文章编号:1000-582X(2006)05-0062-02

复系数微分多项式与分担值*

冯 彬[1],杨 拍[1],刘家英[2]
(1.重庆大学 数理学院,重庆 400030;2.重庆医药高等专科学院,重庆 400051)

摘 要:设 F 为区域 G 上的全纯函数族,a 为有穷非零复数,$a(z)$ 为 G 上的解析函数. 若对任意 $f\in F$,f 与 $L=f''+a(z)f'$ 在 G 上的 IM 分担值且当 $f=a$ 时,$f'=L'=a$. 则 F 在 G 中正规.

关键词:全纯函数;正规族;分担值
中图分类号:O174.52 **文献标识码**:A

1 引言及结果

称 a 为 f 与 g 在区域 G 上的分担值是指 f-a 与 g-a 在区域 G 上的零点相同(不计重数)笔者采用 Nevanlinna 理论[1-2]中的符号 $T(r,f)$,$m(r,f)$,$N(r,f)$ 等. 讨论 F 中的函数 f 与其复系数微分多项式

$L=f''+a(z)f'$,($a(z)$ 为 G 上解析函数)(1).

具有一个分担值时,F 的正规性问题. 有如下结果

定理1 设 F 为区域 G 上的全纯函数族,a 为有穷非零复数,若对任意的 $f\in F$,a 为 f 与 L 在 G 上的 IM 分担值,且当 $f=a$ 时,$f'=L'=a$,则 F 在 G 中正规. 本定理对 k 阶微分多项式也成立.

2 几个引理

定义

$$L_d(r,f)=\sum_{i=1}^{k}m(r,l_i),$$

其中 $l_i(1\leqslant i\leqslant k)$ 表示 f 的某种形式的对数导数

$$\phi=\phi(f)=\frac{L'-f'}{f-a},\varphi=\varphi(f)=\frac{L'(L-f)}{(f-a)(L-a)}.$$

引理1[3] 设 f 为区域 $I=\{z: |z|<R\}$ 上的全纯函数. a 为非零复数,L 如(1)所定义,置

$$\phi=\phi(f)=\frac{L'-f'}{f-a},\varphi=\varphi(f)=\frac{L'(L-f)}{(f-a)(L-a)}.$$

若 a 为 f 与 L 在 G 上的 IM 分担值,且当 $f=a$ 时,$f'=L'=a$. 则对 $0<r<R$ 有

1) $T(r,\phi)=C^*\{L_d(r,f)+1\}$,$T(r,\varphi)=C^*\{L_d(r,f)+L_d(r,l)+1\}$;

2) 当 $f(z_0)=a$ 时,$[\phi(z)-z\varphi(z)]_{z=z_0}=0$.

引理2 设 f 为区域 $I=\{z|z|<R\}$ 上的非常数全纯函数,L 如1)定义,且 f 与 L 满足定理1所设条件:若 $f(0)\neq 0$,$L(0)\neq 0$ 及 $\phi(0)-2\phi(0)\neq 0$. 则对 $0<r<\rho<R$,有

$$T(r,f)\leqslant C\{L_d(r,f)+L_d(r,L)+1\}+\log\left|\frac{f(0)-a)(L(0)-a)}{L'(0)(\phi(0)-2\varphi(0)}\right|.$$

引理3[4] 设函数 $f(z)$ 在 $||<R(\leqslant\infty)$ 内亚纯. 若 $f(0)\neq 0,\infty$,则对于 $0<r<\rho<R$,有

$$m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)<C_k\begin{cases}1+\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+\\ \log^+\frac{1}{r}+\log^+\frac{1}{\rho-r}+\log^+\rho+\log^+T(\rho,f)\end{cases},$$

其中 C_k 为仅依赖于 k 的常数.

引理4[5] 设 $T(r)$ 是 (r,R) 上定义的非负,连续,非减的函数,$\alpha(r)$ 为该区间上定义的非负,非增的函数,b_1,b_2 为两个常数. 若对于 $r_0<r<\rho<R$ 恒有

$$T(r)<\alpha(r)+b_1\log^+\frac{1}{\rho-1}+b_2\log^+T(\rho),$$

则在 (r,R) 上有

$$T(r)<2\alpha(r)+B_1\log^+\frac{2}{R-R}+B_2$$

其中 B_1,B_2 是由 b_1 和 b_2 决定的常数.

引理5[6] 设 F 为区域 G 内一全纯函数族,则 F 在某点 $z=z_0$ 不正规的充要条件是:存在族中一函数列 $f(z)$,一点列 $z_n\to Z_0,n\to\infty$,及一正数列 $t_n\to 0,n\to\infty$. 使 $g(z)=f(z+t_nz)$ 在开平面上内闭一致收敛于非常数的整函数 $g(z)$.

引理6[3] $g(z)$ 如上定义,若 a 为 f 与 L 在 G 上的 IM 分担值,且当 $f=a$ 时,$f'=L'=a$,则有 $g^{(3)}\neq 0$.

* 收稿日期:2005-12-20
作者简介:冯彬(1976-),男,四川西充人,重庆大学硕士研究生,主要从事单复变函数研究.

3　定理 1 的证明

设 $G=D=\{z:\ |z|<1\}$. 只须证在 $z=0$ 处正规.

设 F 在 $z=0$ 不正规. 根据引理 5，有族 F 中存在一列 $\{f_n\}$ 以及一点列 z_n 和一正数列 t_n，$z_n\to 0$，$t_n\to 0$，$n\to\infty$，使得 $g_n(z)=f_f(z_n+t_nz)$、在开平面上内闭一致收敛于非常数整函数 $g(z)$ 且有 $g^{(3)}(z)\neq 0$.

分 2 种情况讨论.

1) 存在的子列 $\{f_n(z_n+t_nz)\}$，(仍记为 $\{f_n(z_n+t_nz)\}$) 使得

$$\phi(f_n(z_n+t_nz))-z\varphi(f_n(z_n+t_nz))\equiv 0,$$

$$\frac{t_n^3[L'(f_n(z_n+t_nz))-f'_n(z_n+t_nz]}{f_n(z_n+t_nz)-a}\equiv \frac{2t_n^{2\times 2+1}L'(f_n(z_n+t_nz))[L(f_n(z_n+t_nz))-f_n(z_n+t_nz)]}{t_n^2(f_n(z_n+t_nz)-a)[L(f_n(z_n+t_nz)-a)]}, \tag{2}$$

式(2)两边取极限，令 $n\to\infty$，得 $g^{(3)}(z)\equiv 0$. 矛盾.

(2) 不妨仅考虑对每个自然数 n，都有

$$\phi(f_n(z_n+t_nz))-z\varphi(f_n(z_n+t_nz))\neq 0.$$

取 $z_1\in C$. 使得 $g(z_1)\neq a$，$g^{(2)}(z_1)\neq 0$，$g^{(3)}(z_1)\neq 0$. 于是

$$t_n^2[\phi(f_n(z_n+t_nz_1))-z\varphi(f_n(z_n+t_nz))]=$$

$$\frac{t_n^2[L'(f_n(z_n+t_nz_1))-f'_n(z_n+t_nz_1)]}{f_n(z_n+t_nz_1)-a}\equiv \frac{2t_n^{2\times 2}L'(f_n(z_n+t_nz_1))[L(f_n(z_n+t_nz_1))-f_n(z_n+t_nz_1)]}{t_n^2(f_n(z_n+t_nz_1)-a)[L(f_n(z_n+t_nz_1)-a)]}\to \frac{g^{(3)}(z_1)}{a-g(z_1)}(n\to\infty),$$

则有

$$\log\left|\frac{1}{\phi(f_n(z_n+t_nz_1))-z\varphi(f_n(z_n+t_nz_1))}\right|\to-\infty\ (n\to\infty), \tag{3}$$

同样由

$$t_n^{-1}\frac{[f_n(z_n+t_nz_1)-a)][L(f_n(z_n+t_nz_1)-a)]}{L'(f_n(z_n+t_nz_1))}\to \frac{(g(z_1)-a)g^{(2)}(z_1)}{g^{(3)}}(n\to\infty)$$

得到

$$\log\left|\frac{[f_n(z_n+t_nz_1)-a)][L(f_n(z_n+t_nz_1)-a)]}{L'(f_n(z_n+t_nz_1))}\right|\to -\infty\ (n\to\infty), \tag{4}$$

置 $h_n(z)=f_n(z+t_nz_1+z_n)(n=1,2,\cdots)$，则当 $n\to\infty$ 时，

$$h_n(0)=g_n(z_1)\to g(z_1)\neq a, h_n^{(2)}(0)=\frac{1}{t_n^2}g_n^{(2)}(z_1)\to\infty\ (n\to\infty),$$

$$h_n^{(3)}(0)=\frac{1}{t_n^{2+1}}g_n^{(3)}(z_1)\to 0, L'(h_n(0))=L'(f_n(z_n+t_nz_1))\to\infty.$$

于是对 $R=1/2$，$|z|<1/2$，当 n 充分大时，$z+z_n+t_nz_1\in D^*=\{z:\ |z|<R\}$

应用引理 2，并结合(3)(4). 当 n 充分大时，有

$$t(r,h_n)<C^*\{L_d(r,h_n)+L_d(r,L(h_n))+1\}, \tag{5}$$

根据引理 3 有

$$L_d(r,h_n)<C^*(A+\log+T(\rho,f)), \tag{6}$$

对 $L_d(r,L(h_n))$ 不妨考虑 $m\left(r,\frac{L^{(k)}(h_n)}{L(h_n)}\right)$，

根据引理 3 有

$$m\left(r,\frac{L^{(k)}(h_n)}{L(h_n)}\right)<C^*\{A+\log+T(\rho,L(h_n))\},$$

$$T(\rho,L(h_n))=m(\rho,L(h_n))=m\left(\rho,\frac{h_n^{(2)}+a(z)h'_n}{h_n}\right)<m\left(\rho,\frac{h''_n}{h_n}\right)+m(\rho,a(z)).$$

因为 $a(z)$ 在 G 内解析，如果 R 取一定值，则 $m(r,a(z))$ 必有界，所以 $m(\rho,a(z))$ 当 R 取定值时可看作一常数，所以有

$$T(\rho,L(L(h_n)))<C^*\{A+\log+T(\rho,h_n)\},$$

则有　$m\left(r,\frac{L^{(k)}(h_n)}{L(h_n)}\right)<C^*\{A+\log+T(\rho,h_n)\}.$

所以有　$L_d(r,L(h_n))<C^*\{A+\log+T(\rho,h_n)\}$

把式(6)、(7)代入式(5)可得：

$$T(r,h_n)\leqslant B_1+B_2\log+\frac{1}{\rho-r}+B_3\log+T(\rho,h_n),$$

B_1,B_2,B_3 与 n 无关常数. 故有引理 4 可得 $T(1/4,h_n)\leqslant H$，H 为常数. 则有 $\{h_n(z)\}$ 在 $z=0$ 正规，即有 $f_n(z)$ 在 $z=0$ 正规，可得 $g(z)$ 为常数，矛盾. 证毕.

参考文献：

[1]　GU Y. Normal Families of Meromorphic Functions[M]. Chengdu: Sichuan Education Press, 1991.

[2]　YI. H. X., YANG. C. C, The Uniqueness Theory of Meromorphic Functions[M]. Beijing: Science Press, 1995.

[3]　林伟川. 函数与其导数具有公共值的全纯函数族的正规性[J]. 数学学报, 2003, 46(3): 541-543.

[4]　杨乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京：科学出版社, 1982. 109.

[5]　SCHIFF J. L. Normal Families[M]. New York: Spring-Verlag, 1993.

[6]　ZALCMAN L. Hearistic Principle in Complex Function Theory[J]. Amer Math Monthly, 1975, 82: 813-817.

(下转第 72 页)

Numerical Analysis for Torsion of Prismatic Bars with Sectorial Cross-section

FENG Xian-gui, YIN Gang
(College of Resource and Enviroment Science ,Chongqing University, Chongqing 400030,China)

Abstract: In mechanical design and application, in order to calculate torsion angle and shear stresses of prismatic bars with sectorial cross-section undergoing external couples, the numerical method is presented. The torsion equation is non-homogeneous partial differential equation. First, using the method of separation of variables, torsion stress function is acquired in polar coordinate. Then, the method of boundary collocation is improved to calculate the undetermined parameters. Finally, approximate numerical solutions of stress function and shear stresses in cross-section are obtained. It is given the several calculation results of shear stresses of prismatic bars with different vertex angles. These results show that the method has some precision and application feasibility in engineering design. The method of separation of variables is combinied with the method of boundary collocation simplified calculation process.
Key words: torsion; sectorial cross - section; method of separation of variables; method of boundary collocation

(编辑 姚 飞)

(上接第 63 页)

Differential Polynormial with Analytic Function And Shared Values

FENG Bin [1], *YANG Pai* [1], *LIU Jia-ying* [2]
(1. Departmeng of Mathematics, Chongqing University, Chongqing 400030, China;
2. Chongqing Pharmacentical College, Chongqing 400051, China)

Abstract: Let F be a family of function which are holomorphic in a domain G , and $a(\neq 0)$ be finite complex value. If $L = f'' + a(z)f'$ and f sharedvalue a (IM), and $f' = L' = a$ when $f = a$. Then F is normal on G .
Key words: Holomorphic function; normal family; shared value

(编辑 张小强)