文章编号:1000-582X(2007)11-0108-03

半环上矩阵半环的几个性质

欧启通
(三明学院 数学与计算机科学系,福建 三明 365004)

摘 要:借助环论的思想方法,讨论了半环 R 上的矩阵半环 $M_n(R)$ 的理想与 R 的理想之间的关系,证明了幺半环 R 上的矩阵半环 $M_n(R)$ 为单半环当且仅当 R 为单半环,$M_n(R)$ 的理想 $M_n(I)$ 是幂零理想当且仅当 I 是 R 的幂零理想等定理。

关键词:半环;半环上的矩阵;单半环
中图分类号:O151.21 文献标志码:A

半环是最常见的代数结构、它不仅在拓扑学、分析学与最优化理想论中有重要应用,而且在计算机科学中也有极其重要的应用。有关这些情况,近几年来,国内外已有专著出版[1-2]。

因为半环 R 的每一个元不一定都有负元,因此半环上的矩阵半环的性质要比域上或环上的矩阵环复杂得多。关于这方面的研究目前国内还刚刚开始。福州大学谭宜家教授和他的学生们主要讨论了交换半环上矩阵的一些重要性质[3-6];陈艳平,陈逢明给出了非负幂等半环上的矩阵可逆的几个等价条件[7];段俊生则给出了坡上矩阵可逆的条件[8]。

笔者主要以泛代数的观点作指导,借助环论的思想方法,讨论了半环 R 上的矩阵半环 $M_n(R)$ 的理想与 R 的理想之间的关系,得到了幺半环 R 上的矩阵半环 $M_n(R)$ 为单半环的充要条件是 R 为单半环,幺半环 R 上的矩阵半环 $M_n(R)$ 的理想 $M_n(I)$ 是幂零理想当且仅当 I 是 R 的幂零理想。

1 基本概念

定义1[2] 设 R 是非空集合. 若在 R 中定义有两个代数运算“ + ”与“ · ”,使 $(R,+)$ 作成交换半群,$(R,\cdot)$ 作成半群,并且“ · ”对“ + ”的两个分配律都成立,则称 R 为一个半环,记为 $(R,+,\cdot)$。若半群 $(R,\cdot)$ 也是交换半群,则称 $(R,+,\cdot)$ 为交换半环。若半群 $(R,+)$ 是幺半群,则称 $(R,+,\cdot)$ 为含零元的半环。若半群 $(R,\cdot)$ 是幺半群,则称 $(R,+,\cdot)$ 为幺半环。

笔者所述的半环均指含零元的半环。

定义2 设 R 是半环,R 上一切 n 阶方阵所组成的集合关于矩阵的加法和乘法构成一个半环,称为半环 R 上的矩阵半环,记为 $M_n(R)$。

定义3[2] 设 R 是半环,I 是 R 的非空子集,如果对任意 $r\in R$, $x_1,x_2\in I$,有 $x_1+x_2, rx, xr\in I$,则称 I 是 R 的理想,记为 $I\lhd R$。

只含零元素0的子集{0}和 R 本身必是半环 R 的理想,称为半环 R 的平凡理想。除平凡理想以外的理想,称为半环 R 的真理想。只有平凡理想的半环 R 称为单半环。

定义4[1] 半环 R 的一个非空子集 A 称为可减的,如果对于任意 $a,b\in R$,有 $a, a+b\in A$,则必有 $b\in A$。

定义5 半环 R 的一个不等于 R 的理想 J 称为 R 的极大理想,如果除了 R 和 J 以外,没有包含 J 的理想。

定义6[2] 设 A 是半环 R 的一个非空子集,称 $(A)=\cap I_\alpha$(I_α 取遍 R 的包含 A 的理想)为 R 的由 A 生

收稿日期:2007-07-10
基金项目:福建省自然科学基金资助项目(Z0511050);福建省教育厅自然科学基金资助项目(JA06047);三明学院自然科学基金资助项目(B0501/Q)
作者简介:欧启通(1971-),男,三明学院副教授,硕士,主要从事半环理论与自动机研究,(Tel)0598-8983629;(E-mail)smoqt@163.com。

成的理想。

特别地,当 $A = \{a\}$ 时,称为由 a 生成的主理想。若半环 R 的每个理想都是主理想,则称半环 R 为主理想半环。

命题 1[2]　设 R 是半环,$a \in R$,则

$(a) = \{\sum_{fin}(n_i a + x_i a + a y_i + u_i a v_i) \mid n_i$ 是非负整数,$x_i, y_i, u_i, v_i \in R\}$。

推论 1　设 R 是交换幺半环,$a \in R$,则 $(a) = \{a \mid r \in R\}$。

2　主要结论

命题 2　若 I 是半环 R 的理想,则 $M_n(I)$ 是矩阵半环 $M_n(R)$ 的理想。

证明 :因为零矩阵是 $M_n(I)$ 的矩阵,因此 $M_n(I)$ 非空。对任意 $(a_{ij}),(b_{ij}) \in M_n(I),(x_{ij}) \in M_n(R)$,有 $(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) \in M_n(I)$,令 $(c_{ij}) = (x_{ij})(a_{ij})$,因为 $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} a_{kj} \in I$,所以 $(x_{ij})(a_{ij}) \in M_n(I)$。同理可证,$(a_{ij})(x_{ij}) \in M_n(I)$。于是 $M_n(I)$ 是 $M_n(R)$ 的理想。

命题 3　设 R 是幺半环,K 是 $M_n(R)$ 的理想,则存在唯一的 R 的理想 I,使得 K 恰好为 I 上一切 n 阶方阵形成的半环,即 $K = M_n(I)$。

证明 :设幺半环 R 的单位元为 1,记 $M_n(R)$ 的乘法单位元为 E,$M_n(R)$ 中第 i 行第 j 列处的元素为 1,其余元素均为 0 的 n 阶方阵为 E_{ij}. 若 K 是 $M_n(R)$ 的理想,a 是K 中任意矩阵 A 的第 i 行第 j 列的元素,则 $aE_{ij} = E_{ii} A E_{jj} \in K$。

以 I 记 K 中所有 n 阶矩阵上的元素组成的集合,即 $I = \{a_{ij} \mid A = (a_{ij}) \in K\}$,则由 K 是理想,可得 $I = \{a_{ij} \mid A = (a_{ij})$ 取遍 $K\} = \{a \mid aE_{ij} \in K, i, j = 1, 2, \cdots, n\}$。容易验证 I 是 R 的理想。事实上,显然 $0 \in I$,所以 I 非空。又对于任意的 $a, b \in I, x \in R$,有 $(a + b)E_{ij} = aE_{ij} + bE_{ij}$,$(ax)E_{ij} = (aE_{ij})(xE)$,$(xa)E_{ij} = (xE)(aE_{ij}) \in K$ 得 $a + b, ax, xa \in I$。

若存在 I' 也是 R 的理想,使得 $K = M_n(I')$,即 $M_n(I) = M_n(I')$。对任意 $a \in I$,有 $aE_{ij} \in M_n(I) = M_n(I')$,所以,$a \in I'$,从而 $I \subset I'$。另一方面,对任意 $a \in I'$,有 $aE_{ij} \in M_n(I') = M_n(I)$,所以,$a \in I$,从而 $I' \subset I$。于是,$I' = I$。

定理 1　设 R 是一个幺半环。$M = \{R$ 上的所有理想$\}$ 与 $N = \{M_n(R)$ 的所有理想$\}$ 之间存在一个保持包含关系的双射。进一步地,R 的一个理想 I 是可减的当且仅当 $M_n(R)$ 对应的理想 $M_n(I)$ 是可减的。

证明 如果 I 是 R 的理想,集合 $f(I) = \{(a_{ij}) \in M_n(R) \mid a_{ij} \in I, 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$。由上面证明 $f(I)$ 是 $M_n(R)$ 的理想。进一步,$I \subset I'$ 蕴含 $f(I) \subset f(I')$,因此 f 是一个保持包含关系的映射。另一方面,设 K 是 $M_n(R)$ 的一个理想,令 $g(K) = \{a \in R \mid aE \in K\}$。则对任意 R 的理想 I,有 $g(I) = I$。因而,如果 K 是 $M_n(R)$ 的一个理想,$A = (a_{ij}) \in K$,那么对任意 $i, j(i, j = 1, 2, \cdots, n)$,有 $a_{ij}E = \sum_{k=1}^{n} E_{ki} A E_{jk} \in K$。于是$fg(K) = K$,因此 f 是一个双射。

现在假设 I 是 R 的一个可减的理想,并令 (a_{ij}) 和 (b_{ij}) 为 $M_n(R)$ 中使得 (a_{ij}) 和 $(a_{ij} + b_{ij})$ 都属于 $f(I)$,那么对任意 $i, j(i, j = 1, 2, \cdots, n)$,$a_{ij}, a_{ij} + b_{ij}$ 都属于 I,因此相应地有 $b_{ij} \in I$。于是 $(b_{ij}) \in f(I)$,得 $f(I)$ 是可减的。反之,假设 $f(I)$ 是可减的,令 a 和 b 为 R 中使得 a 和 $a + b$ 都属于 I,那么 aE 和 $(a + b)E = aE + bE$ 都属于 $f(I)$,因此 $bE \in f(I)$,得 $b \in I$。于是 I 是可减的。

例 1　设 R 是非负整数集,I 是非负偶数集。R 关于数的普通加法和乘法构成一个含单位元 1 的幺半环,I 是它的一个可减的理想。显然,I 上的 n 阶矩阵半环 $M_n(I)$ 也是 $M_n(R)$ 的可减的理想。进一步,令 $I_k = \{kn \mid n \in N\}, k = 0, 1, \cdots$,则 I_k 都是 R 的理想,其中,当 $k = 0$ 时,$I_0 = \{0\}$,当 $k = 1$ 时,$I_1 = R$。当然 I_k 上的矩阵半环 $M_n(I_k)$ 都是 $M_n(R)$ 的理想,并且 I_k 与 $M_n(I_k)$ 是一一对应的。易知,由 $I_4 \subset I_2$ 有 $M_n(I_4) \subset M_n(I_2)$。

若 R 是不含单位元的半环,则定理 1 不成立。

例 2　设 $R = \{0, a, b, a + b\}$。在 R 上定义加法与乘法如下:

$+$	0	a	b	$a+b$
0	0	a	b	$a+b$
a	a	0	$a+b$	b
b	b	$a+b$	0	a
$a+b$	$a+b$	b	a	0

$\cdot$	0	a	b	$a+b$
0	0	0	0	0
a	0	0	0	0
b	0	0	0	0
$a+b$	0	0	0	0

则 $(R, +, \cdot)$ 构成一个无单位元的半环。显然 $K = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$是 R 上二阶矩阵半环 $M_2(R)$ 的理

想。要使 $K=M_2(I)$,只有当 $I=\{0,a\}$,但 $M_2(I)\neq K$。

命题4 设 R 是幺半环,I 为 R 的理想,则 $M_n(I)$ 为 $M_n(R)$ 的极大理想当且仅当 I 为 R 的极大理想。

证明:设 I 为 R 的极大理想,K 为 $M_n(R)$ 的理想,且 $M_n(I)\subset K\subset M_n(R)$,则存在 R 的理想 J,使 $K=M_n(J)$。因此 $M_n(I)\subset M_n(J)\subset M_n(R)$,于是 $I\subset J\subset R$。若 $K\neq M_n(I)$,则 $I\neq J$。由 I 为 R 的极大理想知 $J=R$。所以 $K=M_n(R)$。从而 $M_n(I)$ 为 $M_n(R)$ 的极大理想。

反之,设 $M_n(I)$ 为 $M_n(R)$ 的极大理想,则对于 R 的理想 J。若 $I\subset J\subset R$,则由定理1知,$M_n(I)\subset M_n(J)\subset M_n(R)$。若 $J\neq I$,则 $M_n(J)\neq M_n(I)$,由 $M_n(I)$ 为 $M_n(R)$ 的极大理想,知 $M_n(J)=M_n(R)$,从而 $J=R$,所以 I 为 R 的极大理想。

定理2 设 R 是幺半环,则 $M_n(R)$ 为单半环当且仅当 R 为单半环。

证明:$M_n(R)$ 为单半环当且仅当 $M_n(R)$ 的所有理想为零理想和 $M_n(R)$ 本身,$M_n(R)$ 的所有理想为零理想和 $M_n(R)$ 本身当且仅当 R 的所有理想为 $\{0\}$ 和 R 本身,而 R 的所有理想为 $\{0\}$ 和 R 本身当且仅当 R 为单半环。

定理3 设 R 是交换幺半环。若 I 是 R 的主理想,则 $M_n(I)$ 是 $M_n(R)$ 的主理想。

证明:已知 R 为交换幺半环。由推论1知 R 的主理想 $I=(a)=\{ra\mid r\in R\}$,再由命题2知 $M_n(I)$ 是 $M_n(R)$ 的理想。任取 $A\in M_n(I)$,可设 $A=(ar_{ij})_{n\times n}$,其中 $r_{ij}\in R(i,j=1,2,\cdots,n)$。令 $B=(r_{ij})_{n\times n}$,则 $A=aB=(aE)B$。从而有 $A\in(aE)$,其中 (aE) 表示 $M_n(R)$ 中由 (aE) 生成的主理想,于是 $M_n(I)\subset(aE)$。反之,因为 E 是 $M_n(R)$ 的单位元,所以 $(aE)=\{aE\cdot B\mid B\in M_n(R)\}$,于是 $(aE)\subset M_n(I)$。因此 $M_n(I)=(aE)$ 是主理想。

推论2 设 R 是交换幺半环。若 R 是主理想半环,则 $M_n(R)$ 也是主理想半环。

证明:设 K 是 $M_n(R)$ 的任意理想,由定理1知,存在 R 的理想 I,使得 $K=M_n(I)$。再由定理3,I 是主理想半环 R 的主理想,得 K 是 $M_n(R)$ 的主理想,因此 $M_n(R)$ 为主理想半环。

例3 设 R 是例1提到的半环,显然 I 和 $M_n(I)$ 分别是 R 和 $M_n(R)$ 的一个极大理想。并且,易知 R 和 $M_n(R)$ 都是主理想半环。

定理4 设 R 是幺半环,I 是 R 的理想,则 $M_n(I)$ 是 $M_n(R)$ 幂零理想当且仅当 I 是 R 的幂零理想。

证明:若 I 是 R 的幂零理想,则存在正整数 n,使得 $I^n=\{0\}$,即 I 中的任意 n 个元素的乘积为0。对于 $M_n(I)$ 中任意的 n 个矩阵 $(a_{ij}^1),(a_{ij}^2),\cdots,(a_{ij}^n)$,它们的乘积 $(a_{ij}^1)(a_{ij}^2)\cdots(a_{ij}^n)$ 中位于 s 行 t 列的元素恒为 I 中 n 个元素乘积的代数和。因此,s 行 t 列的元素为零。所以 $[M_n(I)]^n=\{0\}$,从而 $M_n(I)$ 为幂零理想。

反之,设 $M_n(I)$ 是 $M_n(R)$ 的幂零理想,则存在正整数 n,使得 $[M_n(I)]^n=\{0\}$。因此,对 $M_n(I)$ 中任意的 n 个矩阵 $(a_{ij}^1),(a_{ij}^2),\cdots,(a_{ij}^n)$,有

$$(a_{ij}^1)(a_{ij}^2)\cdots(a_{ij}^n)=0。$$

所以对任意 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in I$,有

$$(a_1a_2\cdots a_n)E_{11}=(a_1E_{11})(a_2E_{11})\cdots(a_nE_{11})=0。$$

所以 $a_1a_2\cdots a_n=0$,即 $I^n=\{0\}$。于是 I 是 R 的幂零理想。

例4 设 $R=\{k_0+k_1\alpha+k_2\alpha^2\mid\alpha^3=0,k_i$ 为非负整数,$i=0,1,2\}$,在 R 中定义加法与乘法类似于多项式的加法与乘法,但需 $\alpha^3=0$,则 R 作成一个含单位元1的交换幺半环。令 $I=\{l_1\alpha+l_2\alpha^2\mid\alpha^3=0,l_i$ 为非负整数,$i=1,2\}$。显然,I 是 R 的理想。又对任意的 $a=l_1\alpha+l_2\alpha^2,b=m_1\alpha+m_2\alpha^2,c=n_1\alpha+n_2\alpha^2\in I$,有 $abc=(l_1\alpha+l_2\alpha^2)(m_1\alpha+m_2\alpha^2)(n_1\alpha+n_2\alpha^2)=0$,所以 I 是幂零理想。易知 $M_3(I)$ 是 $M_3(R)$ 的幂零理想,因为 $M_3(I)$ 中任意的3个矩阵 A,B,C,它们的乘积 A,B,C 中位于 s 行 t 列的元素恒为 I 中3个元素乘积的代数和。因此,s 行 t 列的元素为零。所以 $[M_3(I)]^3=\{0\}$。

参考文献:

[1] GOLAN J S. Semiring and their application[M]. London: Longman Scientific and Technical Press, 2000.

[2] 陈培慈. 半环理论与语言和自动机[M]. 南昌:江西高校出版社,1993:1-5.

[3] 李红海,谭宜家. 布尔代数上强保持交换矩阵对的线性算子[J]. 福州大学学报:自然科学版,2003,31(4):384-387.

[4] 黄惠玲,谭宜家. 交换半环上矩阵的性质[J]. 宁夏大学学报:自然科学版,2006,27(1):10-12.

[5] 黄惠玲,谭宜家. 交换半环上矩阵代数的自同构[J]. 福州大学学报:自然科学版,2006,34(1):1-4.

[6] 周梅萍,谭宜家. 关于坡上矩阵的一个公开问题[J]. 福州大学学报:自然科学版,2006,34(3):313-315.

[7] 陈艳平,陈逢明. 非负幂等半环上矩阵可逆的几个等价条件[J]. 福建商业高等专科学校学报,2005(4):54-56.

[8] 段俊生. 坡上矩阵可逆的条件[J]. 数学进展,2006,35(3):285-288.

(下转第134页)

总之,把模拟模拟引入到光环境设计中避免了采用真实数据的不易操作性和不确定性,同时又可以方便快捷地对模拟结果进行修改和调整。模拟软件模拟效果直观、用户使用方便,适于建筑师在做初步设计阶段进行同步的辅助设计和分析。

参考文献:

[1] 荣浩磊. 建筑节能与光环境设计[J]. 照明工程学报,2005年,16(4):60.

[2] 李志中. 浅谈建筑设计中的光环境设计[N]. 山西科技报,2003-12-12(A03).

[3] 重庆大学城市建设与环境工程学院. 室内环境与建筑节能示范工程技术分析报告[R]. 重庆:重庆大学,2005.

[4] 赵 蓓,余庄. 建筑光环境的计算机模拟设计[C]//中国建筑学会2003. 北京,2003.

[5] topenergy模拟组. 生态设计软件ecotect在实际中的应用[EB1102]. www. sketchuf. com. cn,2006-12-30.

[6] 余庄. 建筑智能设计——计算机辅助建筑性能的模拟与分析[M]. 北京:中国建筑工业出版社,2006.

Example of the Light Environment Design of Energy Conservation Building

YU Wei, LI Bai-zhan, LI Nan

(College of Urban Construction and Environmental Engineering, Chonging University, Chongqing 400030, P R China)

Abstract: By expounding the building energy conservation leading to the importance of architecture light environment design, a preliminary instruction for the Ecotect was made. It introduces the superiority of the Ecotect software which applied in the architecture. Through the light environment simulation on a residential building, further description of the application of simulation software was also made. By analyzing examples, the proposals for the light-related environmental design of the residential building can be obtained.

Key words: energy conservation; architecture environment; architecture light environment; simulation software of light environment; the residential building simulation

(编辑 张小强)

(上接第110页)

Some Properties of Matrix Semiring over a Semiring

OU Qi-tong

(Department of Mathematics and Computer Science, Sanming College, Sanming 365004, P R China)

Abstract: The relationship between ideals of a semiring R and ideals of a matrix semiring $M_n(R)$ over the semiring R is discussed by using method of ring theory. At the same time it proves some theories, such as if R is a unitary semiring, then $M_n(R)$ is simple if and only if R is simple and an ideal $M_n(I)$ of $M_n(R)$ is nilpotent if and only if I is nilpotent.

Key words: semiring; matrix over semiring; simple semiring

(编辑 李胜春)