文章编号:1000 - 582X(2006)06 - 0154 - 04

金融风险测度的 CVaR 方法*

殷文琳,蒲勇健
(重庆大学 工商管理学院,重庆 400030)

摘　要:风险的准确度量是进行有效风险管理的先决条件,在理论与实务均具有重要意义.目前被广为接受的在险价值风险计量方法具有难以克服的缺陷.以条件在险价值为研究对象,介绍了条件在险价值的基本概念,并在与在险价值进行比较的基础上,给出基于条件在险价值的计量模型以及其在投资组合管理中的应用.

关键词:条件在险价值;风险管理;金融
中图分类号:F830　　**文献标识码**:A

金融风险是经济风险的集中体现.金融风险的产生来自金融变量的波动,表现为因信息不完全或不对称使决策者无法确知价格的当前和未来水平,从而导致的获利或损失的可能性[1].金融风险使经济体经常处于动荡之中,与经济的平稳发展要求不符,因此对金融风险的管理一直是金融领域重要而核心的问题.通过对风险的识别、计量、决策与监控,减少风险带来的不确定性,最终达到优化资源配置的目的.

对金融风险的测度、计量是金融风险管理中重要的一环.当前的研究大多集中于对在险价值 VaR 及其度量方法的介绍,关于此方面的研究已经比较成熟.对于其他的风险计量手段则较少提及,而且,理论上不够完备,或是计算上欠简洁,使这些测度方法远未得到学术界的广泛认可,在实际应用中也大受限制.

笔者拟以一种新的金融风险测度方法,条件在险价值 CVaR 为研究对象,在指出 VaR 诸多缺陷的基础上,阐述了 CVaR 的概念,介绍了其与 VaR 的区别及其优越性,着重于给出 CVaR 的基本计算方法和在投资组合模型中的应用.

1　CVaR 模型及投资组合优化

1.1　VaR 体系及其内在缺陷

当前应用广泛的 VaR 风险计量方法是指在险价值(Value-at-risk),是一种风险管理与控制的新工具,是指在正常的市场条件和给定的置信水平上,在给定的持有期间内,投资组合所面临的潜在最大损失,或者说,在正常的市场条件和给定的期间内,投资组合发生 VaR 损失的概率仅为给定的概率水平(置信水平),数学定义式为:

$\alpha = \mathrm{Prob}(-\Delta V \leqslant \mathrm{VaR}) = F_{\Delta V}(-\mathrm{VaR})$,等价于 $\mathrm{VaR} = F_{\Delta V}{}^{-1}(\alpha)$.

α 是概率,ΔV 是资产组合在给定期间的价值变化量,$F_{\Delta V}$是描述资产组合价值变化的分布函数.

VaR 体系以统计学为基础,用概率分布描述资产的未来价值波动,以货币计量单位来表示风险管理的核心——潜在损失,具有简洁明了,说明能力强,可比性好的优点,方法规范,对信息披露、资源配置、绩效评价、统一监管等功能也起了较好作用[2].因此,VaR 自一提出便受到广泛欢迎,巴塞尔银行监管委员会于 1996 年推出的巴塞尔协议的补充规定中,明确提出基于银行内部 VaR 值的内部模型法,并要求作为金融机构计量风险的基本方法之一.根据 Chance(2001)和 Hull(2003)的研究报告,VaR 风险计量已在发达国家的公司财务人员、市场交易者、基金管理人员和金融机构中得到普遍应用.

一般认为,一个良好的风险测度方法应具备以下几个标准,单调性(monotonous),次可加性(sub-additive),齐次性(positively homogeneous)和转换不变性(translation invariant).其中,次可加性由于与风险分散的基本要求相关,被认为是风险测度方法的必需条件

* 收稿日期:2006 - 01 - 22
作者简介:殷文琳(1980 -),女,山东青岛人,重庆大学硕士生,主要从事金融经济的研究.

(Carlo Acerbi 和 Dirk Tasche, 2001)[3]，令人遗憾的是，Artzner, Delbaen, Eber 和 Heath(1999)证明，VaR 缺乏次可加性，因此也就不是一致性(coherence)风险度量. 例如，资产组合的 VaR 值会大于组合中各项资产的 VaR 值之和，这不仅与投资上要求分散化以降低风险的要求背道而驰，进一步来说，也阻碍了金融机构进行总体风险的有效管理. 除此之外，VaR 还具有以下这些不能让人满意的特性：1)在进行情景分析时，VaR 由于不满足凸性要求，难以对投资组合进行优化. 2) VaR 存在多个局部极值点，在数学上难以实现唯一极值，在经济意义上也不尽合理. 3)实证发现，大多金融工具市场价格的变化都呈现肥尾现象(fat tails)，反映在 VaR 中就是影响风险值的准确计量(Duffie, Pan, 1997). 此外，VaR 给出了一个阀值，虽能以较大概率保证损失不超出分位数，但对极端事件的发生却缺乏预料与控制，这被称为尾部风险.

针对 VaR 的这些缺陷，有学者提出诸多手段试图替代 VaR，如 Carlo Acerbi 和 Dirk Tasche(2001)的预期短缺，李仲飞(2003)[4]的在险收益，郑俊(1996)绝对偏差，徐绪松(2002)的半绝对离差等风险度量方法. 然而，理论上不够完备，或是计算上缺乏简洁性，使得这些测度方法并未得到学术界的广泛认可，在实际应用中也大受限制.

Rockafeller R. T. 与 S. Uryasev[5]于 2000 年在 The Journal of Risk 上发表文章，在对 VaR 模型进行修正的基础上，正式提出 CVaR 的概念，译为条件在险价值(Conditional Value-at-Risk, CVaR)，是指损失超出 VaR 的条件均值，也称平均超值损失(Mean Excess Loss)，平均短缺(Mean shortfall)和尾部 VaR(Tail VaR). CVaR 代表了超额损失的期望水平，与 VaR 相比，具有良好的次可加性，能够较好地满足凸性要求，在数学上也呈现出单调性，而且 Rockafeller R. T. 与 S. Uryasev 不仅成功地用线性规划和不平滑极值求解(nonsmooth optimization algorithms)解决了 CVaR 的计算问题，还证明在正态分布下，CVaR 与 VaR 的计算结果可以等同，即在一定的置信水平下，两者提供相同的最优投资组合，这为 CVaR 模型的发展铺平了道路，也使得 CVaR 可以很好的应用于大型投资组合和复杂的情景分析中.

CVaR 具有以上的优良特性，它尽管还未成为金融业计量风险的普遍标准，但在发达国家的保险业中已有了相当应用[6-9]，我们有理由相信 CVaR 的广阔前景.

1.2 CVaR 模型

定义 f: $IR^n \times IR^m \to R$ 为损失函数，$x \in IR^n$，$y \in IR^m$，x 是决策变量，在实际中代表金融工具，y 是随机变量，一般代表金融工具的收益率，$p: IR^m \to IR$ 为 y 的分布函数，β 是置信水平，则 f 的分布函数 $\psi(x,\alpha)$ 由下式给出，代表了损失不超出临界值 α 的概率：

$$\psi(x,\alpha) = \int p(y)\mathrm{d}y,$$
$$f(x,y) \leqslant \alpha. \tag{1}$$

式(2)即为 VaR 的表达式，也叫分位数函数：

$$\mathrm{VaR} = \min\{\alpha \in IR: \psi(x,\alpha) \geqslant \beta\}. \tag{2}$$

CVaR 被定义为损失超出 VaR 时的预期值，因此下式即为数学表达式，也称超额损失函数：

$$\mathrm{CVaR} = (1-\beta)^{-1}\int f(x,y)p(y)\mathrm{d}y,$$
$$f(x,y) \geqslant \mathrm{VaR}, \tag{3}$$

X 是可行集，且 $X \subset \mathrm{IR}^n$.

式(3)对 CVaR 进行了数学定义，但 VaR 定义式也包含其中，造成计算上的困难，考虑进行简化. 可证，CVaR 函数位于 X 集合上，且式(3)右边等价于：

$$\alpha + (1-\beta)^{-1} + \int (f(x,y)-\alpha)^{+} p(y)\mathrm{d}y,$$
$$y \in IR^m. \tag{4}$$

令为 $F_\beta(x,\alpha)$，其中，$(f(x,y)-\alpha)^{+} = \max\{0,(f(x,y)-\alpha)\}$.

因此：$\min\limits_{x\in X,\alpha} F_\beta(x,\alpha) = \min\limits_{x\in X}\mathrm{CVaR}$

(x^*,α^*)为 $\min F_\beta(x,\alpha)$的解，则 α^* 即为最小 VaR 值，x^* 为最优投资组合，$F_\beta(x^*,\alpha^*)$即为最小 CVaR. 这样，便可以同时得到需要的 VaR 值和 CVaR 值.

实际对 $F_\beta(x,\alpha)$进行计算中，难点是其中积分的计算，可以根据不同性质考虑不同的计算方法. 若 $p(y)$与 $f(x,y)$均平滑可导，且 $f(x,y)$对 y 的梯度不为 0，则 $F_\beta(x,\alpha)$也平滑可导，可以通过求导运算. 在更一般的情况下，若不具备求导条件，可以通过非线性规划进行计算. 以下的具体运算不再赘述！

在基本模型的实际应用中，往往要增加一些对参数取值的限制条件，例如，权重的大小，资产组合是多头或是空头等，这些限制是为了使模型与现实更好的耦合，不属于模型的基本框架，可以根据实际情况灵活处理.

1.3 模型的应用——投资组合优化

如前所述，y 在实际中代表金融资产的收益率，是个随机变量，y 的分布一般未知. 文中假设 y 服从正态分布，在正态分布下比较 VaR 和 CvaR 2 种计量方法给出的不同风险约束，进而比较对选取最优投资的影响. 表示符号与 1.2 中的一致.

变量 y 的分布函数 $\psi(.)$服从正态分布，β 为置信

水平,设 $p(.)$ 是正态分布的密度函数,$\sigma(x)$ 为资产 x 的标准差,$E(x)$ 是资产 x 的期望收益率,并令 $Z=-\psi^{-1}(1-\beta)$,根据 VaR 与 CVaR 的定义,得到:

$$\mathrm{VaR}=Z\sigma(x)-E(x)\ , \tag{5}$$

$$\mathrm{CVaR}=K\sigma(x)-E(x)\ , \tag{6}$$

其中, $K=\dfrac{-\int_{-\infty}^{-Z}xp(x)\,\mathrm{d}x.}{1-\beta}$.

先来考虑 VaR 约束:$\mathrm{VaR}\leqslant V$, V 是 VaR 边界,根据式(5),将 VaR 约束式变形,得到:

$$E(x)\geqslant Z\sigma(x)-V. \tag{7}$$

再看 CVaR 约束:$\mathrm{CVaR}\leqslant C$, C 是 CVaR 边界,根据式(6),同理可得:

$$E(x)\geqslant K\sigma(x)-C. \tag{8}$$

从式(8)我们可以看出:满足 CVaR 给出的限制条件的资产组合在收益率－方差平面上,全部不低于一条截距为 $-C$,斜率为 K 的直线,随着 C 的变小,这条直线的截距会增加;直线的斜率也会随着置信水平的提高而增加(见图 1). 比较式(7)、(8)两式,由于可证 $K>Z$,因此表现在图形上,是 CVaR 约束线高于 VaR 约束线,这意味着 CVaR 对风险的限制比 VaR 严格,换句话说,在采用 CVaR 进行风险计量时,如果要得到和 VaR 一样的最优投资结果,置信水平的选取要比 VaR 中的略高.

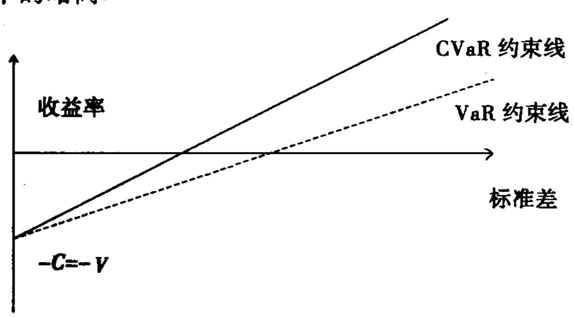

图 1　收益率-标准差平面上的 2 种风险约束对照

1.4　CVaR 模型的进一步简化

在给出例子之前,首先把 CVaR 的极小值计算进一步演化为 LP 线性规划问题.

我们从密度函数 p(.) 中抽取一样本 $Y_j, j=1,2,\ldots,J$. 在实际运作中,可以根据历史数据观察得到投资组合的各资产价格,也可以采用 Monte Carlo 模拟法获得. 由于资产数目已定,则式(4)即为:

$$\alpha+((1-\beta)J)^{-1}\sum_{j=1}^{J}(f(x,y_j)-\alpha)^{+}. \tag{9}$$

其中,$(f(x,y_j)-\alpha)^{+}=\max\{0,(f(x,y_j)-\alpha)\}$. 由数学知识可知,若 $f(x,y)$ 对 x 是线性函数,那么式(9)必为凸函数,且为分段线性函数. 引入虚变数 Z_j, $j=1,2,\ldots,J$,则,$F_\beta(x,\alpha)$ 函数极小值运算等同于下列 LP 线性规划问题的求解:

$$\min\alpha+((1-\beta)J)^{-1}\sum_{j=1}^{J}Z_j, \tag{10}$$

$$Z_j\geqslant f(x,y_j)-\alpha, Z_j\geqslant 0, j=1,2,\ldots,J.$$

$$x\in X \tag{11}$$

2　实例分析

现某人持有一资产组合,由一定量的股票与国债组成,期限为一年. 为简便起见,假设国债收益率与股票收益率在未来一年中的变化均服从正态分布(这个假设可能与现实有所出入,笔者的目的是说明 CVaR 风险计量的作用,这种出入可以暂且忽视). 在该资产组合的方差－协方差矩阵、相关系数矩阵等数据由表 1 给出.

表 1　某人资产组合情况表

资产	相关系数矩阵		方差－协方差矩阵		头寸(元)
国债	1	－0.2	0.000 40	－0.000 03	1 000
股票	－0.2	1	－0.000 03	0.005 63	1 000

股票的分布密度服从 $\varphi_{0,1}(x)$,国债的分布密度服从 $\varphi_{0,3}(x)$. 置信水平 β 选取为 95%,则容忍值 α 为 0.05. 将以上数据代入 CVaR 模型,得到:

$$\min 0.05+(0.05J)^{-1}\sum_{j=1}^{2}Z_j,$$

$$Z_1\geqslant f(x,y_1)-0.05,$$

$$Z_2\geqslant f(x,y_2)-0.05.$$

行文至此,计算思路已经比较明了,但需要用到 CPLEX 软件处理线性规划. 以下的具体计算过程不再赘述. 计算结果:组合的 CVaR 为 186.59 元,即在未来一年中,在 95% 的概率下,该投资组合的平均超额损失为 186.59 元.

3　结　语

VaR 作为一种风险度量与控制的工具,已经被广泛接受和应用. 笔者在陈述 VaR 风险度量诸多不足的基础上,介绍了一种新的风险度量方法 CVaR, CVaR 以其概念的更合理,计算的优化,正在受到学者的青睐,相信会得到更加广泛的应用. 由于 CVaR 的概念根源于 VaR,因此文章在给出 CVaR 的概念和计算方法时,偏重于和 VaR 的比较. 最后,文章在正态分布下给出了应用 CVaR 对投资组合优化的影响,并用一实例加以说明. 对于非正态分布下,2 种风险计量方法的比较与影响还有待进一步的研究.

参考文献:

[1] 张亦春,许文彬.金融与金融风险的经济学再考察[J].金融研究,2002,(3):65-73.

[2] 陈忠阳.金融风险分析与管理研究[M].北京:中国人民大学出版社,2001.

[3] CARLO ACERBI, DIRK TASCHE. Expected Shortfall: A Natural Coherent Alternative to Value at Risk[EB/OL]. http://www.gloriamundi.org,2001-09-20.

[4] 李仲飞,汪寿阳.EaR风险度量与动态投资决策[J].数量经济技术经济研究,2003,(1):45-51.

[5] STANISLAV URYASEV. Conditional Value-at-Risk: Optimization Algorithms and Applications [J]. Financial Engineering News, 2002,2(3):49-57.

[6] 刘小茂,李楚霖,王建华.风险资产组合的均值-CVaR有效前沿[J].管理工程学报,2003,(1):29-32.

[7] 荣喜民,张喜彬,张世英.组合证券投资模型研究[J].系统工程学报,1998,13(1):81-88.

[8] 杨晓光,马超群,文月华.VaR之下厚尾分布的最优资产组合的收敛性[J].管理科学学报,2002,(1):65-68.

[9] 陈学华,杨辉耀.VaR-APARCH模型与证券投资风险量化分析[J].中国管理科学,2003,(1):22-27.

Financial Risk Measurement: CVaR

YIN Wen-lin, PU Yong-jian

(College of Economics and Business Administration, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

Abstract: The precise measurement to risks is principal for the effective risk management, both major in theory and practice. Value-at-Risk, a widely accepted risk measure, has some deadly deficiencies. The authors introduce a new risk measure, Conditional-Value-at-Risk, which comes into being based on the VaR measure. They introduce CVaR's definition and the risk-measuring model on it and also its applications in portfolio management, comparatively with VaR measure.

Key words: Conditional-Value-at-Risk; risk management; finance

(编辑 姚 飞)

重庆大学学报(自然科学版)编辑部敬告作者

为保证论文学术评价的公正性,我刊稿件一律实行双盲审稿制,凡投到我刊的稿件,满3个月后方可到编辑部查询。