文章编号:1000 - 582X(2006)09 - 0075 - 06

# 最高阶元素个数为 52p 的有限群*

晏燕雄[1,2],陈贵云[2],何立官[3]
(1. 重庆教育学院 数学系,重庆 400067;2. 西南大学,数学与财经学院,重庆 400715;3. 重庆师范大学,重庆 400047)

**摘 要**:讨论了群的最高阶元素个数为 $52p$ 的有限群,得到:如果 $G$ 是最高阶元素个数为 $|M(G)| = 52p$ 的有限群,其中素数 $p$ 大于 5,则 $G$ 是可解群.

**关键词**:有限群;可解群;元素的阶
**中图分类号**:O152.1 **文献标识码**:A

## 1 引言及主要结果

设 $\pi_e(G)$ 表示群 $G$ 中元素阶的集合,$k$ 是 $\pi_e(G)$ 中的最大值,$x$ 表示 $G$ 中最高阶为 $k$ 的元素,$n$ 表示 $G$ 中 $k$ 阶循环子群的个数. $l$ 是一个自然数,$\pi(l)$ 是 $l$ 的相异素因子的集合,$\pi(G)=\pi(|G|)$,$M_l(G)$ 是 $G$ 的 $l$ 阶元素的集合,特别地 $M(G)=M_k(G)$. $\varphi(x)$ 为 $x$ 的欧拉函数. 另外,设 $p$ 是一个素数,$p^n \parallel |G|$ 表示 $p^n \parallel |G|$,但 $p^{n+1} \nmid |G|$. 笔者讨论的群均为有限群,群后括弧中的数字表示该群的阶,其余符号及术语都是标准的.

**定义 1** 有限群 $G_1$ 与 $G_2$ 称为同阶型群,如果 $|M_i(G_1)| = |M_i(G_2)|$, $i=1, 2, 3\cdots$.

**Thompson 猜想** 设 $G_1$ 与 $G_2$ 为同阶型群,如果 $G_1$ 可解,则必然 $G_2$ 可解.

文献 [1] 研究了最高阶元素的个数 $|M(G)|$ 对群的影响,证明了当 $|M(G)|$ 分别为 $2p$ ($p$ 为素数),奇数,小于或等于 4,或 $\varphi(k)$ 时,$G$ 为可解群. 文献 [2] 证明了当 $|M(G)|=8$ 时,$G$ 可解群. 文献[3 - 4] 分别证明了当 $|M(G)|<20$,或为 32 时,群 $G$ 可解。文献[5] 证明了当$|M(G)|=2pq$ ($7\leqslant p\leqslant q$)时,群 $G$ 可解. 文献[6]证明了当 $|M(G)|=2m$ 时,其中 $(m,15)=1$,群 $G$ 可解. 以上文献对 Thompson 猜想的解决是有用的. 笔者在此基础上讨论了群 $G$ 的最高阶元素的个数 $52p$ 的情况,得到如下定理 1.

**定理 1** 设 $G$ 是最高阶元素个数为 $52p$ 的有限群,其中素数 $p$ 大于 5,则 $G$ 是可解群.

## 2 主要引理及证明

**引理 1** 设 $G$ 有 $n$ 个 $l$ 阶循环子群的,则 $|M_l(G)| = n\varphi(l)$,特别地$|M(G)|=n\varphi(k)$. 而且如果 $n=1$,则 $G$ 超可解. 如果 $k$ 是一个奇素数,则 $n\equiv 1(\mathrm{mod}k)$.

**证明** 由文献[1]中的引理 2.2 和定理 1 及文献[7]中第二章定理 2.1,从而引理的结论是显然的.

**引理 2**[4] 若 $x\in G$,$|x|=k$,$M(G)\subseteq C_G(x)$. 则 $\pi_e(C_G(x))=\pi_e(<x>)$, $C_G(x)=<M(G)>$且 $C_G(x)\trianglelefteq G$.

**引理 3** (文献[9]中定理 1) 设 $G$ 是 $3'$单 $K_4$-群,则 $G\cong S_z(8)(2^6\cdot 5\cdot 7\cdot 13)$,或 $G\cong S_z(32)(2^{10}\cdot 5^2\cdot 31\cdot 41)$.

**引理 4** (文献[9]中定理 2)设 $G$ 是单 $K_4$-群。则 $G$ 同构于下述单群之一:

1) $A_7(2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7)$, $A_8(2^6\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7)$,$A_9(2^6\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7)$,$A_{10}(2^7\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7)$.

2) $M_{11}(2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 11)$, $M_{12}(2^6\cdot 3^3\cdot 5\cdot 11)$, $J_2(2^7\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7)$.

3) $L_2(16)(2^4\cdot 3\cdot 5\cdot 17)$, $L_2(25)(2^3\cdot 3\cdot 5^2\cdot 13)$,$L_2(49)(2^4\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7^2)$,$L_2(81)(2^4\cdot 3^4\cdot 5\cdot 41)$,$L_3(4)(2^6\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7)$,$L_3(5)(2^5\cdot 3\cdot 5^3\cdot 31)$, $L_3(7)(2^5\cdot 3^2\cdot 7^3\cdot 19)$,$L_3(8)(2^9\cdot 3^2\cdot 7^2\cdot 73)$, $L_3(17)(2^9\cdot 3^2\cdot 17^3\cdot 307)$,$L_4(3)(2^7\cdot 3^6\cdot 5\cdot 13)$, $S_4(4)(2^8\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 17)$,$S_4(5)(2^6\cdot 3^2\cdot 5^4\cdot 13)$, $S_4(7)(2^8\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^4)$,$S_4(9)(2^8\cdot 3^8\cdot 5^2\cdot 41)$,

* 收稿日期:2006 - 04 - 26
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10171074);教育部重点项目;教育部优秀青年教师资助计划
作者简介:晏燕雄(1978 - ),男,江西九江人,重庆教育学院数学系助教,硕士,主要从事有限群的研究.

$S_6(2)(2^9\cdot3^4\cdot5\cdot7)$, $O_8^+(2)(2^{12}\cdot3^5\cdot5^2\cdot7)$, $G_2(3)(2^6\cdot3^6\cdot7\cdot13)$, $U_3(4)(2^6\cdot3\cdot5^2\cdot13)$, $U_3(5)(2^4\cdot3^2\cdot5^3\cdot7)$, $U_3(7)(2^7\cdot3\cdot7^3\cdot43)$, $U_3(8)(2^9\cdot3^4\cdot7\cdot19)$, $U_3(9)(2^5\cdot3^6\cdot5^2\cdot73)$, $U_4(3)(2^7\cdot3^6\cdot5\cdot7)$, $U_5(2)(2^{10}\cdot3^5\cdot5\cdot11)$, $S_z(8)(2^6\cdot5\cdot7\cdot13)$, $S_z(32)(2^{10}\cdot5^2\cdot31\cdot41)$, ${}^3D_4(2)(2^{12}\cdot3^4\cdot7^2\cdot13)$, ${}^2F_4(2)'(2^{11}\cdot3^3\cdot5^2\cdot13)$. 4) $L_2(r)$, $r$ 是素数,且满足方程:

$$r^2-1=2^a\cdot3^b\cdot u^c,$$

其中 $a\geqslant1,b\geqslant1,c\geqslant1$,素数 $u>3$.

5) $L_2(2^m)$, $m$ 满足方程:

$$\begin{cases}2^m-1=u,\\2^m+1=3t^b,\end{cases}$$

其中 $m\geqslant1$, $u,t$ 为素数, $t>3,b\geqslant1$.

6) $L_2(3^m)$, $m$ 满足方程:

$$\begin{cases}3^m-1=2u^b,\\3^m+1=4t,\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}3^m-1=2u,\\3^m+1=4t^b,\end{cases}$$

其中 $u,t$ 为奇素数, $b\geqslant1,c\geqslant1$.

**定义 2** 设 $k=\max\{\pi_e(G)\}$. 现将 $G$ 的所有 $k$ 阶循环子群按共轭分类,设 $M_1,M_2,\cdots,M_t$ 是全部不同的类. 命 $m_i=|G:N_G(<x_i>)|$,其中 $<x_i>\in M_i,1\leqslant i\leqslant t$. 则 $m_i$与 $<x_i>$ 在 $M_i$ 中的选择无关而仅与 M_i 本身有关. 称数组 $(m_1,m_2,\cdots,m_t)$ 为 $G$ 的 $m$-型. 并记 $m(G)=(m_1,m_2,\cdots,m_t)$.

**引理 5** 不存在有限群 $G$,使得 $G$ 有 $m$-型 $(m_1,m_2,\cdots,m_t)$,如果它满足下面的条件:存在素数 $q$,正整数 $S$ 和 $n$,使得

$$|G|=S\cdot m_1,\ m_1+m_2+\cdots+m_t=n,$$

对于某个 $m_i$, $q|m_i$,但 $q\nmid S\times n\times\varphi(k)$,其中 $\varphi(k)$ 是 $k$ 的 Euler 函数,且 $k=\max\{\pi_e(G)\}$.

**证明** (反证法)假设存在这样的有限群 $G$ 满足题设的条件. 不妨设 $q|m_1$, $q\nmid n$,则必存在某 $m_j$,不妨假设是 $m_2$,使得 $q\nmid m_2$. 设 $x_i$是 $G$ 的最高阶为 $k$ 的元素,并且它属于共轭类长为 $m_i$的共轭类 $M_i$,其中 $1\leqslant i\leqslant n$. 下面式子总是成立的:

$$G=m_1\cdot|N_G(<x_1>):C_G(x_1)||C_G(x_1)|=$$
$$m_2\cdot|N_G(<x_2>):C_G(x_2)||C_G(x_2)|,$$

因为 $q\nmid S$,则 $q\nmid|C_G(x_1)|$. 根据假设 $q\nmid m_2$, $q\nmid\varphi(k)$,从而有 $q||C_G(x_2)|$. 但是 $\pi(C_G(x_1))=\pi(C_G(x_2))$,因此 $q||C_G(x_1)|$,矛盾.

根据引理 5,可立得下面的推论 1.

**推论 1** 设 $G$ 是有限群, $k=\max\{\pi_e(G)\}$. 如果 $\pi(n)\subseteq\{2,r,s\}$, $\pi(k)\subseteq\{2,3,q\}$,且 $\pi(\varphi(k))\subseteq\{2,p\}$,其中 $r,s,p$ 及 $q$ 都是不同的奇素数. 则 $G$ 是下列群之一: $\{2,3,p,q\}$-群, $\{2,3,p,q,r\}$-群, $\{2,3,p,q,s\}$-群及 $\{2,3,p,q,r,s\}$-群. 特别地,若 $\pi(n)=\{r\}$,则 $G$ 是$\{2,3,p,q\}$-群 或$\{2,3,p,q,r\}$-群.

**引理 6**[11] 设 $G$ 是单 $K_3$-群,则 $G$ 是同构于下述群之一:

$A_5(2^2\cdot3\cdot5)$, $A_6$, $(2^3\cdot3^2\cdot5)$, $L_2(7)(2^3\cdot3\cdot7)$, $L_2(8)\ (2^3\cdot3^2\cdot7)$, $L_2(17)(2^4\cdot3^2\cdot17)$, $L_3(3)(2^4\cdot3^3\cdot13)$, $U_3(3)\ (2^5\cdot3^3\cdot7)$, $U_4(2)(2^6\cdot3^4\cdot5)$.

**推论 2** 设 $G$ 是 $K_3$-群,则 $G$ 可解,如果 $\pi(G)$ 非下述集合之一: $\{2,3,5\}$, $\{2,3,7\}$, $\{2,3,13\}$ 及$\{2,3,17\}$.

**证明** 由引理 6 直接可得推论 2.

## 3 定理的证明

在此再次说明, $k=\max\{\pi_e(G)\}$, $x$ 表示 $G$ 的最高阶为 $k$ 的元素, $n$ 是 $G$ 中 $k$ 阶循环子群的个数,定理中的素数 $p>5$. 由 $n-c$ 定理有$|N_G(\langle x\rangle):C_G(x)||\varphi(k)$,而且下式总是成立

$$|G|=|G:N_G(<x>)||N_G(<x>):C_G(x)||C_G(x)|,\tag{1}$$

因为 $n\varphi(k)=52p$,根据引理 1,把 $n,\varphi(k)$ 和 $k$ 三者之间的关系如下列表 1.

**表 1 $n,\varphi(k),k$ 的关系**

| $n$ | 1 | 2 | 13 | 26 | $p$ | $13p$ | $26p$ | $52p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi(k)$ | $52p$ | $26p$ | $4p$ | $2p$ | 52 | 4 | 2 | 1 |
| $k$ | $k$ | $q=26p+1$ | $q$ 或 $2q$<br>$q=2p+1$(素数)<br>(素数) | (1)$3q,4q,6q$<br>$q=2p+1$<br>(2)$q,2q$<br>$q=4p+1$(素数) | $q$ 或 $2q$<br>53<br>(素数) | 5,8<br>106 | 3<br>10,12 | 2<br>4<br>6 |

下面把定理的证明过程分散 8 个主要的引理当中，证明了 8 个引理 [7 - 14]，从而定理的结论自然成立.

**引理 7**　若 $|M(G)|=52p, n=1$，则 $G$ 超可解。

**证明**　根据引理 1，直接可得结论.

**引理 8**　若 $|M(G)|=52p$，$n=2$，则 $G$ 可解.

**证明**　此时由表 1 有 $k=q$ 或 $k=2q$，其中素数 $p>5$ 且 $q=26p+1$ 是素数. 由引理 1 易知 $k\neq q$. 若 $k=2q$，则 $C_G(x)$ 是 $\{2,q\}$ - 群，可解. 并且 $\varphi(k)=26p$，因此 $|N_G(\langle x\rangle):C_G(x)|\mid 26p$，故 $\pi(N_G(\langle x\rangle))\subseteq\{2,13,p,q\}$. 令 $\{r,s,t\}\subset\{2,13,p,q\}$. 因素数 $p>5$，由推论 2 知 $\{2,13,p,q\}$ - 群的任何一个 $\{r,s,t\}$ - 子群都不可能与某一单 $K_3$ - 群同构. 由于 $\{2,13,p,q\}$ - 群是 $3'K_4$ - 群，且 $5\nmid|G|$，由引理 3，则 $\{2,13,p,q\}$ - 群可解，特别地 $N_G(\langle x\rangle)$ 可解. 因为 $|G:N\_G(\langle x\rangle)|\leqslant 2$，则 $N_G(\langle x\rangle)\trianglelefteq G$，而且 $G/N_G(\langle x\rangle)$ 可解，从而 $G$ 可解.

**引理 9**　若 $|M(G)|=52p, n=13$，则 $G$ 可解.

**证明**　根据上表 1 有 $\varphi(k)=4p$，下面分 $p>7$ 和 $p=7$ 这 2 种情形讨论. 先考虑素数 $p>7$ 的情形. 由于 $x$ 是 $G$ 的一个最高阶元素，从而 $|N_G(\langle x\rangle): C_G(x)|\mid\varphi(k)$，而且 $k$ 的取值为下面的情况之一：

1) $k=q$ 或 $2q$，其中 $q=4p+1$ 是素数；

2) $k=3q,4q$ 或 $6q$，其中 $q=2p+1$ 是素数.

下面根据 $k$ 的不同取值分两类进行讨论：

1) 若 $k=q$ 或 $2q$，其中 $q=4p+1$ 是素数，则 $C_G(x)$ 是 $\{2,q\}$ - 群，且有 $|N_G(\langle x\rangle):C_G(x)|\mid 4p$. 因为 $n=13$ 是素数，根据推论 1 及 (1) 式，则 $G$ 是 $\{2,p,q\}$ - 群或 $\{2,13,p,q\}$ - 群，

若 $G$ 是 $\{2,p,q\}$ - 群，因素数 $p>7$，而且 $q=4p+1$ 是素数，由推论 2，从而 $G$ 可解；

若 $G$ 是 $\{2,13,p,q\}$ - 群，则 $G$ 是 $3'K_4$ - 群. 由于 $5\notin\pi(G)$，由引理 3，从而 $G$ 也可解.

2) 现在讨论 $k$ 的取值为 $k=3q,4q$ 或 $6q$ 的情形，其中 $q=2p+1$ 是素数，再分以下 3 种情况：

①若 $k=4q$，则 $C_G(x)$ 是 $\{2,q\}$ - 群，由推论 1 知 $G$ 是 $\{2,p,q\}$ - 群或 $\{2,13,p,q\}$ - 群，类似于 1. 的方法，易证明 $G$ 可解.

②若 $k=3q$，则 $C_G(x)$ 是 $\{3,q\}$ - 群. 因为 $|N_G(\langle x\rangle):C_G(x)|\mid 4p$ 及 $n=13$ 是素数，根据推论 1 及式(1)，则 $G$ 是 $\{2,3,p,q\}$ - 群 或 $\{2,3,13,p,q\}$ - 群. 假设 $|C_G(x)|=3^u\cdot q^v$，且 $C_G(x)$ 中没有 $3^2$ 或 $q^2$ 阶元素. 如果 $u\geqslant 4$，则 $C_G(x)$ 中至少有 $(3^4-1)(q-1)=160p$ 个 $3q$ 阶元素，与 $|M(G)|=52p$ 矛盾，故 $u\leqslant 3$. 如果 $u=3$，完全类似的推理可知 $C_G(x)$ 中至少有 $52p$ 个 $3q$ 阶元素，因而 $C_G(x)$ 包含了 $G$ 的所有 $3q$ 阶元素. 由引理 2，从而 $C_G(x)\trianglelefteq G$. 则 $G/C_G(x)$ 是 $\{2,p\}$ - 群或 $\{2,13,p\}$ - 群. 因素数 $p>7$，由推论 2，则 $G/C_G(x)$ 可解. 进一步 $G$ 可解.

因此当 $u=3$ 时，结论已经成立. 故下面可以假设 $u\leqslant 2$. 用完全相同的方法证明 $v=1$. 从而 $|C_G(x)|=3^u\cdot q$，其中 $1\leqslant u\leqslant 2$.

设 $Q$ 是 $C_G(x)$ 的 $q$ - Sylow 子群，容易看到 $Q$ char $C_G(x)\trianglelefteq N_G(\langle x\rangle)$，即 $Q\trianglelefteq N_G(\langle x\rangle)$，因而 $N_G(\langle x\rangle)\leqslant N_G(Q)$. 因为 $|G:N_G(\langle x\rangle)|=|G:N_G(Q)||N_G(Q):N_G(\langle x\rangle)|$，且 $|G:N_G(\langle x\rangle)|\leqslant 13\ll$ 于是由 Sylow 定理，则有 $|G:N_G(Q)|=1$，故 $Q/G$.

若 $G$ 是 $\{2,3,p,q\}$ - 群，则 $G/Q$ 是 $\{2,3,p\}$ - 群，因为素数 $p>7$，且 $q=2p+1$ 是素数，则 $p=11$ 或 $p\geqslant 19$. 由推论 2，从而 $G/Q$ 可解，进一步 $G$ 可解

若 $G$ 是 $\{2,3,13,p,q\}$ - 群，则 $G/Q$ 是 $\{2,3,13,p\}$ - 群. 根据 (1) 式，假设 $|G/Q|=2^\alpha\cdot 3^u\cdot 13\cdot p^\beta$，其中 $1\leqslant\alpha\leqslant 2, 1\leqslant u\leqslant 2$ 及 $0\leqslant\beta\leqslant 1$. 令 $\bar{G}=G/Q$. 若 $a=1$，则 $\bar{G}$ 可解，因而 $G$ 可解. 下面不妨设 $a=2$.

若 $\beta=0$，则 $|\bar{G}|=2^2\cdot 3^u\cdot 13$，其中 $u\leqslant 2$. 由引理 6，易知 $\bar{G}$ 可解，从而 $G$ 可解

若 $\beta=1$，则 $|\bar{G}|=2^2\cdot 3^u\cdot 13\cdot p$，其中 $u\leqslant 2$. 下面只需证明 $\bar{G}$ 可解.

根据上面的分析，易知道 $\bar{G}$ 的任何一个截断都不可能与某一单 $K_3$ - 群同构，如果 $\bar{G}$ 不可解，因 $\bar{G}$ 是 $K_4$ - 群，则 $\bar{G}$ 必存在一个截断，记为 $\bar{W}/\bar{S}$，同构于某单 $K_4$ - 群. 不妨设 $|\bar{W}/\bar{W}|=2^2\cdot 3^t\cdot 13\cdot p$，其中 $t\leqslant u\leqslant 2$. 根据引理 4，知道 $\bar{W}/\bar{W}$ 只能同构于下述单 $K_4$ - 群之一.

a. 若 $\bar{W}/\bar{S}\cong L_2(r)$，其中 $r$ 是素数，且满足方程：

$$r^2-1=2^a\cdot 3^b\cdot v^c,$$

其中 $a\geqslant 1, b\geqslant 1, c\geqslant 1$，素数 $v>3$. 因为 $|L_2(r)|=r(r^2-1)/(2,r-1)$，比较 $L_2(r)$ 和 $\bar{W}/\bar{S}$ 的阶易知，$r\neq 13$，$a\leqslant$slant2，$b\leqslant$slant2，$c=1$. 因此 $v=13$，$r=p$. 分别代入 $a,b$ 的所有各种正整数的取值，简单的计算易知，这样的素数 $p$ 是不存在的. 因此 $\bar{W}/\bar{S}\not\cong L_2(r)$.

b. 若 $\bar{W}/\bar{S}\cong L_2(2^m)$，且 $m$ 满足方程：

$$\begin{cases}2^m-1=v,\\2^m+1=3t^b,\end{cases}$$

其中 $v,t$，是素数，$t>3, b\geqslant 1, m\leqslant 1$. 通过比较 $L_2(2^m)$ 和 $\bar{W}/\bar{S}$ 的阶，知 $m=2$，从而 $3\cdot t^b=5$，显然这时方程组无解. 于是 $\bar{W}/\bar{S}\not\cong L_2(2^m)$.

c. 若 $\bar{W}/\bar{S}\cong L_2(3^m)$，$m$ 下列方程组之一：

$$\begin{cases}3^m-1=2v^b,\\3^m+1=4t,\end{cases}$$ 或

$$\begin{cases}3^m-1=2v,\\3^m+1=4t^b,\end{cases}$$

其中 $v,t$ 是素数,$b\geq1,m-\geq1$. 用完全类似于 (2.2.1)的方法证明上述的两个方程组均无整数解,因此 $\overline{W}/\overline{S}\ncong L_2(3^m)$. 至此已经证明了在 (2.2) 的条件下,$\overline{G}$ 是可解的,因此 $G$ 可解.

③若 $k=6q$,其中 $q=2p+1$ 是素数,则 $C_G(x)$ 是 $\{2,3,q\}$ - 群。

假设 $|C_G(x)|=2^\alpha\cdot3^\beta\cdot q^\gamma$. 类似于第 2 种推理方法,可以证明 $\alpha\leq3$, $\beta\leq3$, $\gamma=1$. 因此 $|C_G(x)|=2^\alpha\cdot3^\beta\cdot q$,其中 $\alpha\leq3,\beta\leq3$.

设 $Q$ 是 $C_G(x)$ 的 $q$-Sylow 子群,则断言 $Q\trianglelefteq G$.

先证明 $Q\trianglelefteq C_G(x)$. 若否,则 $C_G(x)$ 中至少含有 $q+1=2p+2$ 个 Sylow-$q$ 子群. 因为 $Q\leq Z(C_G(x))$, 素数 $p>7$,故 $C_G(x)$ 中至少有 $2\cdot(2p+2)\cdot(q-1)=8p^2+8p$ 个 $6q$ 阶元素,显然 $8p^2+8p>52p$,矛盾. 故 $Q\trianglelefteq C_G(x)$. 由于 $C_G(x)\trianglelefteq N_G(\langle x\rangle)$,从而 $Q\trianglelefteq N_G(\langle x\rangle)$, 即 $N_G(\langle x\rangle)\leq N_G(Q)$. 由于 $|G:N_G(\langle x\rangle)|=|G:N_G(Q)||N_G(Q):N_G(\langle x\rangle)|$,及 $|G:N_G(\langle x\rangle)|\leq13$,由 Sylow 定理,则有 $|G:N_G(Q)|=1$,从而断言成立.

因为 $C_G(x)$ 是 $\{2,3,q\}$ - 群,且 $\varphi(k)=4p,n=13$ 是素数,根据推论 1 及 式(1),从而 $G$ 是 $\{2,3,p,q\}$ - 群或 $\{2,3,13,p,q\}$ - 群. 因为 $Q\trianglelefteq G$.

若 $G$ 是 $\{2,3,p,q\}$ - 群,则 $G/Q$ 是 $\{2,3,p\}$ - 群. 类似于 (2.2)前部分的证明可知 $G/Q$ 可解,从而 $G$ 可解

若 $G$ 是 $\{2,3,13,p,q\}$ - 群,则 $G/Q$ 是 $\{2,3,13,p\}$ - 群. 由 (1) 式,现假设 $|G/Q|=2^m\cdot2^\alpha\cdot3^\beta\cdot13\cdot p^\gamma$,其中 $m\leq2$, $\alpha\leq3$, $\beta\leq3,\gamma$.

若 $\beta=3$,根据 (2.2) 中的证明方法,我们有 $C_G(x)\trianglelefteq G$,进一步易证明 $G$ 是可解的,因此下面不妨设 $\beta\leq2$. 类似地假设 $\gamma=1$. 令 $\lambda=m+\alpha$,则 $\lambda\leq5$,故 $|\overline{G}|=|G/Q|=2^\lambda\cdot3^\beta\cdot13\cdot p$,其中 $\lambda\leq5$, $\beta\leq2$. 下面只需证明 $\overline{G}$ 可解.

根据上面的分析,可以知道 $\overline{G}$ 的任何一个截断都不可能与某一单 $K_3$ - 群同构,如果 $\overline{G}$ 不可解,因 $\overline{G}$ 是 $K_4$ - 群,则 $\overline{G}$ 必存在一个截断,仍记为 $\overline{W}/\overline{S}$, 同构于某单 $K_4$ - 群. 不妨设 $|\overline{W}/\overline{S}|=2^u\cdot3^v\cdot13\cdot p$,其中 $2\leq u\leq\lambda\leq5$, $v\leq\beta\leq2$,根据引理 4,知 $\overline{W}/\overline{S}$ 只能同构于下述单 $K_4$ - 群之一:

a. 若 $\overline{W}/\overline{S}\cong L_2(r)$,$r$ 是素数,且满足方程:

$$r^2-1=2^a\cdot3^b\cdot w^c,$$

其中 $a\geq1,b\geq1,c\geq1$,素数 $w>3$。比较 $\overline{W}/\overline{S}$ 和 $L_2(r)$ 的阶,我们有 $3\leq a\leq6$, $b\leq2$, 而且 $r\neq13$. 则 $r=p$, $w=13$ 及 $c=1$. 于是 $r^2-1=p^2-1=2^a\cdot3^b\cdot13$. 简单的计算易知,对于所有满足条件 $3\leq a\leq6,b\leq2$ 的正整数 $a$ 和 $b$,此方程均无解,因此 $\overline{W}/\overline{S}\ncong L_2(r)$

b. 若 $\overline{W}/\overline{S}\cong L_2(2^m)$,$m$ 满足方程组:

$$\begin{cases}2^m-1=u_1,\\2^m+1=3t^b,\end{cases}$$

其中 $u_1,t$ 是素数,且 $t>3,b\leq1$. 因为 $|L_2(2^m|=2^m\cdot(2^m+1)\cdot(2^m-1)$,与 $\overline{W}/\overline{S}$ 阶相比较,则有 $2\leq m\leq5,v=1,b=1$. 现考虑 $m$ 满足的方程:

$2^m-1=u_1$的解,简单的验算易知,它有唯一解是: $m=5,u_1=31$. 因此 $p=31,t=13$,则 $2^m+1=3\cdot13$, 也即 $2^m=38$,显然这是不可能的,从而 $\overline{W}/\overline{S}\ncong L_2(2^m)$

c. 若 $\overline{W}/\overline{S}\cong L_2(3^m)$,$m$ 满足引理 4 方程组(6).

若 $m$ 满足方程组

$$\begin{cases}3^m-1=2s^b,\\3^m+1=4t,\end{cases}$$

比较 $L_2(3^m)$ 和 $\overline{W}/\overline{S}$ 的阶,易知 $m\leq2,b=1$. 对于 $m=1$ 或 $m=2$,代入上述方程组验证,可知此方程组无解.

若 $m$ 满足方程组

$$\begin{cases}3^m-1=2u_2,\\3^m+1=4t^b,\end{cases}$$

其中 $u_2,t$ 是素数,且 $b\geq1,m\geq1$,类似的方法易推出 $m\leq2,b=1$. 对于不同的 $m$ 值,易验证此时方程组也无解,因此 $\overline{W}/\overline{S}\ncong L_2(3^m)$。至此就证明了 $\overline{G}$ 是可解的,从而 $G$ 可解.

最后再考虑 $p=7$ 时的情形。此时 $k=29,58$. 由引理 1,只需讨论 $k=58$,此时 $C_G(x)$ 是 $\{2,29\}$ - 群. 因为 $n=13$ 是素数,以 $\pi(\varphi(k))=\{2,7\}$,由推论 1, 则 $G$ 是 $\{2,7,29\}$ - 群或 $\{2,7,13,29\}$ - 群. 若 $G$ 是 $\{2,7,29\}$ - 群,则由推论 2 知,$G$ 可解. 若 $G$ 是 $\{2,7,13,29\}$ - 群,则 $G$ 是 $3'K_4$ - 群,因为 $5\nmid|G|$,由引理 3, 则 $\{2,7,13,29\}$ - 可解. 这样就完成了引理 9 的证明.

**引理 10** 若 $|M(G)|=52p,n=26$,则 $G$ 可解。

**证明** 因为 $x$ 是 $G$ 的最高阶为 $k$ 的元素,根据表 1, 则 $k=q$ 或 $2q$,其中 $q=2p+1$ 素数,及 $|N_G(\langle x\rangle):C_G(x)||\varphi(k)$. 而且 $\varphi(k)=2p$,素数 $p>5$. 由引理 1 易知 $k\neq q$,因而下面只需讨论 $k=2q$ 的情形.

令 $H=C_G(x)$,因为 $k=2q$,则假设 $|H|=2^\alpha\cdot q^\beta$, 且 $H$ 中不含有 $2^2$ 或 $q^2$ 阶元素. 如果 $\alpha\geq q5$,则 $H$ 中至少含有 $G$ 的 $(2^5-1)\cdot(q-1)=62p$ 个最高阶为 $2q$ 的元素,矛盾. 因此 $\alpha\leq4$,类似的证明 $\beta\leq2$. 故 $|H|=2^\alpha\cdot q^\beta$,其中 $\alpha\leq4$, $\beta\leq2$.

$Q$ 是 $H$ 的 Sylow $-q$ 子群,类似于引理9中第2类第2种情况的推理,易证 $Q\trianglelefteq G$. 因为 $C_G(x)$ 是 $\{2,q\}$ -群,$\varphi(k)=2p$,及 $\pi(n)=\{2,13\}$,根据推论1及式(1),则 $G$ 是 $\{2,p,q\}$ -群或 $\{2,13,p,q\}$ -群.

若 $G$ 是 $\{2,p,q\}$ -群,由于素数 $p>5$,且 $q=2p+1$ 素数,由推论2知 $G$ 可解.

若 $G$ 是 $\{2,13,p,q\}$ -群,则 $G/Q$ 是 $\{2,13,p\}$ -群,由推论2,从而 $G/Q$ 可解,故 $G$ 可解.

**引理11** 若 $|M(G)|=52p$, $n=p$,则 $G$ 可解.

**证明** 根据表1此时有 $k=53$ 或 $k=106$,且 $\varphi(k)=52$. 从而 $C_G(x)$ 是 $\{2,53\}$ -群,并且 $|N_G(\langle x\rangle):C_G(x)|\mid 52$. 因为 $n=p$ 是素数,且素数 $p>5$. 由推论1及(1)式,则 $G$ 是 $\{2,13,53\}$ -群或 $\{2,13,53,p\}$ -群. 因为单 $k_3$-群不含有素因子53,故如果 $G$ 是 $\{2,13,53\}$ -群,则可解。如果 $G$ 是 $\{2,13,53,p\}$ -群,则 $G$ 是 $3'k_4$-群,但 $5\nmid|G|$,由引理3,可知 $G$ 可解.

**引理12** 若 $|M(G)|=52p$, $n=13p$,则 $G$ 可解.

**证明** 由于 $x$ 是 $G$ 的最高阶为 $k$ 的元素,根据上表1,此时 $k=5,8,10,12$,且 $|N_G(\langle x\rangle):C_G(x)|\mid\varphi(k)$,其中 $\varphi(k)=4$.

若 $k=5$,因为素数 $p>5$,则 $p\nmid|G|$ 且 $13\nmid|G|$. 由推论1及式(1),则 $G$ 是 $\{2,5\}$ -群,故 $G$ 可解.

若 $k=8$,则 $13\nmid|G|$. 而且 $G$ 是2-群或 $\{2,7\}$ -群,从而 $G$ 可解.

若 $k=10$,因为素数 $p>5$,则 $p=7$ 或 $p\geq 13$,且 $13\nmid|G|$. 因而 $G$ 是 $\{2,5\}$ -群或 $\{2,5,7\}$ -群,由推论2,从而 $G$ 可解.

若 $k=12$,则 $p=7,11$ 或 $p\geq 13$,且 $13\nmid|G|$。考虑到 $k=12$,类似于前面的方法,则知 $G$ 是下列群之一: $\{2,3\}$ -群,$\{2,3,7\}$ -群,$\{2,3,11\}$ -群.

由于单 $k_3$-群中不含有素因子11,故当 $G$ 是 $\{2,3\}$ -群或 $\{2,3,11\}$ -群时,群 $G$ 可解. 因此,下面只需证明当 $G$ 是 $\{2,3,7\}$ -群时,$G$ 可解.

设 $m(G)=(m_1,m_2,\cdots,m_t)$ 是 $G$ 的一个 $m$-型,其中 $m_i=|G:N_G(\langle x_i\rangle)|$,$i=1,2,\cdots,t$. 根据题意可知 $m_1+m_2+\cdots+m_t=13\cdot 7$,则 $7\mid m_i$. 否则 $G$ 是 $\{2,3\}$ -群或 $\{2,3,11\}$ -群,可解. 令 $m_i=7r_i$,则 $r_1+r_2+\cdot s+r_t=13$,并记 $m(G)=(m_1,\ m_2,\cdots,m_t)=7(r_1,r_2,\cdots,r_t)$. 考虑到 $5\nmid|G|$,于是得到 $G$ 的所有 $m$-型如下:

7(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1),7(2,11),7(2,2,9),7(2,2,2,7),7(2,2,2,2,2,3),7(3,3,7),7(3,3,3,4),7(4,9),7(6,7).

据此可以判断 $7\parallel|G|$,由式(1),于是可假设 $|G|=2^\alpha\cdot 3^\beta\cdot 7$,其中 $\alpha\geq 2,\beta\geq 1$. 因为 $k=12$,故 $G$ 的素图不连通. 现假设 $G$ 不可解,由引理6,则存在 $G$ 一个正规群列: $H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$,使得 $K/H\cong PSL_2(7)$ 或 $K/H\cong PSL_2(8)$,$H$ 幂零,$|G/K|\mid|Out(K/H)|$.

若 $K/H\cong PSL_2(7)$,因为 $G$ 的所有7阶元素全部在 $PSL_2(7)$ 中,易知 $PSL_2(7)$ 中恰好含有48个7阶元素[10]. 设 $P_7$ 是 $G$ 的一个7-Sylow子群,于是有 $|G:N_G(P_7)|=8$,从而 $|N_G(P_7)|=2^{\alpha-3}\cdot 3^\beta\cdot 7$. 由 $n-c$ 定理可知 $|N_G(P_7):C_G(P_7)|\mid 2\cdot 3$,如果 $\alpha-3\geq 2$ 或 $\beta\geq 2$,则 $G$ 中必存在阶大于12的元素,与 $k=12$ 矛盾. 从而只能是 $\alpha\leq 4,\beta=1$,故 $|H|\mid 2$. 如果 $H\neq 1$,则 $H\leq$slant $Z(G)$,从而 $G$ 中存在阶为14的元素,与 $k=12$ 矛盾。这样 $K\cong PSL_2(7)$. 因为 $|\mathrm{Out}(PSL_2(7))|=2$,则 $|G/K|\mid 2$,故 $G\cong PSL_2(7)$ 或 $G\cong PSL_2(7)\cdot 2$. 根据文献[10]的表,知 $PSL_2(7)$ 或 $PSL_2(7)\cdot 2$ 中均没有12阶元素,矛盾.

若 $K/H\cong PSL_2(8)$,因为 $G$ 的所有7阶元素全部在 $PSL_2(8)$ 中,则知 $PSL_2(8)$ 中恰好含有216个7阶元素[10]. 设 $P_7$ 是 $G$ 的一个7-Sylow子群,于是 $|G:N_G(P_7)|=36$,从而 $|N_G(P_7)|=2^{\alpha-2}\cdot 3^{\beta-2}\cdot 7$. 由 $n-c$ 定理可知 $|N_G(P_7):C_G(P_7)|\mid 2\cdot 3$. 如果 $\alpha-2\geq$ qslant2 或 $\beta-2\geq$ qslant2,则 $G$ 中必存在阶大于12的元素,与 $k=12$ 矛盾. 从而只能是 $\alpha=3,\beta\leq 3$,故 $|H|\mid 3$. 如果 $|H|=3$,因为 $H\trianglelefteq G$,由 $n-c$ 定理可知 $|N_G(H):C_G(H)|\mid 2$,则 $G$ 中存在阶为21的元素,矛盾。因此 $|H|=1$. 这样 $K\cong PSL_2(8)$. 因为 $|\mathrm{Out}(PSL_2(8))|=3$,则 $|G/K|\mid 3$,故有 $G\cong PSL_2(8)$ 或 $G\cong PSL_2(8)\cdot 3$. 但无论 $PSL_2(8)$ 还是 $PSL_2(8)\cdot 3$,均没有12阶元素,这是最后的矛盾.

**引理13** 若 $|M(G)|=52p$, $n=26p$,则 $G$ 可解.

**证明** 根据表1,此时 $k=3,4,6$ 及 $|N_G(\langle x\rangle):C_G(x)|\mid\varphi(k)$,其中 $\varphi(k)=2$. 由于 $x$ 是 $G$ 的最高阶元素,则 $C_G(x)$ 是2-群或 $\{2,3\}$ -群,因为素数 $p>5$,类似于前面的推理方法,易知 $G$ 是2-群或 $\{2,3\}$ -群,故 $G$ 可解.

**引理14** 若 $|M(G)|=52p$,则 $n\neq 52p$.

**证明** 假设 $|M(G)|=52p$,$n=52p$,则 $k=2$. 从而 $G$ 是初等交换2-群. 令 $|G|=2^u$,$u$ 是某正整数。则 $G$ 的最高阶为2的元素个数为 $2^u-1$,显然不可能偶数个,矛盾.

由定理1,立得 Thompson 猜想成立的一个条件,即下面的推论3.

**推论3** 设 $G$ 与 $M$ 是同阶型群,如果 $G$ 是最高阶元素个数 $52p$ 的有限群,其中素数 $p$ 大于5. 则 $M$ 是可解群.

**参考文献:**

[1] 杨成. 最高阶元素个数不同的有限群[J]. 数学年刊, 1993, 14A(5): 561-576.

[2] 刘奉举. 最高阶元素个数为 ~8 的有限群[J]. 河北大学学报版(自然科学版), 1996, 16(3): 57-59.

[3] 姜友谊. 最高阶元素个数小于 ~20 的有限群是可解群[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 1998, 23(4): 379-384.

[4] 姜友谊. 最高阶元素个数为 ~32 的有限群是可解群[J]. 河北大学学报版(自然科学版), 1999, 19(3): 215-219.

[5] 韩章家,陈贵云. 最高阶元素个数为 2pq 的有限群可解[J]. 西南师范大学学报(自然科学版),2004,29(2):198-200.

[6] 何承春. 最高阶元的个数为 2m 的有限群, 其中(m,15) = 1[D]. 重庆:西南大学, 2004.

[7] 徐明曜. 有限群导引[M]. 北京:科学出版社,1999.

[8] BRANDL, SHI WUJIE. Finite Groups Whose Elements Order are Consecutive Integers [J]. J Alg ,1991, 143(2): 388-400.

[9] SHI WJ. On simple $K_4$ - groups[J], Chinese Sci. Bull, 1991, 36(7): 1 281.

[10] CONWAY JH, CURTIS RT, NORTON S P, et al. ATLAS of Finite Groups[M]. Oxford: Clarendon Press, 1985.

[11] HERZOG M. On Finite Simple Groups of Order Divisible by There Primes Only [J]. J Algebra, 1968, 10: 383-388.

# Finite Groups With 52 *p* Elements of Maximal Order

*YAN Yan-xiong* [1], *CHEN Gui-yun* [2], *HE Li-guan* [3]

(1. Department of Mathematics,Chongqing Education College, Chongqing 400067,China;
2. School of Mathematics and Finance, Southwest Department of Mathematics University, Chongqing 400715, China;
3. Chongqing Normal University, Chongqing 400047,China)

**Abstract**: The authors discuss the finite groups with 52 $p$ elements of maximal order, and get a theorem as follows: SupposeG is a finite group with $|M(G)| = 52\,p$ elements of maximal order, where $p$ is a prime and $p > 5$, then $G$ is solvable.

**Key words**: finite groups; solvable groups; the order of elements

(编辑 张小强)

(上接第 70 页)

# Mechanical Performance and Thermology Performance of 20CrMo Steel at High Temperature

*PAN Yan-hua*, *CHEN Deng-fû*, *DONG Ling-yan*, *WEN Liang-ying*

(College of Materials Science and Engineering, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

**Abstract**: Employing the Gleeble-1500D thermal analogue machine and the STA449 synthesis thermal analyzer,the study on hot ductility and parts of thermology performance of 20CrMo steel has been carried out , many consulted foundation data has been obtained, the optimum ductility temperature arrange has been found, contraction of cross sectional area is only 30% between 600 degree and 775 degree, but contraction of cross sectional area is more than 80% between 800 degree and 1 250 degree, contraction of cross sectional area drops to under 60% rapidly between 1 350 degree and melting point, a curve is drawn showing the relationshi Pbetween heat capacity and the variation of temperature for the first time, the counting formulas of the heat capacity are regressed by disjunction. A curve is drawn showing the relationshi Pbetween the coefficient of thermal expansion and the variation of temperature, and their application in continuous casting is discussed herein.

**Key words**: continuous casting billet; brittleness at high temperature; thermal analysis; contraction of cross sectional area; strain rate

(编辑 李胜春)