

文章编号:1000-582X(2006)06-0127-04

# 一种指数时变需求且生产率不相同的 EPQ 模型\*

陈 晖, 罗 兵, 杨 秀 苔

(重庆大学经济与工商管理学院, 重庆 400030)

**摘 要:**基于短缺量部分拖后的 EPQ 模型, 考虑需求随时间指数增长以及缺货和现货期间生产率不相同对库存管理补充策略的影响, 建立了相应的生产库存模型. 采用 Mathematic 5.0 版软件对模型进行仿真寻优和灵敏度分析, 表明最优解唯一存在, 短缺量拖后系数对系统各项成本的影响比需求增长因子和生产率变化量大, 且对保管成本、缺货成本和丢单成本的影响大于生产调整成本和总成本.

**关键词:**指数时变需求; 短缺量部分拖后; 边生产边需求; EPQ 模型

**中图分类号:**F253.4

**文献标识码:**A

在经典的库存模型中, 通常假定需求率为常数<sup>[1]</sup>. 但现实的市场需求却异常复杂, 大体可分为随机性<sup>[2]</sup>和确定性需求, 其中确定性需求又分为常数、线性时变<sup>[3]</sup>、指数时变<sup>[4-5]</sup>以及更为复杂形式的时变需求<sup>[6]</sup>. 以上研究均假设补充率为无穷大, 实际的库存系统经常是边生产边需求的情况. 罗兵等<sup>[7]</sup>结合某电子企业的实例建立了一种考虑部分短缺量拖后且需求率为常数的生产库存模型, 随后, 罗兵等<sup>[8]</sup>又在文献[7]基础上考虑出空期间短缺量拖后率与是否开始生产有关, 建立了出空期间短缺量拖后率不相同时的生产库存模型. 文献[7-8]的研究均假设生产率为常数, 实际上, 为减少仓库出空期间的缺货和丢单损失, 制造商一般会采取措施提高生产率, 使缺货期间的生产率高于现货阶段.

笔者在罗兵等<sup>[7-8]</sup>研究的基础上, 进一步考虑指数时变需求且生产率不相同的情况, 建立了相应的生产库存模型, 拓宽了文献[7-8]的应用范围.

## 1 假设与符号

参照文献[7-8], 提出以下假设与符号.

假设:

1) 计划期有限, 等周期生产, 每周期生产时间不同, 生产一段时间后停止生产;

2) 每周期开始时缺货, 达到一定缺货量后开始生产, 其生产率大于现货期间的生产率, 每周期缺货时间

相等.

符号:

$H$ : 计划期长度;  $n$ : 计划期生产次数;  $T$ : 生产周期长度;  $T_S$ : 每周缺货时间长度;  $t_{(i-1)4}$ : 第  $i$  周期起始时刻点,  $i=1, 2, \dots, n$ ;  $t_{i1}$ : 第  $i$  周期开始生产时刻点, 此时缺货量最大,  $i=1, 2, \dots, n$ ;  $t_{i2}$ : 第  $i$  周期开始有现货的时刻点,  $i=1, 2, \dots, n$ ;  $t_{i3}$ : 第  $i$  周期停止生产时刻点, 此时现货储备量最大,  $i=1, 2, \dots, n$ ;  $D(t)$ : 产品需求率,  $D(t) = D_0 e^{\alpha t}$ , 其中  $\alpha$  为需求增长因子,  $\alpha > 0$ ;  $\mu$ : 短缺量拖后系数;  $P_1, P_2$ : 分别为缺货和现货期间的生产率,  $P_1 > P_2 > D(t)$ ;  $A$ : 一次生产调整成本;  $C_1$ : 单位产品单位时间保管成本;  $C_2$ : 单位产品单位时间缺货成本;  $C_3$ : 单位产品丢单成本.

## 2 模型的建立

由前面假设知, 生产周期长度  $T = H/n$ , 第  $i$  周期 [ $t_{(i-1)4}, t_{i4}$ ] ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 内,  $t_{(i-1)4} = (i-1)T$ ,  $t_{i2} = (i-1)T + T_S$ ,  $t_{i4} = iT$ , 其中  $t_{i4} = H$ . 计划期库存水平变化如图 1 所示.

第  $i$  周期内的库存水平需满足:

$$\frac{dI_i(t)}{dt} = \begin{cases} -\mu D_0 e^{\alpha t}, & t_{(i-1)4} \leq t \leq t_{i1}; \\ P_1 - \mu D_0 e^{\alpha t}, & t_{i1} \leq t \leq t_{i2}; \\ P_2 - D_0 e^{\alpha t}, & t_{i2} \leq t \leq t_{i3}; \\ -D_0 e^{\alpha t}, & t_{i3} \leq t \leq t_{i4}; \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

\* 收稿日期: 2006-01-15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70571088)

作者简介: 陈晖(1969-), 男, 重庆人, 重庆大学博士研究生, 主要从事物流与供应链管理, 物流规划与决策的研究.

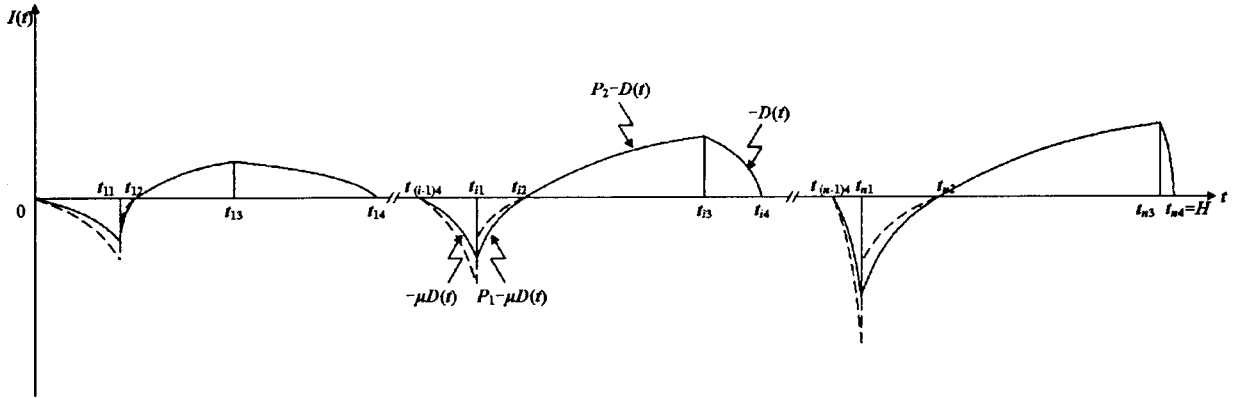


图1 计划期内的库存水平

由边界条件: $I_i(t_{(i-1)4}) = I_i(t_{i2}) = I_i(t_{i4}) = 0, (i = 1, 2, \dots, n)$ , 可得式(1)的解:

$$I_i(t) = \begin{cases} \frac{\mu D_0}{a}(e^{a(i-1)4} - e^{at}) & t_{(i-1)4} \leqq t \leqq t_{i1}; \\ P_1(t - t_{i2}) - \frac{\mu D_0}{a}(e^{at} - e^{at_2}) & t_{i1} \leqq t \leqq t_{i2}; \\ P_2(t - t_{i2}) - \frac{D_0}{a}(e^{at} - e^{at_2}) & t_{i2} \leqq t \leqq t_{i3}; \\ \frac{D_0}{a}(e^{at_4} - e^{at}) & t_{i3} \leqq t \leqq t_{i4}; \end{cases} \quad i=1,2, \dots, n. \quad (2)$$

由最大缺货量  $I_i(t_{i1}^-) = I_i(t_{i1}^+) (i = 1, 2, \dots, n)$ , 有:

$$\begin{aligned} \frac{\mu D_0}{a}(e^{a(i-1)4} - e^{at_1}) &= P_1(t_{i1} - t_{i2}) - \\ &\frac{\mu D_0}{a}(e^{at_1} - e^{at_2}), \quad i=1,2, \dots, n. \end{aligned}$$

可得:

$$t_{i1} = \frac{\mu D_0}{a P_1}(e^{a(i-1)4} - e^{at_2}) + t_{i2}, \quad i=1,2, \dots, n. \quad (3)$$

由最大储备量  $I_i(t_{i3}^-) = I_i(t_{i3}^+) (i = 1, 2, \dots, n)$ , 有:

$$\frac{D_0}{a}(e^{at_4} - e^{at_3}) = P_2(t_{i3} - t_{i2}) - \frac{D_0}{a}(e^{at_3} - e^{at_2}), \quad i=1,2, \dots, n.$$

可得:

$$t_{i3} = \frac{D_0}{a P_2}(e^{at_4} - e^{at_2}) + t_{i2}, \quad i=1,2, \dots, n. \quad (4)$$

计划期内库存系统的各项成本如下.

生产调整成本:  $nA$  (5)

保管成本:

$$\begin{aligned} TC_h &= C_1 \sum_{i=1}^n \left[ \int_{t_{i2}}^{t_{i3}} [P_2(t - t_{i2}) - \frac{D_0}{a}(e^{at} - e^{at_2})] dt + \right. \\ &\quad \left. \int_{t_{i3}}^{t_{i4}} \frac{D_0}{a}(e^{at_4} - e^{at}) dt \right] = C_1 \sum_{i=1}^n \left[ \frac{P_2}{2}(t_{i3}^2 - t_{i2}^2) + \right. \\ &\quad \left. \frac{D_0}{a^2}(e^{at_4} - e^{at_4}) + \frac{D_0}{a} e^{at_4}(t_{i4} - t_{i3}) + (\frac{D_0}{a} e^{at_2} - P_2 t_{i2})(t_{i3} - t_{i2}) \right] = \\ &\quad \frac{C_1 D_0}{2 a^2 P_2} \sum_{i=1}^n \left[ 2 a P_2 e^{a i T}(T - T_i) - 2 P_2(e^{a i T} - e^{a[(i-1)T+T_i]}) - \right. \end{aligned}$$

$$D_0(e^{a i T} - e^{a[(i-1)T+T_i]})^2 \Big] \quad (6)$$

缺货成本:

$$\begin{aligned} TC_s &= C_2 \sum_{i=1}^n \left[ \int_{t_{(i-1)4}}^{t_{i1}} \left[ \frac{\mu D_0}{a}(e^{at} - e^{at_{(i-1)4}}) \right] dt + \right. \\ &\quad \left. \int_{t_{i1}}^{t_{i2}} \left[ \frac{\mu D_0}{a}(e^{at} - e^{at_2}) - P_1(t - t_{i2}) \right] dt \right] = \\ &= C_2 \sum_{i=1}^n \left[ \frac{P_1}{2}(t_{i1}^2 - t_{i2}^2) + \frac{\mu D_0}{a^2}(e^{at_2} - e^{at_{(i-1)4}}) + \frac{\mu D_0}{a} e^{at_{(i-1)4}} \right. \\ &\quad \left. (t_{(i-1)4} - t_{i1}) + (\frac{\mu D_0}{a} e^{at_2} - P_1 t_{i2})(t_{i1} - t_{i2}) \right] = \\ &= \frac{\mu C_2 D_0}{2 a^2 P_1} \sum_{i=1}^n \left[ -2 a P_1 e^{a(i-1)T} T_i + 2 P_1(e^{a[(i-1)T+T_i]} - e^{a(i-1)T}) \right. \\ &\quad \left. - \mu D_0(e^{a[(i-1)T+T_i]} - e^{a(i-1)T})^2 \right] \quad (7) \end{aligned}$$

丢单成本:

$$\begin{aligned} TC_L &= C_3 \sum_{i=1}^n \left[ \int_{t_{(i-1)4}}^{t_{i1}} (1 - \mu) D_0 e^{at} dt + \right. \\ &\quad \left. \int_{t_{i1}}^{t_{i2}} [(P_1 - \mu D_0 e^{at}) - (P_1 - D_0 e^{at})] dt \right] = \\ &= \frac{C_3(1 - \mu) D_0}{a} \sum_{i=1}^n (e^{a[(i-1)T+T_i]} - e^{a(i-1)T}) \quad (8) \end{aligned}$$

库存系统的总成本函数:

$$\begin{aligned} TC(T, T_i) &= nA + TC_h + TC_s + TC_L = \frac{H}{T} A + \frac{C_1 D_0}{2 a^2 P_2} \cdot \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ 2 a P_2 e^{a i T}(T - T_i) - 2 P_2(e^{a i T} - e^{a[(i-1)T+T_i]}) - \right. \\ &= \frac{\mu C_2 D_0}{2 a^2 P_1} \sum_{i=1}^n \left[ -2 a P_1 e^{a(i-1)T} T_i + 2 P_1(e^{a[(i-1)T+T_i]} - e^{a(i-1)T}) - \right. \\ &\quad \left. \mu D_0(e^{a[(i-1)T+T_i]} - e^{a(i-1)T})^2 \right] \frac{C_3(1 - \mu) D_0}{a} \cdot \\ &\quad \left. \sum_{i=1}^n (e^{a[(i-1)T+T_i]} - e^{a(i-1)T}) \right]. \quad (9) \end{aligned}$$

### 3 算例与灵敏度分析

系统有关数据如下:  $D(t) = 100\ 000e^{0.05t}$  件/年,

$H=1$ 年,  $A=20\ 000$ 元/次,  $C_1=27$ 元/件·年,  $C_2=24$ 元/件·年,  $C_3=12$ 元/件·年,  $\mu=0.80$ ,  $P_1=950\ 000$ 件/年,  $P_2=550\ 000$ 件/年.

用 mathematica 5.0 版软件进行逐步迭代寻优, 结果如表 1 所示. 随着生产周期缩短, 缺货时间占生产周期的比例减小, 保管、缺货和丢单成本持续减少, 开始时生产调整成本增大, 且增加量大于上述成本的减少额, 因此总成本下降, 并在生产周期为 61 天时达到最小, 之后生产调整成本的增加量大于其余成本的减少额, 总成本逐步上升.

表 2 显示了需求增长因子  $\alpha$  对库存系统各变量的影响. 随着  $\alpha$  的变大, 生产周期、缺货时间和生产调整成本不变, 由于市场外部总需求量增加, 因此包括总成本在内的其余成本均持续增大.

表 3 显示了短缺量拖后系数  $\mu$  对库存系统各变量的影响. 在  $\mu$  小于 0.7 时, 丢单成本很大, 因此, 系统不允许缺货; 随着  $\mu$  的增大, 生产周期变长, 缺货时间占生产周期的比例变大, 生产调整成本减少, 缺货成本增加, 保管、丢单和总成本开始时增加, 然后减少; 此外, 在  $\mu$  较大时, 总成本受  $\mu$  的影响较大, 因此应尽量使  $\mu$  保持在较高水平.

表 4 显示了生产率变化量对库存系统各变量的影响. 随着  $P_1$  的增加, 生产周期、缺货时间和生产调整成本不变, 缺货成本出现波动, 丢单成本下降, 保管和总成本持续上升; 另外, 因为缺货期内的生产时间很短, 所以总成本受  $P_1$  的影响很小.

表 1 生产周期和缺货时间对系统各项成本的影响

元/年

生产周期 $T/d$	缺货时间 $T_s/d$	生产调整成本	保管成本 $TC_h$	缺货成本 $TC_c$	丢单成本 $TC_l$	总成本 $TC$
365	182	20 000.00	286 747.00	220 491.00	121 291.00	648 528.00
183	80	40 000.00	178 986.00	85 629.30	107 085.00	411 700.00
122	46	60 000.00	146 693.00	42 203.40	92 126.90	341 023.00
91	29	80 000.00	132 385.00	22 264.40	77 288.50	311 938.00
73	19	100 000.00	125 493.00	11 606.00	62 399.50	299 498.00
61	12	120 000.00	122 299.00	5 599.56	47 485.30	295 384.00
52	7	140 000.00	121 215.00	2 255.77	32 556.60	296 027.00
46	3	160 000.00	121 448.00	578.00	17 618.90	299 645.00

表 2 需求增长因子  $\alpha$  对生产周期、缺货时间和各项成本的影响

元/年

$\alpha$	生产周期 $T/d$	缺货时间 $T_s/d$	生产调整成本	保管成本 $TC_h$	缺货成本 $TC_c$	丢单成本 $TC_l$	总成本 $TC$
0.01	61	12	120 000.00	120 225.00	5 513.26	46 665.70	292 404.00
0.03	61	12	120 000.00	121 259.00	5 556.20	47 072.90	293 888.00
0.05	61	12	120 000.00	122 299.00	5 599.56	47 485.30	295 384.00
0.07	61	12	120 000.00	123 652.00	5 585.17	47 655.00	296 892.00
0.09	61	12	120 000.00	124 708.00	5 628.92	48 075.50	298 412.00

表 3 短缺量拖后系数  $\mu$  对生产周期、缺货时间和各项成本的影响

元/年

$\mu$	生产周期 $T/d$	缺货时间 $T_s/d$	生产调整成本	保管成本 $TC_h$	缺货成本 $TC_c$	丢单成本 $TC_l$	总成本 $TC$
0.70	46	0	160000.00	140727.00	0.00	0.00	300721.00
0.75	52	1	140000.00	152321.00	92.67	8491.70	300905.00
0.80	61	12	120000.00	122299.00	5599.56	47485.30	295384.00
0.85	61	17	120000.00	98159.40	12162.60	51084.20	281406.00
0.90	73	28	100000.00	85007.40	29769.00	47413.20	262190.00
0.95	73	33	100000.00	68701.60	42067.10	27518.00	238287.00

表 4 生产率变化量对生产周期、缺货时间和各项成本的影响

元/年

$P_1$ (件/年)	生产周期 $T/d$	缺货时间 $T_s/d$	生产调整成本	保管成本 $TC_h$	缺货成本 $TC_c$	丢单成本 $TC_l$	总成本 $TC$
600 000	61	13	120 000.00	122 255.00	6 544.41	50 922.10	299 722.00
700 000	61	13	120 000.00	122 168.00	7 271.82	53 377.20	302 817.00
800 000	61	14	120 000.00	122 229.00	7 811.83	55 095.9	305 137.00

## 4 结论

笔者在罗兵等研究的基础上,建立了考虑需求指数时变和有无现货期间生产率不相同的生产库存模型.仿真寻优和灵敏度分析表明,由于缺货期内的生产时间较短,因此,短缺量拖后系数和需求增长因子对生产周期、缺货时间和系统各项成本的影响比生产率变化量显著,其中短缺量拖后系数的影响最大,在拖后系数较大时尤其如此.

### 参考文献:

- [1] 《运筹学》教材编写组. 运筹学(修订版)[M]. 北京:清华大学出版社,1990.
- [2] GALLEGO G, MOON I. The Distribution Free Newsboy Problem: Review and Extensions[J]. Journal of the Operational Research Society, 1993,44(8):825-834.
- [3] KUN - JEN CHUNG, SUI-FU TSAI. Inventory Systems for Deteriorating Items With Shortages and a Linear Trend in Demand-taking Account of Time Value[J]. Computers and Operations Research, 2001, 28(9):915-934.
- [4] HARIGA, MONCER A, BENKHEROUF, et al. Optimal and Heuristic Inventory Replenishment Models for Deteriorating Items With Exponential Time-varying Demand[J]. European Journal of Operational Research, 1994, 79(1):123-137.
- [5] 罗兵, 杨帅, 熊中楷. 短缺量拖后率、需求和采购价均为时变的变质产品 EOQ 模型[J]. 中国管理科学, 2005, 13(3):44-49.
- [6] 韩松, 何崇仁, 刘建平. 需求为任意次函数存贮模型的最优解[J]. 系统工程, 2003, 21(4):20-22.
- [7] 罗兵, 杨秀苔, 熊中楷. 部分短缺量拖后时的边生产边需求 EOQ 模型及应用[J]. 系统工程, 2002, 20(2):46-50.
- [8] 罗兵, 卢娜, 杨帅, 等. 短缺量拖后率不相同时的边生产边需求 EOQ 模型[J]. 系统工程, 2005, 23(5):120-123.

## EPQ Model with Exponential Time-varying Demand and Different Productivities

CHEN Hui, LUO Bing, YANG Xiu-tai

(College of Economics and Business Administration, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

**Abstract:** Based on the former EPQ models with partial backlogging, this paper develops an EPQ model with exponential time-varying demand and different productivities. The existence of unique optimal solution is discussed by Mathematica 5.0. A numerical example and sensitivity analysis show that the impact of backlogging parameter on all the costs is greater than that of demand increasing factor and productivity during shortage period, and the impact of backlogging parameter on holding cost, shortage cost and opportunity cost due to lost sale is greater than that on setup cost and total cost.

**Key words:** exponential time-varying demand; partial backlogging; production while demanded; EPQ model

(编辑 姚 飞)