文章编号:1000-582X(2007)02-0136-03

一类非线性发展方程的渐近吸引子*

赵磊娜[1],张兴友[1,2],邢庭莉[1]
(1. 重庆大学 数理学院,重庆 400030;2. Institute of Fundamental Sciences,
Massey University, Palmerston North, New Zealand)

摘　要:无穷维动力系统的基本理念是将一个无穷维系统约化为一个有限维系统,但是,要进一步研究约化后的有限维系统的动力学行为是非常困难的,因为它们的结构是未知的。为了克服这个困难,诸如近似惯性流形等概念已被引入,对于 Navier-Stokes 方程,其近似惯性流形的存在性问题已被讨论,它是通过挤压性质找到一个 Lipschitz 函数,说明其整体吸引子位于该函数图的某个小领域,而文中是通过构造一个有限维解序列,说明长时间后其趋于方程的整体吸引子,理论上给出了一类发展方程的渐近吸引子的构造方法.

关键词:非线性发展方程;解序列;整体吸引子;渐近吸引子
中图分类号:O175.29　　**文献标识码**:A

1 预备知识

在研究无穷维动力学性质的过程中,人们相继建立了整体吸引子和惯性流形,将一个无穷维系统约化成一个有限维系统,但是要进一步研究约化后的有限维系统的动力学行为就显得非常困难,因为它们的结构是未知的,因而产生了近似惯性流形,指数吸引子和近似吸引子等概念[1-5]. 可是利用它们所得的近似系统与原系统之间缺少较严格的等价性,针对这一不足,王冠香、刘曾荣在文献[6]中提出了有限维渐近吸引子的概念. 定义对一个发展系统

$$u_t + Au = f(u), \tag{1}$$

记其相空间为 H,解算子半群为 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$,吸收集为 B,假设对任意的 $u_0\in B$,存在 N 维子空间中的近似解序列 $\{u^k(t)\}_{k\geqslant 1}$ 及 $t^*(B)$,满足 $|u^k(t)-S(t)u_0|_H\to 0, k\to\infty, t\geqslant t^*(B)$,则定义 $B^k=\bigcap_{s\geqslant 0}\overline{\bigcup_{t\geqslant s, u_0\in B} u^k(t)}$ 为系统(1)的渐近吸引子,其中 $|\cdot|_H$ 为相空间 H 的范数,$u^k(t)$ 依赖于初值 u_0,而 $t^*(B)$ 只依赖于吸收集半径,且对 B 中的 u_0 是一致的.

考虑如下一维周期边界条件下 N-S 方程的等价形式[4]:

$$u_t - \gamma u_{xx} + B(u,u) = fu(x,0) = u_0(x) \tag{2}$$

其中 $u(x,t): Q\times R^+\to R$, $Q=[0,2\pi]$,双线性项 $B(u,u)$ 定义如下:

$$<B(u,v),\omega> = \int_Q uv_x\omega \mathrm{d}x, \gamma>0, f\in H\equiv$$
$$\left\{w\in L_p^2(Q): \int_Q \omega = 0\right\}, u_0\in V\equiv$$
$$\left\{\omega\in H_p^1(Q): \int_Q \omega \mathrm{d}x = 0\right\}$$

这里的 $L_p^2(Q)$ 和 $H_p^1(Q)$ 表示 $C_p^\infty(Q)$ 关于 L^2 和 H^1 范数的完备化,其中下标 p 表示这里所讨论的均是周期函数,此方程为 N-S 方程的等价形式,故可以得到它的解的存在唯一性,相空间 V 和 H 上的解算子半群 $S(t)$ 及整体吸引子的存在性,详细证明参考文献[4].

下面引入关于吸收集的结果.

引理 1　对任意 $u_0\in H$,若满足 $|u_0|\leqslant r$,则存在时间 $t^*=t^*(\gamma)>0, \rho_0, \rho_1>0$,使得 $t>t^*$ 时,$|u(x,t)|\leqslant\rho_0$, $|u_x(x,t)|\leqslant\rho_1$,其中 $|\cdot|$ 表示 H 上的范数(即 L^2 范数),即 $B=\{u\in v: |u|\leqslant\rho_0, |u_x|\leqslant\rho_1\}$ 是方程(2)在 H 中的吸收集.

---

* 收稿日期:2006-08-17
基金项目:重庆市高校中青年骨干教师基金资助项目(20020126);重庆大学骨干教师基金资助项目(2003018)
作者简介:赵磊娜(1981-),女,山东青岛人,重庆大学硕士研究生,主要从事偏微分方程理论的研究. 张兴友(1968-),男,副教授,E-mail:zhangaxy@cqu.edu.cn.

2 渐近吸引子

因为 H 具有完备正交基 $\{\sin kx,\cos kx,k=1,2,\cdots\}$，所以，对自然数 N，记其张成 N 维子空间 $span\{\sin kx,\cos kx,k=1,2,\cdots N\}$ 为 H_N，记 H 到 H_N 的 N 维正交投影为 P_N，而 $Q_N=I-P_N$，对任意 $u\in H$，记 $p=P_Nu,q=Q_Nu$，从而 $u=p+q$，用正交投影将方程(2)分成2部分：

$$\begin{aligned} p_t-\gamma p_{xx}+P_NB(u,u)&=P_Nf,\\ q_t-\gamma q_{xx}+Q_NB(u,u)&=Q_Nf.\end{aligned}\qquad(3)$$

对任意初值 $u_0\in B$，按如下方式构造渐近解序列：

$$\left.\begin{aligned} q_t^0-\gamma q_{xx}^0+Q_NB(p,p)&=Q_Nf\\ q^0(x,0)&=0\end{aligned}\right\}.\qquad(4)$$

$$\left.\begin{aligned} q_t^k-\gamma q_{xx}^k+Q_NB(u^{k-1},u^{k-1})&=Q_Nf\\ q^k(x,0)&=0\end{aligned}\right\}.\ k=1,2,\cdots\qquad(5)$$

其中 $u^k=p+q^k$，系统(3)，(4)的解的存在唯一性问题及吸收集等结果类似于 N－S 方程可以得出[4]，此处省略.

下面考虑渐近解序列 $u^k(x,t)$ 对真实解 $u(x,t)$ 的逼近性，首先证明，对任意 $u_0\in B$，上述得到的渐近解序列不会远离吸收集 B.

定理2　设 $u(x,t)$ 是对应于初值 $u_0\in B$ 的系统(2)的解，$q^k,k=0,1,2,\cdots$ 按照式(4)，式(5)给出，则存在自然数 N_0 和正数 $t_1(B)>0$，使得当 $N\geqslant N_0$ 时有：

$$|u^k|\leqslant 2\rho_0,\ |u_x^k|\leqslant 2\rho_1,\ t\geqslant t_1(B),k=0,1,2,\cdots\qquad(6)$$

证明：由吸收集的正不变性，$u_0\in B$ 可得到 $u(t)\in B$，从而 $|p|\leqslant\rho_0,|p_x|\leqslant\rho_1$，为了证明(6)式，只需证明

$$|q^x|\leqslant\rho_0,\ |q_x^k|\leqslant\rho_1,k=0,1,2,\cdots\qquad(7)$$

下面用数学归纳法证明(7)式的成立.

当 $k=0$，用 q^0 与(4)作内积可得

$$\frac12\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}|q^0|^2+\gamma|q_x^0|^2\leqslant|<Q_NB(p,p)-Q_Nf,q^0>|\leqslant(|B(p,p)|+|f|)\cdot|q^0|\leqslant(|p|_{L^\infty}|p_x|+|f|)\cdot|q^0|\leqslant(\sqrt2\rho_0^{\frac12}\rho_1^{\frac32}+|f|)\cdot|q^0|$$

这里用到了 Agmon 不等式在一维的情况：$|u|_{L^\infty}\leqslant\sqrt2|u|^{\frac12}|u_x|^{\frac12}$

由 q 的定义知不等式 $|q_x|^2\geqslant(N+1)|q|^2$ 成立，从而有

$$\frac12\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}|q^0|^2+\gamma(N+1)|q^0|^2\leqslant(\sqrt2\rho_0^{\frac12}\rho_1^{\frac32}+|f|)|q^0|$$

$$\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}|q^0|^2+\gamma(N+1)|q^0|^2\leqslant\frac{4(\sqrt2\rho_0^{\frac12}\rho_1^{\frac32}+|f|)^2}{\gamma(N+1)}$$

由 Gronwall 不等式可得，存在

$$t_{11}(B)=\frac{1}{\gamma(N+1)^2}\log\frac{\rho_0\gamma^2(N+1)^2}{4(\sqrt2\rho_0^{\frac12}\rho_1^{\frac32}+|f|)^2},$$

使得

$$|q^0|^2\leqslant\frac{8(\sqrt2\rho_0^{\frac12}\rho_1^{\frac32}+|f|)^2}{\gamma^2(N+1)^2},$$

$$|q^0|\leqslant\frac{2\sqrt2(\sqrt2\rho_0^{\frac12}\rho_1^{\frac32}+|f|)}{\gamma(N+1)},t\geqslant t_{11}\qquad(8)$$

若取

$$N_1=\min\left\{N>0,\frac{2\sqrt2(\sqrt2\rho_0^{\frac12}\rho_1^{\frac32}|f|)}{\gamma(N+1)}\leqslant\rho_0\right\}$$

则 $|q^0|\leqslant\rho_0,t\geqslant t_{11}$.　(9)

用 $-q_{xx}^0$ 与(4)作内积可得：

$$\frac12\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}|q_x^0|^2+\gamma|q_{xx}^0|^2\leqslant(|B(p,p)|+|f|)\cdot|q_{xx}^0|\leqslant\frac{1}{2\gamma}(\sqrt2\rho_0^{\frac12}\rho_1^{\frac32}+|f|)^2+\frac{\gamma}{2}|q_{xx}^0|^2$$

$$\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}|q_x^0|+\gamma(N+1)|q_x^0|^2\leqslant\frac1\gamma(\sqrt2\rho_0^{\frac12}\rho_1^{\frac32}+|f|)^2$$

由 Gronwall 不等式可得，存在 $t_{12}(B)=\frac{1}{\gamma(N+1)}\log\frac{\rho_0\gamma^2(N+1)}{(\sqrt2\rho_0^{\frac12}\rho_1^{\frac32}+|f|)^2}$，使得

$$|q_x^0|\leqslant\frac{2(\sqrt2\rho_0^{\frac12}\rho_1^{\frac32}+|f|)^2}{\gamma^2(N+1)},t\geqslant t_{12}(B)\qquad(10)$$

若取 $N_2=\min\left\{N>0,\frac{\sqrt2(\sqrt2\rho_0^{\frac12}\rho_1^{\frac32}+|f|)}{\gamma^2(N+1)}\leqslant\rho_1^2\right\}$，

则有 $|q_x^0|\leqslant p_1,t\geqslant t_{12}(B)$　(11)

因此，$k=0$ 时，(7)式成立.

假设(7)式对 $k-1$ 成立，即 $|q^{k-1}|\leqslant\rho_0,|q_x^k|\leqslant\rho_1$　(12)

用 q^k 与(5)作内积，利用 $u^{k-1}=p+q^{k-1}$ 可得

$$|B(u^{k-1},u^{k-1})|\leqslant|u^{k-1}|_{L^\infty}|u_x^{k-1}|\leqslant2\sqrt2\rho_0^{\frac12}\rho_1^{\frac32}$$

$$\frac12\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}|q^k|^2+\gamma|q_x^k|\leqslant|(Q_NB(u^{k-1},u^{k-1})-Q_Nf,q^k)|\leqslant(|B(u^{k-1},u^{k-1})|+|f|)|q^k|\leqslant(2\sqrt2\rho_0^{\frac12}\rho_1^{\frac32}+|f|)|q^k|$$

由 Gronwall 不等式，类似于(8)(9)可知存在 t_{13} 和 N_3，只要 $t\geqslant t_{13},N\geqslant N_3$ 就有 $|q^k|\leqslant\rho_0$.　(13)

类似于(10)、(11)的证明，可以得到 t_{14} 和 N_4，只要 $t\geqslant t_{14},N\geqslant N_4$ 就有 $|q_x^k|\leqslant\rho_1$.　(14)

注意到这里的 $t_{1i},N_i(i=1,2,3,4)$ 均与 k 无关，由归纳原理取 $N_0=\min\{N_1,N_2,N_3,N_4\}$，$t_1=\max\{t_{11},t_{12},t_{13},t_{14}\}$，则定理2获证.

下面进一步证明 q^k 收敛于 q.

定理3 设 $u(x,t)$ 是对应于初值 $u_0\in B$ 的系统(2)的解, $q^k,k=0,1,2,\cdots$ 是式(4)、(5)的解,则存在 $t_2(B)$ 和自然数 N_1,使得当 $N\geqslant N_1$ 时, $|q_x^k-q_x|\to 0,k\to\infty$, $t\geqslant t_2(B)$. (15)

证明:记 $w^k=q^k-q$,则由式(3)和式(5)可得

$$w_t^k-\gamma w_{xx}^k+Q_NB(u^{k-1},u^{k-1})-Q_NB(u,u)=0,k=1,2\cdots \tag{16}$$

$$\text{而}B(u^{k-1},u^{k-1})-B(u,u)=B(u^{k-1},u^{k-1})-B(u,u^{k-1})+B(u,u^{k-1})-B(u,u)=B(w^{k-1},u^{k-1})+B(u,w^{k-1}). \tag{17}$$

用 $-w_{xx}^k$ 与(16)作内积,利用 $H_p^1(Q)$ 可以有界嵌入到 $L^\infty(Q)$,可得:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|w_x^k|^2+\gamma|w_{xx}^k|^2\leqslant (|B(w^{k-1},u^{k-1})|+|B(u,w^{k-1})|)|w_{xx}^k|\leqslant (|w^{k-1}|_{L^\infty}|u_x^{k-1}|+|u|_{L^\infty}|w_x^{k-1}|)|w_{xx}^k|\leqslant (2C\rho_1+\sqrt{2}\rho_0^{\frac{1}{2}}\rho_1^{\frac{1}{2}})|w_x^{k-1}||w_{xx}^k|$$

这里用到了不等式: $|u|_{L^\infty}\leqslant C|u_x|$,

$$|u|_{L^\infty}\leqslant\sqrt{2}|u|^{\frac{1}{2}}|u_x|^{\frac{1}{2}}.$$

由 Cauchy 不等式可得:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|w_x^k|^2+\gamma|w_{xx}^k|\leqslant\frac{2\left(2C\rho_1+\sqrt{2}\rho_0^{\frac{1}{2}}\rho_1^{\frac{1}{2}}\right)^2}{\gamma}|w_x^{k-1}|^2$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|w_x^k|^2+\gamma(N+1)^2|w_x^k|^2\leqslant\frac{2\left(2C\rho_1+\sqrt{2}\rho_0^{\frac{1}{2}}\rho_1^{\frac{1}{2}}\right)^2}{\gamma}|w_x^{k-1}|^2. \tag{18}$$

另一方面,由的定义易知

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|w_x^0|^2+\gamma|w_{xx}^0|\leqslant\left(|B(w^0,p)|+|B(u,w^0)|\right)|w_{xx}^0|\leqslant\left(C\rho_1+\sqrt{2}\rho_0^{\frac{1}{2}}\rho_1^{\frac{1}{2}}\right)|w_x^0||w_{xx}^0|\leqslant\frac{\left(C\rho_1+\sqrt{2}\rho_0^{\frac{1}{2}}\rho_1^{\frac{1}{2}}\right)}{N+1}|w_{xx}^0|^2$$

令 $N_{11}=\min\left\{N>0,\dfrac{\left(C\rho_1+\sqrt{2}\rho_0^{\frac{1}{2}}\rho_1^{\frac{1}{2}}\right)}{N+1}\right\}$,则当 $N\geqslant N_{11}$ 时, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|w_x^0|\leqslant 0,\forall t\geqslant 0$

$$|w_x^0|^2\leqslant|w_x^0(x,0)|^2,\forall t\geqslant 0 \tag{19}$$

于是在(18)中,令 $k=1$,可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|w_x^1|^2+\gamma(+1)^2|w_x^1|\leqslant\frac{2\left(2C\rho_1+\sqrt{2}\rho_0^{\frac{1}{2}}\rho_1^{\frac{1}{2}}\right)^2}{\gamma}|w_x^0(x,0)|^2.$$

由 Gronwall 不等式可知,存在 $t_{21}(B)$ 使得

$$|w_x^1|\leqslant\frac{4\left(2C\rho_1+\sqrt{2}\rho_0^{\frac{1}{2}}\rho_1^{\frac{1}{2}}\right)}{\gamma(N+1)}|w_x^0(x,0)|,t\geqslant t_{21} \tag{20}$$

用数学归纳法可以证明,存在 $t_{2k}>0$,使得

$$|w_x^k|\leqslant\left\{\frac{4\left(2C\rho_1+\sqrt{2}\rho_0^{\frac{1}{2}}\rho_1^{\frac{1}{2}}\right)}{\gamma(N+1)}\right\}^k|w_x^0(x,0K)|,\quad t\geqslant t_{2k},k=1,2\cdots \tag{21}$$

由于(20)中的系数均与 k 无关,因此这里的 t_{2k} 实际上可以取成是一个与 k 无关的常数 $t_2(B)$,令 $N_{12}=\min\left\{N>0,\dfrac{4\left(2C\rho_1+\sqrt{2}\rho_0^{\frac{1}{2}}\rho_1^{\frac{1}{2}}\right)}{\gamma(N+1)}<1\right\}$,则 $\lim\limits_{k\to\infty}|w_x^k|=0$,且此收敛关于 $t\geqslant t_2(B)$ 是一致的. 最后,取 $N_1=\max\{N_{11},N_{12}\}$,则定理3证毕.

参考文献:

[1] R. TEMAN. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics [M]. New York:Spring-Verlag, 1988.

[2] 郭柏灵. 无穷维动力系统[M]. 北京:国防工业出版社,2000.

[3] 郭柏灵. 非线形演化方程[M]. 上海:上海科技教育出版社,1995.

[4] J. C. ROBINSON. Infinite-dimensional dynamical systems: an introduction to dissipative parabolic PDEs and the theory of global attractors [M]. Cambridge Uni. Press, 2001.

[5] A. V. BABIN. Attractors for Navier-stokes equations [A]. in:Hardbook of Mathematical Fluid Dynamics[C]. Elsvier, 2003,169-222.

[6] 王冠香,刘曾荣. Kuramoto-Sivashinsky 方程的渐近吸引子[J]. 应用数学学报,2000,23(3):329-336.

(下转第 148 页)

Chinese Univ Ser B,2006,21(3):335-342.

[8] F GROSS. Factorization of Meromorphic Functions [M]. Washington: Naval Research Lab,1972.

[9] FRANK G. Eine vermutung von Hayman uber nullstellen meromorpher funktion[J]. Math Z,1976,149:29-36.

Uniqueness of Entire Functions with Their Derivatives

WU Chun, LI Jiang-tao

(*College of Mathematics and Physics, Chongqing University, Chongqing* 400030, *China*)

Abstract: The anthors use the theory of normal families to prove: Let k be a positive integer, and let $a, b(\neq a, 0), d$ be three finite complex mumbers. If f and $f^{(k)}$ share a CM, $f = b$ whenever $f^{(k)} = b$, and all zeros of $f - d$ have multiplicity at least k, then $f \equiv f^{(k)}$.

Key words: entire function; normality; uniqueness.

(编辑 张小强)

(上接第 138 页)

Asymptotic Attractors of the Nonlinear Evolution Equation in Bounded Domain

ZHAO Lei-na[1], *ZHANG Xing-you*[1,2], *XING Ting-li*

(1. College of Mathematics and physis, Chongqing University, Chongqing 400030, China;

2. Institute of Fundamental Sciences, Massey University, Palmerston North, New Zealand)

Abstract: The basic principle of infinite-dimensional dynamic system is to try to reduce the original infinite-dimensional system to an infinite-dimensional system. However, due to the unknown structure of the reduced system, it is difficult to describe its dynamical behaviour. To overcome this difficulty, the idea of approximate inertial manifolds is introduced, for NSE, the existence of AIM was studied, it is shown that the global attractor lies within a neighborhood of the graph of an Lipschitz function by the squeezing property. In this paper, by constructing a finite dimensional solution sequence, we will prove that it tends to the global attractor, theoretically, this provides a metod of constructing the asymptotic attractors, theoretically, this provides a method of constructing the asymptotic attractors for the evolution equations.

Key words: nonlinear evolution equation; global attractor; asymptotic attractors

(编辑 陈移峰)