_t v \in L^2(a,b;H^{-1}(\Omega))\},$$

赋予相应的范数后则为 Banach 空间,且具有相应的性质.

定义 1　$\forall \varepsilon > 0$ 称 u_ε 为初 - 边值问题(P_ε)的弱解,是指:

* 收稿日期:2005 - 10 - 28
基金项目:重庆大学骨干教师基金资助(2003018);重庆市高校骨干教师基金资助(20020126)
作者简介:李伟燕(1980 -),女,河南长葛人,重庆大学硕士研究生,主要研究方向为金融数学与应用动力系统方向.

$$\left.\begin{array}{l} u_\varepsilon \in C([0,T];L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \\ \partial_t u_\varepsilon \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)), \end{array}\right\} \quad (1)$$

且 u_ε 在广义意义下满足方程 (P_ε).

由文献[5-6]知道初-边值问题 (P_ε) 存在唯一的解 $u_\varepsilon \in W$. 且由类似于文献[2]讨论椭圆问题的方法可以证明如下两个引理，其中引理 2 的证明要用到 (H_4) 和下文定理 4 中的条件.

引理 2　若 v_ε 为 $L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega))$ 中序列，满足：

$$\text{在空间 } L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)) \text{ 中 } v_\varepsilon \xrightarrow{\text{弱}} v_0,$$

$$a_\varepsilon(\cdot,\nabla v_\varepsilon)\cdot\nabla v_\varepsilon \text{ 在空间 } L^1(\Omega_T) \text{ 中有界},$$

且令 G_ε 为 $L_\#^2(Y;R^{nd})$ 中以 Y 为周期的函数列，满足：

$$\int_0^T\int_Y A_\varepsilon(y,G_\varepsilon)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}t \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} b_0 \in R^{nd} \text{ 及}$$

$$A_\varepsilon(\cdot,G_\varepsilon)\cdot G_\varepsilon \text{ 在空间 } L^1(Y_T) \text{ 中有界},$$

其中 $L_\#^2(Y;R^{nd})$ 为包含于 $L_{\mathrm{loc}}^2(R^d;R^{nd})$ 中的以 Y 为周期的向量值函数，则在广义意义下收敛：

$$\forall\theta \in D(\Omega;R^d),$$

$$\int_0^T\int_\Omega a_\varepsilon(x,g_\varepsilon)\cdot(v_\varepsilon\otimes\theta)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}$$

$$\int_0^T\int_\Omega b_0\cdot(v_0\otimes\theta)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t, g_\varepsilon := G_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

引理 3　令 μ 为 Ω_T 上的 Radon 测度，F 为 $L^2(\Omega_T)$ 到 R 的映射且在零点连续，假定

$$\forall\varphi \in C_c(\Omega_T),\ F(\varphi) + \int_0^T\int_\Omega \varphi\mu\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \geqslant 0,$$

$$\text{则 } \mu \in L^2(\Omega_T).$$

2　主要结论

首先固定 $\varepsilon > 0$, $\forall\lambda \in R^{nd}$，定义 $X_\varepsilon(\cdot,\lambda) \in W_\#^{1,2}(Y;R^n)$ 为局部变分问题：

$$\forall V \in W_\#^{1,2}(Y;R^n),$$

$$\int_Y A_\varepsilon(y,\nabla_y W_\varepsilon(y,\lambda))\cdot\nabla V(y)\,\mathrm{d}y = 0 \qquad (2)$$

的解，其中 X_ε 满足条件：$\int_Y X_\varepsilon = 0$, $W_\varepsilon(y,\lambda) := \lambda y - X_\varepsilon(y,\lambda)$，而 $W_\#^{1,2}(Y;R^n)$ 为包含于 $W_{\mathrm{loc}}^{1,2}(R^d;R^n)$ 的以 Y 为周期的向量值函数，则由文献[2]知 $A_\varepsilon\left(\frac{x}{\delta};\lambda\right)$（令 ε 固定，$\delta\to 0$）的均匀化算子定义为：

$$A_\varepsilon^0(\lambda) := \int_Y A_\varepsilon(y,\nabla_y W_\varepsilon(y,\lambda))\,\mathrm{d}y. \qquad (3)$$

自然地考虑 $a_0(\lambda)$ 是否为满足下面极限过程即：

$$\forall\lambda \in R^{nd}, A_\varepsilon^0(\lambda) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} a_0(\lambda), \qquad (4)$$

的极限算子. 而由文献[2]知，当 A_ε 满足文中的条件时，极限式(4)存在.

注：由文献[2]知有下面的估计成立：

$$\exists C > 0 \quad \text{s.t}$$

$$\forall\lambda \in R^{nd},$$

$$C^{-1}|\lambda|^2 \leqslant A_\varepsilon^0(\lambda)\cdot\lambda,$$

$$|A_\varepsilon^0(\lambda)| \leqslant C|\lambda|,$$

$$\forall\lambda \in R^{nd},$$

$$C^{-1}|\lambda|^2 \leqslant a_0(\lambda)\cdot\lambda,$$

$$|a_0(\lambda)| \leqslant C|\lambda|.$$

本文主要结论如下.

定理 4　令 A_ε 为一列快速振荡算子，满足条件 $(H_1)-(H_6)$ 及 L^1-有界，即

$$\exists C > 0, \forall\lambda \in R^{nd}, \int_Y A_\varepsilon(y,\lambda)\cdot\lambda\,\mathrm{d}y \leqslant C|\lambda|^2, \qquad (5)$$

同时假定

$$\forall\lambda \in R^{nd}, \varepsilon^2 \sup_{\substack{V\in W^{1,2}(Y;R^n)\setminus\{0\} \\ \int_Y V=0}} \frac{\int_Y A_\varepsilon(y,\lambda)\cdot\lambda|V|^2\mathrm{d}y}{\int_Y A_\varepsilon(y,\nabla V)\cdot\nabla V\mathrm{d}y} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0. \qquad (6)$$

又若存在连续且严格单调算子 $a_\varepsilon: R^{nd}\to R^{nd}$ 满足极限条件式(4)，其中 $A_\varepsilon^0(\lambda)$ 由式(3)定义，最后假定

$$\left.\begin{array}{l} \text{在空间 } L^2(\Omega) \text{ 中 } u_\varepsilon^0 \xrightarrow{\text{弱}} u^0, \\ \text{在空间 } L^2(0,T;(H^{-1}(\Omega))^n) \text{ 中 } f_\varepsilon \xrightarrow{\text{弱}} f. \end{array}\right\} \quad (7)$$

则有 (P_ε) 的解 u_ε 满足：

$$\left.\begin{array}{l} \text{在空间 } W \text{ 中 } u_\varepsilon^0 \xrightarrow{\text{弱}} u, \\ \text{在空间 } L^2((0,T)\times\Omega) \text{ 中 } a_\varepsilon(x,\nabla u_\varepsilon) \xrightarrow{\text{弱}} a_0(\nabla u). \end{array}\right\} \quad (8)$$

其中 u 为如下极限问题的解

$$(P_0)\begin{cases} \partial_t u - \operatorname{div}(a_0(\nabla u)) = f, & \Omega\times(0,T), \\ u = 0, & \partial\Omega\times(0,T), \\ u(x,0) = u^0(x), & \Omega. \end{cases}$$

$$f \in L^2(0,T;(H^{-1}(\Omega))^n), u^0 \in (L^2(\Omega))^n.$$

3　均匀化结论证明

3.1　先验估计

令 $u_\varepsilon \in W$ 为 (P_ε) 的解得：

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_\Omega a_\varepsilon(x,\nabla u_\varepsilon)\cdot\nabla u_\varepsilon\mathrm{d}x = \int_\Omega f_\varepsilon\cdot u_\varepsilon\mathrm{d}x. \qquad (9)$$

由(H_3)有：

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)}+\alpha\|\nabla u_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)}\leqslant\int_\Omega f_\varepsilon\cdot u_\varepsilon\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\|f_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}\cdot\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C_\Omega\|f_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}\cdot\|u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)}\leqslant$$

$$\frac{C_\Omega^2}{2\alpha}\|f_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{\alpha}{2}\|u_\varepsilon\|^2_{H_0^1(\Omega)}. \qquad (10)$$

对式(10)两边在$[0,t]$上积分有：

$$\|u_\varepsilon(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\alpha\int_0^t\|u_\varepsilon(\tau)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\mathrm{d}\tau\leqslant$$

$$\|u_\varepsilon^0\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{C_\Omega^2}{\alpha}\int_0^t\|f_\varepsilon(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}\mathrm{d}\tau\leqslant$$

$$\|u_\varepsilon^0\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{C_\Omega^2}{\alpha}\int_0^T\|f_\varepsilon(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}\mathrm{d}\tau, \qquad (11)$$

再由式(7)有：

$$u_\varepsilon\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)).$$

且

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}+\|u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}\leqslant$$

$$C_0(\|u_\varepsilon^0\|_{L^2(\Omega)}+\|f_\varepsilon\|_{L^2((0,T)\times\Omega)})\leqslant C_1. \qquad (12)$$

下面对$\partial_t u_\varepsilon$进行估计，要用到$a_\varepsilon(x,\nabla u_\varepsilon)\cdot\nabla u_\varepsilon$在$L^1(0,T;L^1(\Omega))$中有界，即：要证明$\exists C>0$，满足不等式$\left|\int_0^T\int_\Omega a_\varepsilon(x,\nabla u_\varepsilon)\cdot\nabla u_\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|\leqslant C$.

对式(9)两边在$[0,T]$上积分得：

$$\frac{1}{2}\|u_\varepsilon(T)\|^2_{L^2(\Omega)}-\frac{1}{2}\|u_\varepsilon(0)\|^2_{L^2(\Omega)}+$$

$$\int_0^T\int_\Omega a_\varepsilon(x,\nabla u_\varepsilon)\cdot\nabla u_\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^T\int_\Omega f_\varepsilon\cdot u_\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

即：

$$\frac{1}{2}\|u_\varepsilon(T)\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_0^T\int_\Omega a_\varepsilon(x,\nabla u_\varepsilon)\cdot\nabla u_\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}t=$$

$$\frac{1}{2}\|u_\varepsilon(0)\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_0^T\int_\Omega f_\varepsilon\cdot u_\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

由此易得：

$$\exists C>0,\ \mathrm{s.t}\quad\left|\int_0^T\int_\Omega a_\varepsilon(x,\nabla u_\varepsilon)\cdot\nabla u_\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|\leqslant C. \qquad (13)$$

即得：

$a_\varepsilon(x,\nabla u_\varepsilon)\cdot\nabla u_\varepsilon$在$L^1(0,T;L^1(\Omega))$中有界.

若$u_\varepsilon\in W$为(P_ε)的解，则

$$\partial_t u_\varepsilon=\mathrm{div}(a_\varepsilon(x,\nabla u_\varepsilon))+f_\varepsilon\in H^{-1}(\Omega). \qquad (14)$$

令$Fu_\varepsilon=-\mathrm{div}(a_\varepsilon(x,\nabla u_\varepsilon))\in H^{-1}(\Omega)$，$\forall v\in H_0^1(\Omega)$，$u_\varepsilon\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$则有：

$$\int_0^T\left|\langle Fu_\varepsilon,v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\right|\mathrm{d}t=\int_0^T\left|\int_\Omega-\mathrm{div}a_\varepsilon(x,\nabla u_\varepsilon)\cdot v\mathrm{d}x\right|\mathrm{d}t=$$

$$\int_0^T\left|\int_\Omega a_\varepsilon(x,\nabla u_\varepsilon)\cdot\nabla v\mathrm{d}x\right|\mathrm{d}t\leqslant\int_0^T\int_\Omega|a_\varepsilon(x,\nabla u_\varepsilon)\cdot\nabla v|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant$$

$$C\int_0^T\left(\int_\Omega a_\varepsilon(x,\nabla u_\varepsilon)\cdot\nabla u_\varepsilon\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_\Omega a_\varepsilon(x,\nabla v)\cdot\nabla v\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t\leqslant$$

$$C\left(\int_0^T\int_\Omega a_\varepsilon(x,\nabla u_\varepsilon)\cdot\nabla u_\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_0^T\int_\Omega a_\varepsilon(x,\nabla v)\cdot\nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}},$$

由式(5)、式(13)得

$$\int_0^T\left|\langle Fu_\varepsilon,v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\right|\mathrm{d}t\leqslant$$

$$C_T\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}=C_T\|v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

即：$\|F(u_\varepsilon)\|_{H^{(-1)}(\Omega)}\leqslant C_2$，并有$F(u_\varepsilon)\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$，且

$$\|F(u_\varepsilon)\|_{L^2(0,T;H^{(-1)}(\Omega))}\leqslant$$

$$C(\|u_\varepsilon^0\|_{L^2(\Omega)}+\|f_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}).$$

由式(14)有：

$$\|\partial_t u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}\leqslant$$

$$C(\|u_\varepsilon^0\|_{L^2(\Omega)}+\|f_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))})\leqslant C_3, \qquad (15)$$

因此由式(12)、式(15)得

$$\|u_\varepsilon\|_W+\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\leqslant$$

$$C(\|f_\varepsilon\|_{L^2((0,T)\times\Omega)}+\|u_\varepsilon^0\|_{L^2(\Omega)}).$$

所以知：存在子列，仍记为$u_\varepsilon,\partial_t u_\varepsilon$, s.t

$$\left.\begin{array}{l}\text{在空间 } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \text{ 中 } u_\varepsilon\xrightarrow{\text{弱}}u,\\ \text{在空间 } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \text{ 中 } u_\varepsilon\xrightarrow{\text{弱}^*}u,\\ \text{在空间 } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \text{ 中 } u_\varepsilon\xrightarrow{\text{强}}u,\\ \text{在空间 } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \text{ 中 } \partial_t u_\varepsilon\xrightarrow{\text{弱}}\partial_t u.\end{array}\right\} \qquad (16)$$

由(H_6)及式(5)、式(6)知：

$$\forall\mu\in R^{nd},\ \int_0^T\int_\Omega|a_\varepsilon(x,\nabla u_\varepsilon)\cdot\mu|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C|\mu|,$$

于是有$a_\varepsilon(x,\nabla u_\varepsilon)$在$L^1(\Omega_T):=L^1(0,T;L^1(\Omega))$中有界，所以存在子列，记为

$$\xi_\varepsilon:=a_\varepsilon(x,\nabla u_\varepsilon)\text{ 在空间 }L^1(\Omega_T)\text{ 中弱收敛到 }\xi_0. \qquad (17)$$

由ξ_ε定义及(P_ε)得ξ_ε满足$\forall v\in H_0^1(\Omega)$，$\forall\varphi\in D(0,T)$有：

$$\int_0^T\int_\Omega\xi_\varepsilon(x,t)\cdot\nabla v(x)\cdot\varphi(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=$$

$$\int_0^T\int_\Omega f_\varepsilon(x,t)\cdot v(x)\cdot\varphi(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_0^T\langle\partial_t u_\varepsilon(t),v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\cdot\varphi(t)\mathrm{d}t,$$

再由文献[1]中的 Th3.59，上式等价于：

$$\int_0^T\int_\Omega \xi_\varepsilon(x,t)\cdot\nabla v(x)\cdot\varphi(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^T\int_\Omega f_\varepsilon(x,t)\cdot v(x)\cdot\varphi(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\langle\partial_t u_\varepsilon,v\varphi\rangle_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),L^2(0,T;H_0^1(\Omega))},\tag{18}$$

由收敛性式(7)、式(16)、式(17)，对式(18)求极限后可得 ξ_0 满足：$\forall v\in H_0^1(\Omega)$

$$\langle\partial_t u(t),v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}+\int_\Omega\xi_0(x,t)\cdot\nabla v(x)\mathrm{d}x=\int_\Omega f(x,t)\cdot v(x)\mathrm{d}x.\tag{19}$$

要证明定理，只需要证：

$$\xi_0=a_0(\nabla u).$$

3.2　ξ_0 满足的不等式

本节要证明 $\forall\lambda\in R^{nd}$，$\forall\varphi\in C_c(\Omega)$，$\xi_0$ 满足下列不等式：

$$\int_0^T\int_\Omega f\cdot u\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_0^T\int_\Omega\partial_t u\cdot u\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_0^T\int_\Omega\xi_0\cdot\lambda\cdot\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_0^T\int_\Omega a_0(\lambda)\cdot\nabla u\cdot\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_\Omega a_0(\lambda)\cdot\lambda\cdot|\varphi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\geqslant 0\tag{20}$$

定义 $\eta_\varepsilon(y,\cdot):=A_\varepsilon\left(y,\nabla_y W_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon},\lambda\right)\right)$，$\forall y\in Y$，$\forall\lambda\in R^{nd}$，由 A_ε 的单调性有：

$$\int_0^T\int_\Omega\left(\xi_\varepsilon-\eta_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon},\lambda\varphi\right)\right)\cdot\left(\nabla u_\varepsilon-\nabla_y W_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon},\lambda\varphi\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\geqslant 0.\tag{21}$$

由 $W_\varepsilon(y,\cdot)$ 是 1 - 齐次的，$\eta_\varepsilon(y,\cdot)$ 是 1 - 齐次的，及式(21)有：

$$\int_0^T\int_\Omega f_\varepsilon\cdot u_\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_0^T\int_\Omega\partial_t u_\varepsilon\cdot u_\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_0^T\int_\Omega\xi_\varepsilon\cdot\nabla_y W_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon},\lambda\right)\cdot\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_0^T\int_\Omega\eta_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon},\lambda\right)\cdot\nabla u_\varepsilon\cdot\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_\Omega\eta_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon},\lambda\right)\cdot\nabla_y W_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon},\lambda\right)\cdot|\varphi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\geqslant 0.\tag{22}$$

下面求式(22)中各项极限：

首先，由式(7)、式(16)有：

$$\left.\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega f_\varepsilon\cdot u_\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}t&\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\int_0^T\int_\Omega f\cdot u\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\\int_0^T\int_\Omega\partial_t u_\varepsilon\cdot u_\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}t&\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\int_0^T\int_\Omega\partial_t u\cdot u\mathrm{d}x\mathrm{d}t\end{aligned}\right\},\tag{23}$$

下面求式(22)中第三项极限：

定义辅助函数(如文献[2]中)：

$$\omega_\varepsilon^\lambda(x):=\varepsilon W_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon},\lambda\right),$$

其中 $W_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon},\lambda\right)$ 定义如式(2)，令 $\varphi\in D(\Omega):=C_0^\infty(\Omega)$，用 $\varphi\cdot\omega_\varepsilon^\lambda$ 与(P_ε)作用并分部积分再在$[0,T]$上积分得：

$$\int_0^T\int_\Omega\xi_\varepsilon\cdot\nabla_y W_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon},\lambda\right)\cdot\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^T\int_\Omega f\cdot\omega_\varepsilon^\lambda\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_0^T\int_\Omega\xi_\varepsilon\cdot(\omega_\varepsilon^\lambda\otimes\nabla\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_0^T\int_\Omega\partial_t u_\varepsilon\cdot\omega_\varepsilon^\lambda\cdot\varphi\mathrm{d}x.\tag{24}$$

由 $\omega_\varepsilon^\lambda(x)\longrightarrow\lambda x$ 在 $L^2(\Omega;R^n)$ 强收敛，有：

$$\left.\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega f\cdot\omega_\varepsilon^\lambda\cdot\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t&\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\int_0^T\int_\Omega f\cdot(\lambda x)\cdot\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\\-\int_0^T\int_\Omega\partial_t u_\varepsilon\cdot\omega_\varepsilon^\lambda\cdot\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t&\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}-\int_0^T\int_\Omega\partial_t u\cdot(\lambda x)\cdot\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\end{aligned}\right\}$$

可得：

$$\int_0^T\int_\Omega\xi_\varepsilon\cdot\nabla_y W_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon},\lambda\right)\cdot\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\longrightarrow\int_0^T\int_\Omega f\cdot(\lambda x)\cdot\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_0^T\int_\Omega\xi_0\cdot(\lambda x\otimes\nabla\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_0^T\int_\Omega\partial_t u\cdot(\lambda x)\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\tag{25}$$

令 $v=(\lambda x)\cdot\varphi$ 代入式(19)然后在$[0,T]$上积分得：

$$\int_0^T\int_\Omega f\cdot(\lambda x)\cdot\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^T\int_\Omega\partial_t u\cdot(\lambda x)\cdot\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_\Omega\xi_0\cdot\lambda\cdot\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_\Omega\xi_0\cdot(\lambda x\otimes\nabla\varphi)\cdot\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

上式代入式(25)中得：

$$\int_0^T\int_\Omega\xi_\varepsilon\cdot\nabla_y W_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon},\lambda\right)\cdot\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\longrightarrow\int_0^T\int_\Omega\xi_0\cdot\lambda\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\ \forall\varphi\in D(\Omega).\tag{26}$$

类似于文献[2]中证明,式(22)最后两项极限分别为:

$$\int_0^T\int_\Omega \eta_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon},\lambda\right)\cdot \nabla u_\varepsilon \cdot \varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}t \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_0^T\int_\Omega a_0(\lambda)\cdot \nabla u\cdot \varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}t, \tag{27}$$

$$\int_0^T\int_\Omega \eta_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon},\lambda\right)\cdot \nabla_y W_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon},\lambda\right)\cdot |\varphi|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_0^T\int_\Omega a_0(\lambda)\cdot\lambda\cdot|\varphi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \tag{28}$$

由式(23)、式(25)、式(27)、式(28)可得不等式式(20)成立.

由引理3可得:$\xi_0\in L^2(\Omega_T)$;根据文献[2]中证明方法,此处可证:$\xi_0=a_0(\nabla u)$.

利用抛物方程均匀化理论的标准方法容易证明均匀化方程的解满足相应的初始条件.至此,完成了对定理4的证明.

参考文献:

[1] DOINA CIORANESCU, PATRIZIA DONATO. An introducation to Ho Ogenization[M]. New York: Oxford University Press NEW YORK,1999. 209 - 225.

[2] BRIANE M. Homogenization of Non-uniformly Bounded Operators:Critical Barrier for Nonlocal Effects[J]. Arch Rational Mech Anal, 2002,164:73 - 101.

[3] BRIANE M. Homogenization of a Class of Non-uniformly Elliptic Monotonic Operators[J]. Nonlinear Analysis Theory Methods and Applications, 2002,48:137 - 158.

[4] ZHANG X, HUANG Y. Homogenization for Degenerate Quasilinear Parabolic Equations of Second Order[J]. Acta Math Sinica English Series, 2005,21(1):93 - 100.

[5] LIU Z. On the Sobvability of Degenerate Quasilinear Parabolic Equations of Second Order[J]. Acta Math Sinica English Series, 2002,16(2):313 - 324.

[6] LADYZHENSKAYA O A, SOLONNIKOV V A, URALCEVA N N. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type[M]. AMS Providence, 1968.

Homogenization of a Class of Nonlinear Parabolic Equations of Second Order

LI Wei-yan, ZHANG Xing-you

(College of Mathematics and Physics, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

Abstract: This paper deals with the homogenization of nonlinear parabolic equations of second order: $\partial_t u_\varepsilon - \mathrm{div} a_\varepsilon(x,\nabla u_\varepsilon)=f_\varepsilon$, where $a_\varepsilon(x,\lambda)$ is a highly oscillating monotonic operator which is uniformly elliptic but non-uniformly bounded. The difficulty of the asymptotic analysis comes from the non-uniform boundedness of β_ε. An optimal condition on A_ε is given and the classical compensated compactness arguments and monotonic methods are carefully combined to derive the homogenized conclusions.

Key words: homogenization; monotonic operators; non-uniformly bounded; uniformly elliptic

(编辑 张小强)