文章编号:1000-582X(2007)11-0099-04

时滞反应扩散方程组周期解的存在性

郑继明,王长有
(重庆邮电大学 应用数学研究所,重庆 400065)

摘 要:利用上、下解方法及不动点理论研究了一类反应项非单调的时滞反应扩散方程组,构造了非单调反应项的上、下控制函数,并证明了所构造的函数满足 Lipschitz 条件及单调性,克服了反应项非单调无法利用单调迭代方法的局限性,为讨论反应项非单调的微分方程提供了一种有效方法,并获得了此系统边值问题周期解存在性的充分条件,推广了已有的一些结果。

关键词:时滞;周期解;上、下解;反应扩散方程组;不动点理论;存在性
中图分类号:O175.26 文献标志码:A

反应扩散方程的周期解已被许多学者所关注,关于其周期解的存在性、唯一性及稳定性的研究已有许多工作,各种结果被建立[1-3]. 对于含时滞的反应扩散方程,由于时滞的出现使其与不含时滞的反应扩散方程在性质上有很大差异,其周期解的研究更加困难,但含时滞的反应扩散方程能更好地反应模型的时间特性和空间特性. 基于此,近年来,人们对时滞反应扩散方程的研究日益重视,关于其周期解的结果不断涌现[4-9],然而,在这些研究中,反应项单调或拟单调是一个必要条件,但反应项非单调情形是一种普遍现象,研究这种情形下周期解的存在性具有重要意义.

考虑下述时滞反应扩散方程组的边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_i}{\partial t}+L_iu_i=f_i(x,t,u_i,u_{1t},\cdots,u_{nt}) & (x,t)\in\Omega\times\mathbf{R},\\ B_iu_i(x,t)=g_i(x,t) & (x,t)\in\partial\Omega\times\mathbf{R},\\ u_i(t,x)=u_i(t+T,x), & (-\tau_i\leqslant t\leqslant 0),x\in\Omega\\ i=1,2,\cdots,n\end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega\in\mathbf{R}^N$ 是一个有界开区域,且有光滑边界 $\partial\Omega$;L_i 是一个二阶微分算子,定义为

$$L_iu=-\sum_{j,k=1}^{N}a_{j,k}^{(i)}(x,t)\frac{\partial^2u}{\partial x_j\partial x_k}+\sum_{j=1}^{N}b_j^{(i)}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}(i=1,2,\cdots,n)。$$

B_i 是一个边界算子

$$B_iu_i=u_i(i=1,2,\cdots,n),$$

或者

$$B_iu_i=\frac{\partial u_i}{\partial v}+\beta_i(x,t)u_i(i=1,2,\cdots,n)。$$

$\dfrac{\partial u_i}{\partial v}$表示 u_i 在 $\partial\Omega$ 的外法向导数,$u_{it}=u_i(x,t+s)$,$s\in[-r,0]$,若 $r=0$,意味着系统(1)不含时滞。

文献[5]讨论了系统(1)的特殊情形

$$\begin{cases}L_0[u]=\left(\dfrac{\partial}{\partial t}-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u=f(u,u_t),t\in\mathbf{R},x\in[0,l],\\ u|=g(x),u|=h(t),t\in\mathbf{R}。\end{cases} \tag{2}$$

u,f,g,h 是数量值或向量值函数,$u=u(t,x)$,$u_t=u(t-s,x)$,时滞 $s>0$. 利用单调方法获得了方程(2)在反应项 $f(u,u_t)$ 对 u_t 单调时,存在唯一周期解的充分条件. 文献[4]中讨论了式(1)当反应项非单调但不含时滞时周期解与概周期解的存在唯一性,而文献[6]中讨论了式(1)在反应项 $f_i(x,t,u_i,u_t)$ 关于 u_t 单调时周期解的存在稳定性. 通过构造上、下控制函数,利用文献[6]的思想,证明了系统(1)当反应项 $f_i(x,t,u_i,u_t)$ 对 u_t 非单调时周期解的存在性.

1 预备知识

引理1[6] 令 $c(x,t)\in C(\overline{\Omega}\times[0,\omega])$,$c(x,t)\geqslant 0$

收稿日期:2007-07-08
作者简介:郑继明(1963-),男,重庆邮电大学副教授,主要从事小波分析,微分方程理论和应用方向研究,(Tel)023-66781283;(E-mail)zhengjm@cqup.edu.cn。

且 $c(x,t)$ 不恒为零,若 $\beta(x,t)\equiv 0,(x,t)\in\partial\Omega\times[0,\omega]$,假使 $u\in C^{2,1}(\Omega\times[0,\omega])\cap C(\overline{\Omega}\times[0,\omega])$ 且满足下述不等式

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+L_i u+c(x,t)u\geqslant 0 & (x,t)\in\Omega\times[0,\omega],\\ B_i u(x,t)\geqslant 0 & (x,t)\in\partial\Omega\times[0,\omega],\\ u(x,0)\geqslant u(x,\omega) & x\in\Omega,\end{cases}$$

则

$$u(x,t)\geqslant 0,\forall(x,t)\in\overline{\Omega}\times[0,\omega]。$$

进而,若

$\dfrac{\partial u}{\partial t}+L_i u+c(x,t)u$ 不恒等于 $0,(x,t)\in\Omega\times[0,\omega]$,

或者

$B_i u(x,t)$ 不恒等于 $0,(x,t)\in\partial\Omega\times(0,\omega]$,

则

$$u(x,t)>0,(x,t)\in\Omega\times[0,\omega]。$$

若

$$B_i u=\frac{\partial u}{\partial v}+\beta_i(x,t)u,$$

则

$$u(x,t)>0,(x,t)\in\overline{\Omega}\times[0,\omega]。$$

若

$$u(x,t)=0,(x,t)\in\partial\Omega\times[0,\omega],$$

则

$$\frac{\partial u}{\partial v}<0,(x,t)\in\partial\Omega\times[0,\omega]。$$

设函数 $f_i(x,t,u_i,u_{1\tau},\cdots,u_{n\tau})=f_i(x,t,u_i,\phi)$ 是 $\overline{\Omega}\times[0,\omega]\times\mathbf{R}\times C([-r,0],\mathbf{R}^n)$ 上的连续函数,记 $X_{\sum}=\{\phi:\phi\in C([-r,0],\mathbf{R}^n),\phi(\theta)\in\sum,\theta\in[-r,0]\}$,其中 $\sum=\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i]=[a,b]$,

对 $u_i:\Omega\times[0,\omega]\to[a_i,b_i],x\in\Omega,t\in[0,\omega],\phi\in X_{\sum}$,

定义

$$H_i(x,t,u_i,\phi)=\sup_{a\leqslant\psi\leqslant\phi}f_i(x,t,u_i,\psi),(i=1,2,\cdots,n),$$
$$h_i(x,t,u_i,\phi)=\inf_{\phi\leqslant\psi\leqslant b}f_i(x,t,u_i,\psi),(i=1,2,\cdots,n),$$

其中 $\psi(0)=\phi(0)$,则有

$$h_i(x,t,u_i,\phi)\leqslant f_i(x,t,u_i,\phi)\leqslant H_i(x,t,u_i,\phi)\ (i=1,2,\cdots,n),$$
$$x\in\Omega,t\in[0,\omega],u_i:\Omega\times[0,\omega]\to[a_i,b_i],\phi\in X_{\sum}。$$

假设

(F_1) 对每一个 $K>0$,存在 $M>0$,使得

$$|f_i(x,t,u_i,\phi)-f_i(y,t,v_i,\psi)|\leqslant M(|x-y|^{\alpha}+|t-s|^{\frac{\alpha}{2}}+|u_i-v_i|+\|\phi-\psi\|_2),(i=1,2,\cdots,n)$$

其中 $(x,t),(y,s)\in\Omega\times[0,\omega]$;$\phi,\psi\in X_{\sum}$;$\|\phi\|_2,\|\psi\|_2\leqslant K$,$\|\phi\|_2=\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}\|\phi(\theta)\|_1$;$u_i,v_i$ 均为从 $\Omega\times[0,\omega]$ 到 $[a_i,b_i]$ 的连续函数;$\|u\|_1=\max\{|u_1|,\cdots,|u_n|\}$。

(F_2) 如果 $\phi\in C([-r,0],\mathbf{R}^n)$,满足 $\phi(\theta)\in\sum,-r\leqslant\theta\leqslant 0$,且 $\phi_i(0)=a_i$(或 $\phi_i(0)=b_i$),那么 $f_i(x,t,u_i,\phi)\geqslant 0$(或 $f_i(x,t,u_i,\phi)\leqslant 0$),对一切 $u_i:\Omega\times[0,\omega]\to[a_i,b_i]$ 及 $(x,t)\in\overline{\Omega}\times[0,\omega]$ 成立 $(i=1,2,\cdots,n)$。

引理2[8] 如果 f_i 满足 (F_1),(F_2),那么 H_i 和 h_i 也满足 (F_1),(F_2),且对 ϕ 单调不减。

证 因为 f_i 满足 (F_2),若 $\phi\in X_{\sum}$ 且 $\phi_i(0)=a_i$,则有 $H_i(x,t,u_i,\phi)\geqslant f_i(x,t,u_i,\phi)\geqslant 0$,若 $\phi_i(0)=b_i$,则有 $f_i(x,t,u_i,\psi)\leqslant 0,a\leqslant\psi\leqslant\phi,\psi_i(0)=\phi_i(0)=b_i$,于是由定义得 $H_i(x,t,u_i,\phi)\leqslant 0$,同理可证 h 也满足 (F_2)。

设 $\phi,\psi\in X_{\sum},\phi\geqslant\psi$ 且 $\phi_i(0)=\psi_i(0)$,由定义显然有 $H_i(x,t,u_i,\phi)\geqslant H_i(x,t,u_i,\psi)$,同理 $h_i(x,t,u_i,\phi)\geqslant h_i(x,t,u_i,\psi)$,即 H_i,h_i 对 ϕ 单调不减. 为证 (F_1),不妨设 $a=0$,即 $\sum=[0,b]$,对 $\eta,\phi\in X_{\sum}$,令 $0\leqslant\psi^n\leqslant\phi,\psi_i^n(0)=\phi_i(0)$ 对一切自然数 n 成立,并使得 $H_i(x,t,u_i,\phi)=\lim\limits_{n\to\infty}f_i(x,t,u_i,\psi^n)$. 对每一个 $n\geqslant 1$,令 $\overline{\psi}_j^n(\theta)=\max\{0,\psi_j^n(\theta)+\eta_j(\theta)-\phi_j(\theta)\}$,$(j=1,2,\cdots,n)$ 则 $\overline{\psi}^n$ 连续,$\overline{\psi}_i^n(0)=\eta_i(0)$,且 $0\leqslant\overline{\psi}^n\leqslant\eta$ 对 $n\geqslant 1$ 成立,所以

$$\begin{aligned}&H_i(x,t,u_i,\phi)-H_i(y,s,v_i,\eta)=\\&\lim_{n\to\infty}f_i(x,t,u_i,\psi^n)-H_i(y,s,v_i,\eta)\leqslant\\&\lim_{n\to\infty}[f_i(x,t,u_i,\psi^n)-f_i(y,s,v_i,\overline{\psi}^n)]\leqslant\\&\lim_{n\to\infty}M(|x-y|^{\alpha}+|t-s|^{\frac{\alpha}{2}}+\\&|u_i-v_i|+\|\psi^n-\overline{\psi}^n\|_2)。\end{aligned}$$

又易知 $|\overline{\psi}_j^n(\theta)-\psi_j^n(\theta)|\leqslant|\eta_j(\theta)-\phi_j(\theta)|$,$\theta\in[-r,0]\quad(j=1,2,\cdots,n)$,于是 $|H_i(x,t,u_i,\phi)-H_i(y,s,v_i,\eta)|\leqslant M(|x-y|^{\alpha}+|t-s|^{\frac{\alpha}{2}}+|u_i-v_i|+\|\eta-\phi\|_2)$,即 H 满足 (F_1),同理可证 h 满足 (F_1)。

定义1 如果存在一对 ω-周期函数 $\tilde{u},\hat{u}\in[C^{2,1}\cdot(\overline{\Omega}\times[0,\omega])]^n$ 满足 $\tilde{u}>\hat{u}$,且

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\tilde{u}_i}{\partial t}+L_i\tilde{u}_i\geqslant H_i(x,t,\tilde{u}_i,\tilde{u}_\tau) & (x,t)\in\Omega\times\mathbf{R},\\ \dfrac{\partial\hat{u}_i}{\partial t}+L_i\hat{u}_i\leqslant h_i(x,t,\hat{u}_i,\hat{u}_\tau) & (x,t)\in\Omega\times\mathbf{R},\\ \hat{u}_i(t,x)\leqslant u_i(t+T,x)\leqslant\tilde{u}_i(t,x), & (-\tau_i\leqslant t\leqslant 0),x\in\Omega\\ B_i\tilde{u}_i(x,t)\geqslant g_i(x,t)\geqslant B_i\hat{u}_i(x,t) & (x,t)\in\partial\Omega\times\mathbf{R},\end{cases}$$

则 $\tilde{u}$,$\hat{u}$ 分别称为式(1)的 ω－周期上、下解。

假设

H_1）系数函数 $a_{kj}^{(i)}(x,t)=a_{jk}^{(i)}(x,t)$,$b_j^{(i)}(x,t)\in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\bar{\Omega}\times[0,\omega])$,$\beta_i(x,t)\geqslant 0$ 和 $g_i(x,t)$可被延拓为 $C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\bar{\Omega}\times[0,+\infty])$上的函数,所有函数关于 t 以 ω 为周期,$i=1,2,\cdots,n$。

H_2)存在一个正常数 r 使得对任意 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_N)\in\mathbf{R}^N$,$(x,t)\in\bar{\Omega}\times[0,\omega]$,$i=1,2,\cdots,n$,有

$$\sum_{j,k=1}^{N}a_{jk}^{(i)}(x,t)\xi_j\xi_k\geqslant r|\xi|^2。$$

H_3)　$f_i(x,t,u_i,u_t)$关于 t 以 ω 为周期,存在一个正常数 M 使得对任意(x,t),$(y,t)\in\bar{\Omega}\times[0,\omega]$,$u_i$,$v_i\in[a_i,b_i]$,$u_t$,$v_t\in X_{\sum}$,　$i=1,2,\cdots,n$ 有

$$|f_i(x,t,u_i,\phi)-f_i(y,t,v_i,\psi)|\leqslant M(|x-y|^{\alpha}+|t-s|^{\frac{\alpha}{2}}+|u_i-v_i|+\|\phi-\psi\|_2)。$$

改写式(1)为形式

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_i}{\partial t}+L_iu_i+Mu_i=f_i(x,t,u_i,u_t)+Mu_i,\\(x,t)\in\Omega\times\mathbf{R};\\B_iu_i(x,t)=g_i(x,t),\\(x,t)\in\partial\Omega\times\mathbf{R};\\i=1,2,\cdots,n。\end{cases}\tag{3}$$

其中 $u_t=(u_{1t},\cdots,u_{nt})$。

显然,问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w_i}{\partial t}+L_iw_i+Mw_i=0,\quad(x,t)\in\Omega\times\mathbf{R},\\B_iw_i(x,t)=g_i(x,t),\quad(x,t)\in\partial\Omega\times\mathbf{R},\\i=1,2,\cdots,n,\end{cases}$$

有唯一 ω－周期解 $w_i(x,t)$。

若令 $v=u-w$,即 $v_i=u_i-w_i(i=1,2,\cdots,n)$,则有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v_i}{\partial t}+L_iv_i+Mv_i=f_i(x,t,v_i,v_t),(x,t)\in\Omega\times\mathbf{R},\\B_iv_i(x,t)=0,(x,t)\in\partial\Omega\times\mathbf{R}.\end{cases}$$

这里

$f_i^*(x,t,v_i,v_t)=f_i(x,t,v_i+w_i,v_t+w_t)+M(v_i+w_i)$

因此,不失一般性,可设系统(1)、(3)中 $g_i(x,t)=0$,$(i=1,2,\cdots,n)$。

首先把问题(1)纳入适当的泛函分析框架,令

$E=\{u(x,t):u=(u_1,\cdots,u_n),u_i\in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\bar{\Omega}\times[0,\omega])$且关于 t 以 ω 周期$(i=1,2,\cdots,n)\}$,

$E^*=\{u(x,t):u=(u_1,u_2,\cdots,u_n),u_i\in C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\bar{\Omega}\times[0,\omega])$且关于 t 以 ω 周期$(i=1,2,\cdots,n)\}$对任意 $u\in E$,边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v_i}{\partial t}+L_iv_i+Mv_i=u_i,\quad(x,t)\in\Omega\times\mathbf{R},\\B_iu_i(x,t)=0,\qquad(x,t)\in\partial\Omega\times\mathbf{R},\\i=1,2,\cdots,n.\end{cases}$$

有唯一 ω－周期解 $v=(v_1,\cdots,v_n)$,这就定义了一个线性算子 $G:E\to E$ 为 $v=Gu$。

由线性抛物型方程解的 L_p 估计知 存在不依赖于 u 的常数 C_1,使得

$$\|v\|_E\leqslant C_1\|u\|_{E^*},u\in E,$$

即算子 G 将 E 中的有界集映入 E^* 中的有界集,而 E^* 中的有界集是 E 中的列紧集,故线性算子 G 是 E 上的紧算子。

易知,$u=(u_1,u_2,\cdots u_n)$是边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_i}{\partial t}+L_iu_i=f_i(x,t,u_i,u_t)\quad(x,t)\in\Omega\times\mathbf{R},\\B_iu_i(x,t)=0\qquad(x,t)\in\partial\Omega\times\mathbf{R},\\i=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

的一个 ω－周期解等价于 u 是算子方程 $u=Tu$ 在 E 上的一个解,这里

$$Tu=G\begin{pmatrix}f_1(x,t,u_i,u_\tau)+Mu_1\\M\\f_n(x,t,u_i,u_\tau)+Mu_n\end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

并且 $T:E\to E$ 是一个紧算子。

3　周期解的存在性

定理 3.1　设式(1)有一对 ω－周期上、下解 $\tilde{u}(x,t)$,$\hat{u}(x,t)$且 $\tilde{u}(x,t)\geqslant\hat{u}(x,t)$,

$(x,t)\in\Omega\times[0,\omega]$,则式(1)存在一个 ω－周期解 $u(x,t)$满足

$$\hat{u}(x,t)\leqslant u(x,t)\leqslant\tilde{u}(x,t),(x,t)\in\Omega\times\mathbf{R}。$$

证　对任意 $u\in E$ 满足 $\hat{u}\leqslant u\leqslant\tilde{u}$,考虑 $v=Tu$,由于

$$Tu=G\begin{pmatrix}f_1(x,t,u_i,u_t)+Mu_1\\M\\f_n(x,t,u_i,u_t)+Mu_n\end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

则有

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+L_iv_i+Mv_i=f_i(x,t,u_i,u_\tau)+Mu_i,$$

$$(i=1,2,\cdots,n)。$$

令 $w=v-\hat{u}$,即 $w_i=v_i-\hat{u}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 则有

$$\frac{\partial w_i}{\partial t}+L_iw_i+Mw_i=$$

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+L_i v_i+Mv_i\right)-\left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t}+L_i\hat{u}_i+M\hat{u}_i\right)\geqslant$$

$$f_i(x,t,u_i,u_t)+Mu_i-h_i(x,t,\hat{u}_i,\hat{u}_t)-M\hat{u}_i\geqslant$$

$$h_i(x,t,u_i,\hat{u}_t)-h_i(x,t,\hat{u}_i,\hat{u}_t)+M(u_i-\hat{u}_i)\geqslant 0$$

由引理1,于是 $w\geqslant 0$,即 $v\geqslant\hat{u}$. 同理可证 $v\leqslant\tilde{u}$,所以 $\hat{u}\leqslant v=Tu\leqslant\tilde{u}$。

由线性抛物型方程解的 L_p 估计知,存在不依赖于 u 的常数 M_1,使得 $v_i=Tu_i\in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\bar{\Omega}\times[0,\omega])$ $(i=1,2,\cdots,n)$,且 $\|v\|_E\leqslant M_1$,令 $S=\{u(x,t):u\in E,\hat{u}\leqslant u\leqslant\tilde{u},\|u\|_E\leqslant M_1\}$,则 S 是 E 中的闭凸集,且 $T(S)\subset S$,紧算子 T 把 S 映入 S,由Schauder不动点定理可知,算子 T 在 S 中有一个不动点,即式(1)有一个 ω-周期解 $u(x,t)$ 满足

$$\hat{u}(x,t)\leqslant u(x,t)\leqslant\tilde{u}(x,t),(x,t)\in\Omega\times\mathbf{R}.$$

参考文献:

[1] BANGE D W. Periodic solutions of a quasilinear parabolic differential equation [J]. Diff Equs,1975,17:61-72.

[2] PAO C V. Periodic solution of parabolic systems with nonlinear boundary condition[J]. Math Anal Appl,1999,234:695-716.

[3] BROWN, K J PHESS. Positive periodic solutions of predator-prey reaction-diffusion systems [J]. Nonlinear Anal,1991,16:1 147-1 158.

[4] 刘希强. 一类反应扩散方程组的周期解或概周期解[J]. 工程数学学报(自然科学版),1994,11(4):107-110.

[5] 何猛省. 一类含时滞的反应扩散方程的周期解和概周期解[J]. 数学学报,1989,32:91-97.

[6] YING DONG LIU, ZHENG YUAN LI, QI XIAO YE. The existence, uniqueness and stability of positive periodic solution for periodic reaction-diffusion system [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2001, 1:1-13.

[7] FANG WEI, LU XIN. Asymptotic periodicity in diffusive *log*istic equations with discrete delays[J]. Nonlinear Analysis Theory Methods & Applications. 1996,26(2):171-178.

[8] WU JIANHONG. Theory and applications of partial functional differential equations[M]. New York:Springer,1996:119.

[9] A HMAD SHAIR, LAZER ALAN C. Asymptotic behaviour of solutions of periodic competition diffusion system [J]. Nonlinear Anal, 1989, 13(3):263-284.

Existence of Periodic Solutions for Reaction-diffusion Systems with Time Delays

ZHENG Ji-ming, WANG Chang-you

(Institute of Applied Mathematics, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, P R China)

Abstract:Periodic solutions of reaction-diffusion systems with time delays are investigated. The upper and lower control function of nonmonotone reaction term is constructed. It is showed that the function satisfies a global Lipschitz condition and quasimonotone. A sort of effective method of studying differential equation with nonmonotone reaction term is gained. It is shown that periodic solutions of this system exist when reaction-term is not monotone and the boundary value system has a pair of coupled ω-upper and lower solutions.

Key words: delay; periodic solution; upper and lower solution; reaction-diffusion systems; fixed point theorem; existence

(编辑 侯 湘)