

文章编号:1000-582X(2006)05-0069-04

扇形截面杆扭转的数值分析*

冯贤桂, 尹刚

(重庆大学 资源与环境科学学院, 重庆 400030)

摘要:在机械设计与应用中,为了计算扇形截面杆在外力偶作用下,杆的扭转角和横截面上的剪应力,提出了一种数值计算方法.柱体扭转的基本方程为非齐次偏微分方程,在极坐标系下,利用分离变量法及特解法,求出扭转应力函数,再由边界配置法计算出满足扭转问题边界条件的待定常数,得到了扭转应力函数的近似数值解,进一步即可计算横截面上的剪应力.给出了几种不同顶角的扇形截面杆的剪应力与扭转刚度,计算结果表明,这种方法具有足够的精确度,有一定实用价值.分离变量法与边界配置法的结合,简化了计算过程,适宜于工程设计应用.

关键词:扭转;扇形截面;分离变量法;边界配置法.

中图分类号:0343

文献标识码:A

各种机器设备及工程结构中,大量应用着各种承受扭转外力偶作用的杆件.这些扭转杆件的横截面,除了用得最广泛的圆形截面外,由于结构设计的需要,还采用其他形状的截面,例如矩形截面、三角形截面、扇形截面等.将分离变量法与边界配置法相结合,可以求得扇形截面杆扭转变形时的转角及横截面上剪应力的数值计算结果.这种方法在工程设计应用中比较方便,并且有足够的计算精确度.

1 等截面杆扭转的基本方程

极坐标系如图1所示,扇形截面的顶角为 2α ,扇形的顶点取在极点 O ,图形对称于 x 轴.扇形所围的平面区域用 D 表示,边界用 ∂D 表示.

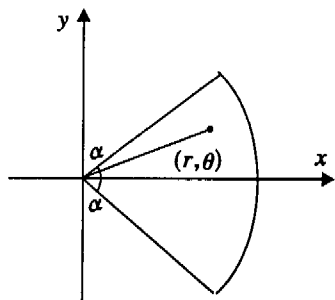


图1 扇形截面极坐标

由弹性力学可知^[1],截面形状为单连通区域的等截面杆件扭转微分方程及边界条件,在平面极坐标系下为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} &= -2GK \quad (\text{在区域 } D \text{ 内}) \\ \varphi &= 0 \quad (\text{在边界 } \partial D \text{ 上}) \end{aligned} \quad (1)$$

其中, φ 为扭转应力函数; G 为杆件材料的剪切弹性模量; K 为杆件单位长度上的扭转角.

横截面上的扭矩 T ,杆件的抗扭刚度 J 按下式计算

$$\left. \begin{aligned} T &= 2 \iint_D \varphi r dr d\theta \\ J &= \frac{T}{GK} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

当扭转应力函数 φ 确定后,就可以计算扇形截面杆横截面上的剪应力

$$\tau_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \quad \tau_{\theta} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad (3)$$

扇形截面杆的扭转问题归结为求解泛定方程(1),使扭转应力函数满足相应的边界条件.进一步可以求得杆件横截面上各点的剪应力,对扭转杆件作强度与刚度计算,以满足工程设计的需求.

2 扭转基本方程的求解

2.1 非齐次泛定方程的解

泛定方程(1)为非齐次线性偏微分方程,可以先用特解法将它转化为齐次泛定方程,然后再用分离变

* 收稿日期:2005-12-12

作者简介:冯贤桂(1946-),男,湖北武汉人,重庆大学教授,主要从事工程力学的教学与研究.

量法求解^[2]. $\varphi_0 = -\frac{1}{2}GKr^2$ 为满足泛定方程(1)的一个特解,因此可以设 $\varphi = \varphi_1 + \varphi_0 = \varphi_1 - \frac{1}{2}GKr^2$, 代入泛定方程(1), 得到如下齐次泛定方程及定解条件

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} & \quad (\text{在区域 } D \text{ 内}) \\ \varphi_1 & = \frac{1}{2}GKr^2 \quad (\text{在边界 } \partial D \text{ 上}) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

可以用分离变量法求解齐次泛定方程(4), 设 $\varphi_1 = R(r)\Theta(\theta)$, 代入方程(4), 经分离变量后, 得到常微分方程

$$\left. \begin{aligned} \Theta'' + n^2 \Theta & = 0 \\ r^2 R'' + rR' - n^2 R & = 0 \\ n & = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

对 $n=0$ 和 $n \neq 0$ 这 2 种情况, 求解以上微分方程, 可得到 $R(r)$ 和 $\Theta(\theta)$ 的解, 组过组合后即可求得非齐次泛定方程(1)的通解

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n}) \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n r^n + D_n r^{-n}) \cdot \sin n\theta + A_0 + B_0 \ln r + (C_0 + D_0 \ln r)\theta - \frac{1}{2}GKr^2, \quad (6)$$

在扇形截面顶点, 即 $r \rightarrow 0$ 处, φ 应为有限值, 故有

$$B_n = D_n = B_0 = D_0 = 0.$$

另外由 φ 的单值条件及对称性, 可以得到

$$C_n = C_0 = 0.$$

所以式(6)最后简化为

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \cos n\theta + A_0 - \frac{1}{2}GKr^2, \quad (7)$$

并且应满足边界条件

$$\varphi = 0 \quad (\text{在边界 } \partial D \text{ 上}).$$

2.2 待定常数 A_n 的确定

利用边界配置法^[3]可以确定式(7)中的待定常数 $A_n (n = 1, 2, \dots)$. 对于扇形截面, 边界上各点应满足 $\varphi = 0$, 由于极点处的 $r = 0$, 代入式(7), 得到 $A_0 = 0$. 如果取极点 O 为配置点, 则式(7)变为

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \cos n\theta - \frac{1}{2}GKr^2. \quad (8)$$

在扇形区域的边界上, 除极点 O 外, 另取 N 个配置点 $(r_i, \theta_i), i = 1, 2, \dots, N$, 待定常数 A_n 也取为 N 个. 令各配置点的 φ 值为零

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^N A_n r_i^n \cos n\theta_i - \frac{1}{2}GKr_i^2 & = 0, \\ i & = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

上式为边界配置法确定待定常数 $A_n (n = 1, 2, \dots, N)$ 的基本公式. 由式(9)可以得到待定常数 A_n 的线性方程组, 求解方程组即可求得 A_n , 确定应力函数 φ 的数值计算结果

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=1}^N A_n r^n \cos n\theta - \frac{1}{2}GKr^2. \quad (10)$$

利用式(10)可以计算出扇形横截面上各点的剪应力 τ_r 及 τ_{θ} 的近似值. 合理选择边界上的配置点, 可以提高计算结果的精确度. 一般情况下可以采用均匀配置法, 如果用加权残值法来计算 A_n , 则效果会更好.

3 数值计算应用

设一扇形截面顶角为 $\frac{\pi}{3}$, 半径 $R = 1$, 如图 2 所示, 在扇形圆弧及直边上选取 8 个配置点 $(0.2, \frac{\pi}{6}), (0.4, \frac{\pi}{6}), (0.6, \frac{\pi}{6}), (0.8, \frac{\pi}{6}), (1.0, \frac{\pi}{6}), (1.0, 0), (1.0, \frac{\pi}{18}), (1.0, \frac{\pi}{9})$. 利用对称性, 只在一半边界上选择配置点.

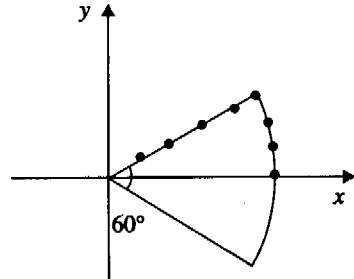
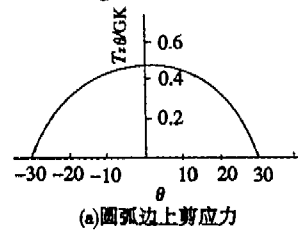


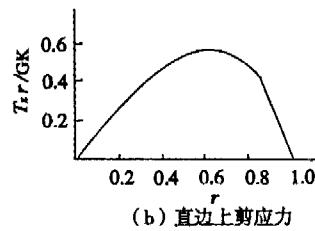
图 2 边界配置点

将各点的坐标值代入式(9), 即得到 $A_n (n = 1, 2, \dots, 8)$ 的线性方程组, 解出 A_n 各个值后, 即可得到扭转应力函数 φ 的近似值. 由式(2)及式(3)计算出扇形截面杆的扭转刚度 $J = 0.034 97$, 最大剪应力 $\tau_{\theta \max} = 0.452 7 GK$, 发生在扇形圆弧边的中点(即 $\theta = 0$)处; $\tau_{r \max} = 0.488 6 GK$, 位于扇形直边上 $r = 0.57R$ 处.

图 3 所示顶角为 $\frac{\pi}{3}$ 的扇形截面杆, 圆弧边上剪应力 τ_{θ} , 直边的剪应力 τ_r 的分布情况.



(a) 圆弧边上剪应力



(b) 直边上剪应力

图 3 扇形边界上的剪应力

对于不同顶角 $\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ 的扇形截面杆的扭转问题,都可以按以上计算方法,由式(3)计算横截面上的最大剪应力,利用式(2)可以求得杆件的抗扭

刚度 J 等,主要计算值列于表1中.数值计算结果与文献[4]利用差分法得到的解答十分接近.

表1 计算结果及与差分解答对比

顶角	配置点数目	扭转刚度 J		τ_{rmax}/GK		$\tau_{\theta max}/GK$	
		文中值	文献[4]值	文中值	文献[4]值	文中值	文献[4]值
$\pi/3$	8	0.034 97	0.034 6	0.488 6	0.483 2	0.452 7	0.447 5
$\pi/2$	8	0.082 45	0.082 0	0.594 8	0.592 4	0.557 8	0.557 9
$2\pi/3$	9	0.143 40	0.142 5	0.677 2	0.666 4	0.638 4	0.629 0
π	11	0.297 60	0.297 0	0.847 5	0.837 3	0.726 4	0.726 6
$3\pi/2$	14	0.571 60	0.570 4	1.413 2	1.396 9	0.810 9	0.803 7
2π	17	0.875 20	0.868 8	1.914 7	1.869 6	0.850 7	0.844 7

计算结果表明,最大剪应力 τ_{rmax} 均发生在扇形截面圆弧边的中点处 ($\theta=0$); $\tau_{\theta max}$ 位于直边上,而且当扇形顶角增大时, τ_{rmax} 所在的点向极点 O 方向移动.例如当顶角为 $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi$ 时, τ_{rmax} 分别位于直边上的 $0.57R, 0.45R, 0.31R, 0.05R$ 处,逐步向极点靠近.扇形顶角大于 π 时,极点处的剪应力 τ_r 具有奇异性,即 $r \rightarrow 0$ 时, $\tau_r \rightarrow \infty$,表1中顶角为 $\frac{3\pi}{2}, 2\pi$ 的直边上剪应力 τ_r 为距离极点 $0.05R$ 处的应力值.

扇形截面顶角为 2π 时,横截面是一个带有裂纹的圆截面(图4),此时扭转杆件可视为一个带有沿轴向贯穿的径向裂纹的圆轴,径向裂纹深度 a 等于圆轴的半径 R .由横截面上剪应力的计算结果,可以确定此裂纹体在扭转外力偶作用下,裂纹尖端区域的 III 型应力强度因子 K_{III} 的数值.

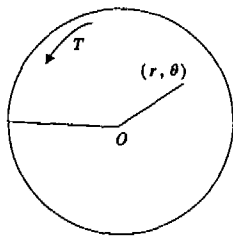


图4 带裂纹的圆截面

由断裂力学理论^[5-6],图4所示裂纹体在扭转时,在线弹性范围内,裂纹尖端附近应力场内的应力 τ_r, τ_{θ} 可以用应力强度因子 K_{III} 来表达. K_{III} 的近似计算公式为

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{\theta}(r, 0). \quad (11)$$

式中 τ_{θ} 的取值点坐标为 $r \ll a, \theta = 0$.

设扇形顶角为 2π ,半径 $R = 1$,可以计算出扭转刚度 $J = 0.875 2, r = 0.01, \theta = 0$ 处的剪应力 $\tau_{\theta} = 3.425 6 GK$,代入式(11)可得 K_{III} 的近似值:

$$K_{III} = \sqrt{2\pi \times 0.01} \times 3.425 6 GK = \sqrt{2\pi \times 0.01} \times 3.425 6 \times \frac{T}{0.875 2} = 0.981 1 T.$$

对于图4所示裂纹体,文献[6]给出的应力强度因子 K_{III} 的准确解为

$$K_{III} = \frac{48 \sqrt{2\pi}}{5(9\pi^2 - 64)} \cdot \frac{T}{a^{5/2}}. \quad (12)$$

式中 T 为横截面上的扭矩, a 为径向裂纹的长度.在图4中, $a = R = 1$,于是由式(12)求得 K_{III} 的精确值为 $K_{III} = 0.969 3T$.

应力强度因子 K_{III} 的近似值与准确解相差为 1.2% ,这说明扇形截面杆扭转剪应力数值计算的结果是足够精确的,同时也表明裂纹尖端应力场的 K 主导区是裂纹尖端附近一个很小的区域,通常有 $r < 0.02a$,这与线弹性断裂力学的结论是一致的.

4 结论

用分离变量法与边界配置法对扇形截面杆的扭转刚度、横截面上的扭转剪应力作了数值计算分析,得到了横截面上的最大剪应力 τ_{rmax} 和 $\tau_{\theta max}$.计算结果具有足够的精确度,而且计算过程简单,便于工程设计应用.由扇形顶角为 2π 时的剪应力计算值,还得到了这一类带裂纹杆件在扭转时的 III 型应力强度因子 K_{III} 的数值解,有益于对这种扭转杆件作进一步的断裂力学分析和计算应用.

参考文献:

- [1] 杨桂通.弹性力学[M].北京:高等教育出版社,1998.
- [2] 柯云泉.偏微分方程边值问题的分离变量解法[J].浙江师范大学学报,2005,28(3):241-245.
- [3] 王元汉.含孔边裂纹板的弯曲断裂计算[J].航空学报,2002,23(6):579-582.
- [4] 李顺才,谢卫红.极坐标系下扇形截面杆扭转问题的有限差分法[J].力学与实践,2003,25(3):26-28.
- [5] 汤任基.裂纹柱的扭转理论[M].上海:上海交通大学出版社,1996.
- [6] 黄维扬.工程断裂力学[M].北京:航空工业出版社,1992.

Numerical Analysis for Torsion of Prismatic Bars with Sectorial Cross-section

FENG Xian-gui, YIN Gang

(College of Resource and Environment Science, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

Abstract: In mechanical design and application, in order to calculate torsion angle and shear stresses of prismatic bars with sectorial cross-section undergoing external couples, the numerical method is presented. The torsion equation is non-homogeneous partial differential equation. First, using the method of separation of variables, torsion stress function is acquired in polar coordinate. Then, the method of boundary collocation is improved to calculate the undetermined parameters. Finally, approximate numerical solutions of stress function and shear stresses in cross-section are obtained. It is given the several calculation results of shear stresses of prismatic bars with different vertex angles. These results show that the method has some precision and application feasibility in engineering design. The method of separation of variables is combined with the method of boundary collocation simplified calculation process.

Key words: torsion; sectorial cross-section; method of separation of variables; method of boundary collocation

(编辑 姚飞)

(上接第 63 页)

Differential Polynormial with Analytic Function And Shared Values

FENG Bin¹, YANG Pai¹, LIU Jia-ying²

(1. Department of Mathematics, Chongqing University, Chongqing 400030, China;

2. Chongqing Pharmaceutical College, Chongqing 400051, China)

Abstract: Let F be a family of function which are holomorphic in a domain G , and $a (\neq 0)$ be finite complex value. If $L = f'' + a(z)f'$ and f shared value a (IM), and $f' = L' = a$ when $f = a$. Then F is normal on G .

Key words: Holomorphic function; normal family; shared value

(编辑 张小强)