文章编号:1000-582X(2007)02-0139-03

闭正规模糊拟阵的基本序列*

李永红[1],张 忠[2],刘志花[2]
(1. 重庆邮电大学 计算机科学与技术学院,重庆 400065;2. 重庆大学 数理学院,重庆 400030)

摘 要:基本序列和导出拟阵序列是模糊拟阵的两个基本概念,在模糊拟阵中起着重要作用. 本文研究了闭正规模糊拟阵的基本序列,得到了与基本序列有关的几个结果:(1)闭正规模糊拟阵的基本序列的充分条件;(2)闭正规模糊拟阵的模糊对偶拟阵的一些性质,(3)闭正规模糊拟阵模糊基的几个性质;(4)闭模糊拟阵是正规的两个充分条件. 这些结果有利于进一步研究模糊拟阵的其它性质.

关键词:拟阵;模糊拟阵;闭正规模糊拟阵;模糊对偶拟阵;基本序列
中图分类号:O157.2;O159 **文献标识码**:A

1 基本概念及结论

定义 1[1-2] 设 E 是有限集,I 是 E 的子集族. 若 I 满足下列条件:

I1. $\varnothing \in I$;

I2. 若 $X \in I, Y \subseteq X$,则 $Y \in I$;

I3. 若 $X、Y \in I, |X| < |Y|$,则有 $W \in I$,使 $X \subset W \subseteq X \cup Y$;

则称序偶(E,I)为 E 上的一个拟阵,记为 $M=(E,I)$. 任意的 $X \subseteq E$,若 $X \in I$,则称 X 为 M 的独立集. M 的极大独立集,称为 M 的基. M 的秩函数是一个函数 ρ: $2^E \to Z^+$(2^E 表示 E 的幂集),使对任意的 $A \subseteq E$ 都有 $\rho(A)=\max\{|X| \mid X \subseteq A,且\ X \in I\}$,$\rho(E)$称为拟阵 M 的秩,记为:$\rho(M)=\rho(E)$.

定义 2[3] 设 E 是一个集合,则 E 上的模糊集 μ 是一个映射 μ: $E \to [0,1]$. E 上模糊集的全体称为 E 的模糊幂集,记为 $F(E)$.

下面给出本文要用的一些符号($\mu, v \in F(E)$)(见文献[3-6]):

$$\mathrm{supp}\mu = \left\{x \in E \,|\, \mu(x) > 0\right\},$$

$$C_r(\mu) = \left\{x \in E \,|\, \mu(x) \geqslant r\right\},其中\ r \in [0,1],$$

$$R^+(\mu) = \left\{\mu(x) \,|\, \mu(x) > 0, x \in E\right\},$$

$$m(\mu) = \inf\left\{\mu(x) \,|\, x \in \mathrm{supp}\mu\right\},$$

$$\mu \vee v = \max\left\{\mu, v\right\}, \mu \wedge v = \min\left\{\mu, v\right\},$$

模糊集 μ 的势记为:$|\mu| = \sum_{x \in E}\mu(x)$,

若对任意的 $x \in E$,有 $\mu(x)=v(x)$,则称模糊集 μ 等于模糊集 v,记为 $\mu=v$;

若对任意的 $x \in E$,有 $\mu(x) \leqslant v(x)$,则称模糊集 μ 被包含于模糊集 v,记为 $\mu \leqslant v$;

若 $\mu \leqslant v$,且存在 $x \in E$,使 $\mu(x) < v(x)$,则称模糊集 μ 被真包含于模糊集 v,记为 $\mu < v$.

定义 3[3] 设 E 是一个有限集合,$\psi \subseteq F(E)$是一个满足下列条件的非空模糊集族:

(ψ_1) 若 $\mu \in \psi$, $v \in F(E)$,且 $v < \mu$,则 $v \in \psi$;

(ψ_2) 若 $\mu, v \in \psi$, $|\mathrm{supp}\mu| < |\mathrm{supp}v|$,则存在 $\omega \in \psi$ 使

(a) $\mu < \omega \leqslant \mu \vee v$,

(b) $m(\omega) \geqslant \min\left\{m(\mu), m(v)\right\}$,

则称序偶 $M=(E,\psi)$是 E 上的模糊拟阵,ψ 称为 M 的模糊独立集族. 对任意的 $\mu \in F(E)$,若 $\mu \in \psi$,则称 μ 为 M 的模糊独立集. M 的极大模糊独立集,称为 M 的模糊基.

定理 1[3] 设有模糊拟阵 $M=(E,\psi)$,$\alpha \in (0,1]$,令 $I_\alpha = \{C_\alpha(\mu) \mid \forall \mu \in \psi\}$,易证 $M_\alpha=(E,I_\alpha)$都是 E 上的拟阵. 因为 E 是有限集,所以只有有限个不同的这样的拟阵. 由此,可以得出结论,存在一个有限序列 $r_0 < r_1 < \cdots < r_n$,使得

1) $r_0=0, r_n \leqslant 1$;

2) 当 $0 < s \leqslant r_n$ 时,$I_s \neq \{\varnothing\}$;当 $s > r_n$ 时,$I_s = \{\varnothing\}$;

3) 若 $s, t \in (r_i, r_{i+1})$,则 $I_s = I_t (0 \leqslant i \leqslant n-1)$;

* 收稿日期:2006-09-21
作者简介:李永红(1970-),男,重庆邮电大学讲师,硕士,主要从事计算机信息处理,图论和拟阵方向的研究,电话(Tel.):023-62460540;E-mail:Liyh@cqupt.edu.cn.

4) 若 $r_i<s<r_{i+1}<t<r_{i+2}$,则 $I_s\supset I_t(0\leqslant i\leqslant n-2)$. 称序列 $r_0<r_1<\cdots<r_n$ 为 M 的基本序列. 对任意的 $i(1\leqslant i\leqslant n)$,令 $\bar{r}_i=\frac{1}{2}(r_{i-1}+r_i)$,则拟阵序列 $M_{\bar{r}_1}\supset M_{\bar{r}_2}\supset\cdots\supset M_{\bar{r}_n}$ 称为模糊拟阵 M 的导出拟阵序列.

定义 4[3] 设 $M=(E,\psi)$ 是一个模糊拟阵,$0=r_0<r_1<\cdots<r_n\leqslant1$ 为 M 的基本序列. 如果对任意的 $r_i<r\leqslant r_{i+1}(0\leqslant i\leqslant n-1)$ 都有 $I_r=I_{r_{i+1}}$(I_r 如定理 1 所定义),则称模糊拟阵 M 是闭的.

定理 2[3-4] 设 E 是有限集,$0=r_0<r_1<\cdots<r_n\leqslant1$ 是一有限序列,$(E,I_{r_1}),(E,I_{r_2}),\cdots,(E,I_{r_n})$ 是 E 上的一个拟阵序列,且满足 $I_{r_{i-1}}\subset I_{r_i}(1\leqslant i\leqslant n-1)$. 并对任意的 r,当 $r_{i-1}<r\leqslant r_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 时,令 $I_r=I_{r_i}$,当 $r_n<r\leqslant1$ 时,令 $I_r=\{\varnothing\}$. 若令 $\psi=\{\mu\in F(E)\mid C_r(\mu)\in I_r$,对任意的 $r,0<r\leqslant1\}$,则

$M=(E,\psi)$ 是一个闭模糊拟阵,且其基本序列为 $0=r_0<r_1<\cdots<r_n$,导出拟阵序列为 $M_{r_1}\supset M_{r_2}\supset\cdots\supset M_{r_n}$,其中 $M_{r_i}=(E,I_{r_i})(1\leqslant i\leqslant n)$.

定义 5[4] 设 $M=(E,\psi)$ 是一个模糊拟阵,$0=r_0<r_1<\cdots<r_n\leqslant1$ 为 M 的基本序列. 如果对任意的 $r_i<r_j$,B 是 (E,I_{r_i}) 的一个基,都有 (E,I_{r_j}) 的一个基 A,使得 $A\subseteq B$,则称 M 是正规的.

定理 3[4] 设 $M=(E,\psi)$ 是闭模糊拟阵,则 M 是正规的当且仅当 M 的模糊基有相同的势.

定理 4[4] 设 $M=(E,\psi)$ 是闭正规模糊拟阵,$0=r_0<r_1<\cdots<r_n\leqslant1$ 为 M 的基本序列,如果 μ 是 M 的一个模糊基,那么 $R^+(\mu)=\{r_1,r_2,\cdots,r_n\}$,且对任意的 $1\leqslant i\leqslant n$,都有 是的基.

定义 6[5] 设 $M=(E,\psi)$ 是一个闭正规模糊拟阵,B 是 M 的模糊基集. 令 $1:E\to[0,1]$ 为一模糊集,使得对任意的 $e\in E$,有 $1(e)=1$. 设 $\beta^c=1-\beta$. 则 $B^*=\{\beta^c\mid\beta\in B\}$ 是某闭正规模糊拟阵 M^* 的模糊基集,并称此模糊拟阵为 M 的模糊对偶拟阵. 并且对任意的 $e\in E$,都有 $\mu^c(e)=1-\mu(e)$,其中 μ 是模糊集.

2 闭正规模糊拟阵的的基本序列

定理 5 $M_1=(E,\psi_1)$ 是一个闭正规模糊拟阵,$0=r_0<r_1<\cdots<r_m<1$ 为 M_1 的基本序列,导出拟阵序列为 $M_{r_1}\supset M_{r_2}\supset\cdots\supset M_{r_m}$,其中 $M_{r_k}(E,I_{r_k})(1\leqslant k\leqslant m)$;$M_2=(E,\psi_2)$ 也是一个闭正规模糊拟阵,$0=s_m<s_{m+1}<s_{m+2}<\cdots<s_n\leqslant1$ 为 M_2 的基本序列,导出拟阵序列为 $M_{s_{m+1}}\supset M_{s_{m+2}}\supset\cdots\supset M_{s_n}$,其中 $M_{S_k}=(E,I_{S_k})(m+1\leqslant k\leqslant n)$,且 $r_m<s_{m+1}$. 若 $I_{r_m}\supset I_{s_{m+1}}$,且对 (E,I_{r_m}) 的任意基 B,都有 $(E,I_{S_{m+1}})$ 的基 A,使得 $B\supset A$,则 $0=r_0<r_1<\cdots<r_m<r_{m+1}<\cdots<r_n\leqslant1$ 是某一闭正规模糊拟阵的基本序列,其中 $r_k=S_k(m+1\leqslant k\leqslant n)$.

证明 设 $r_k=S_k(m+1\leqslant k\leqslant n)$. 因为 $M_1=(E,\psi_1)$ 和 $M_2=(E,\psi_2)$ 都是闭模糊拟阵,且 $I_{r_m}\supset I_{S_{m+1}}=I_{r_{m+1}}$,所以 $I_{r_1}\supset\cdots\supset I_{r_m}\supset I_{r_{m+1}}\supset\cdots\supset I_{r_n}$. 于是,对任意的 r,当 $r_{i-1}<r<r_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 时,令 $I_r=I_{r_i}$;当 $r_n<r\leqslant1$ 时,令 $I_r=\{\varnothing\}$. 设 $\psi=\{\mu\in F(E)\mid C_r(\mu)\in I_r$,对任意的 $r,0<r\leqslant1\}$,由定理 2 知,$M=(E,\psi)$ 是一闭模糊拟阵,且其基本序列为 $0=r_0<r_1<\cdots<r_m<r_{m+1}<\cdots<r_n\leqslant1$,导出拟阵序列为 $M_{r_1}\supset\cdots\supset M_{r_m}\supset M_{r_{m+1}}\supset\cdots\supset M_{r_n}$. 下面证明 M 是正规的.

因为 $M_1=(E,\psi_1)$ 和 $M_2=(E,\psi_2)$ 都是闭正规的,由定义 5 知,当 $i>m$ 或 $j<m(i<j)$ 时,对 (E,I_{r_i}) 的任意一个基 B,都有 (E,I_{r_j}) 的一个基 A,使得 $B\supset A$;而 $I_{r_m}\supset I_{S_{m+1}}=I_{r_{m+1}}$,且对 (E,I_{r_i}) 任意一个基 B,都有 $(E,I_{r_{m+1}})$ 的一个基 A,使得 $B\supset A$. 于是对任意的 $i,j(1\leqslant i<j\leqslant n)$,$(E,I_{r_i})$ 的任意一个基 B,都有 (E,I_{r_j}) 的一个基 A,使得 $B\supset A$,所以,$M=(E,\psi)$ 是正规的.

定理 6 $M=(E,\psi)$ 是一个闭正规模糊拟阵,如果 μ 是 M 的一个模糊基,且 $R^+(\mu)=\{r_1,\cdots,r_n\}\}$,其中 $0<r_1<\cdots<r_n\leqslant1$ 那么 $0,r_1,\cdots,r_n$ 为 M 的基本序列.

证明 设闭正规模糊拟阵 $M=(E,\psi)$ 的基本序列为 $0=s_0<s_1<\cdots<s_k\leqslant1$,因为 μ 是 M 的一个模糊基,所以由定理 4 知,$R^+(\mu)=\{s_1,\cdots,s_k\}$;由已知 $R^+(\mu)=\{r_1,\cdots,r_n\}$,其中 $0<r_1<\cdots<r_n\leqslant1$,因此,$R^+(\mu)=\{r_1,\cdots,r_n\}=\{s_1,\cdots,s_k\}$,因而必有 $k=n$,且 $r_i=s_i(1\leqslant i\leqslant n)$,所以,$0,r_1,\cdots,r_n$ 为 M 的基本序列.

定理 7 $M=(E,\psi)$ 是一闭正规模糊拟阵,$0=r_0<r_1<\cdots<r_n<1$ 为 M 的基本序列,$M^*=(E,\psi^*)$ 是 M 的模糊对偶拟阵,μ^c 是 M^* 的一个模糊基. 则

(1) $R^+(\mu^c)=\{1-r_n,1-r_{n-1},\cdots,1-r_2,1-r_1,1\}$ 或 $R^+(\mu^c)=\{1-r_n,1-r_{n-1},\cdots,1-r_2,1-r_1\}$.

(2) M^* 的基本序列为 $0,1-r_n,1-r_{n-1},\cdots,1-r_2,1-r_1,1$ 或者 $0,1-r_n,1-r_{n-1},\cdots,1-r_2,1-r_1$.

(3) 对任意的 $1\leqslant i\leqslant n$(或 $0\leqslant i\leqslant n$),$C_{1-r_i}(\mu^c)$ 是 (E,I_{1-r_i}) 的一个基.

证明 (1) $M^*=(E,\psi^*)$ 是闭正规模糊拟阵 M 的模糊对偶拟阵,由定义 6 知,$M^*=(E,\psi^*)$ 也是闭正规模糊拟阵,因 μ^c 是 M^* 的一个模糊基,故存在 M 的一个模糊基 μ,使得 $\mu^c=1-\mu$,其中对任意的 $e\in E$,都有 $1(e)=1$. 又因 $R^+(\mu)=\{r_1,\cdots,r_n\}$,且对任意的 $e\in E$,都有 $\mu^c(e)=1-\mu(e)$. 因而有

ⅰ) 若存在 $e\in E$,使得 $\mu(e)=0$,则 $\mu^c(e)=1$,于是有 $R^+(\mu^c)=\{1-r_n,1-r_{n-1},\cdots,1-r_2,1-r_1,1\}$;

ⅱ) 若对任意的 $e\in E$,都有 $\mu(e)>0$,则 $R^+(\mu^c)=\{1-r_n,1-r_{n-1},\cdots,1-r_2,1-r_1\}$.

(2) 由定理 6 及 (1) 中的结论,

若 $R^+(\mu^c)=\{1-r_n,1-r_{n-1},\cdots,1-r_2,1-r_1,1\}$,其中 $0<1-r_n<1-r_{n-1}<\cdots<1-r_2<1-r_1<1$,则 M^* 的基本序列为 $0,1-r_n,1-r_{n-1},\cdots,1-r_2,1-r_1,1$;

若 $R^+(\mu^c)=\{1-r_n,1-r_{n-1},\cdots,1-r_2,1-r_1\}$,其中 $0<1-r_n<1-r_{n-1}<\cdots<1-r_2<1-r_1<1$,则 M^*

的基本序列为 $0,1-r_n,1-r_{n-1},\cdots,1-r_2,1-r_1$.

(3)有定理4及(2)中的结论,若 M^* 的基本序列为 $0<1-r_n<1-r_{n-1}<\cdots<1-r_2<1-r_1<1-r_0=1$,则对任意的 $0\leqslant i\leqslant n$,有 $C_{1-r_i}(\mu^c)$ 是 (E,I_{1-r_i}) 的一个基.

若 M^* 的基本序列为 $0<1-r_n<1-r_{n-1}<\cdots<1-r_2<1-r_1$(其中 $1-r_1<1$),则对任意的 $1\leqslant i\leqslant n$,有 $C_{1-r_i}(\mu^c)$ 是 (E,I_{1-r_i}) 的一个基.

3 闭模糊拟阵是正规的充分条件

定理8 设 $M=(E,\psi)$ 是一个闭正规模糊拟阵,$0=r_0<r_1<\cdots<r_n\leqslant1$ 为 M 的基本序列,其导出拟阵序列为 $M_{r_1}\supset M_{r_2}\supset\cdots\supset M_{r_n}$,其中 $M_{r_i}=(E,I_{r_i})(1\leqslant i\leqslant n)$. $\mu\in F(E)$,且 μ 为 M 的模糊基,则

(1) $|\mathrm{supp}\mu|=\rho(M_{r_1})$;

(2) $|\mathrm{supp}\mu|\geqslant n$;

(3)若 $|\mathrm{supp}\mu|=n$,则 $|\mu|=\sum_{i=1}^{n}r_i$.

证明 (1)因为 $M=(E,\psi)$ 是闭正规模糊拟阵,μ 为 M 的模糊基,故由定理4知,$C_{r_1}(\mu)$ 是 M_{r_1} 的基,而 $\mathrm{supp}\mu=C_{r_1}(\mu)$,所以,$|\mathrm{supp}\mu|=|C_{r_1}(\mu)|=\rho(M_{r_1})$;

(2)令 $A_i=\{x\in E|\mu(x)=r_i\}(1\leqslant i\leqslant n)$,则 $A_i\cap A_j=\phi(i\neq j)$. 因为 $M=(E,\psi)$ 是闭正规模糊拟阵,μ 为 M 的模糊基,所以 $R^+(\mu)=\{r_1,\cdots,r_n\}$,进而任意的 $A_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 均非空,于是 $|A_i|\geqslant1$,$|\mathrm{supp}\mu|=C_{r_1}(\mu)=|\bigcup_{i=1}^{n}A_i|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|\geqslant n$;

(3)若 $|\mathrm{supp}\mu|=n$,又因 $R^+(\mu)=\{r_1,\cdots,r_n\}$,则 $\mathrm{supp}\mu$ 与 $R^+(\mu)$ 中的元素必是一一对应的,因而,对任意的 $A_i(1\leqslant i\leqslant n)$,都有 $|A_i|=1$,故由模糊集势的定义知,$|\mu|=\sum_{i=1}^{n}(|A_i|\cdot r_i)=\sum_{i=1}^{n}r_i$.

定理9 设 $M=(E,\psi)$ 是一个闭模糊拟阵,$0=r_0<r_1<\cdots<r_n\leqslant1$ 为 M 的基本序列,①若对任意的模糊基 μ,都有 $|\mathrm{supp}\mu|=n$,且 $R^+(\mu)=\{r_1,\cdots,r_n\}$,则 $M=(E,\psi)$ 是正规的;

②设 μ,v 是 $M=(E,\psi)$ 的任意两个模糊基,令 $A_i=\{x\in E|\mu(x)=r_i\}$,$B_i=\{x\in E|v(x)=r_i\}(1\leqslant i\leqslant n)$,若 $|A_i|=|B_i|$,则 $M=(E,\psi)$ 是正规的.

证明①由定理8知,若 $|\mathrm{supp}\mu|=n$,且 $R^+(\mu)=\{r_1,\cdots,r_n\}$,则 $|\mu|=\sum_{i=1}^{n}r_i$. 即 $M=(E,\psi)$ 的任意基的势均为 $\sum_{i=1}^{n}r_i$(常数),故由定理3知,$M=(E,\psi)$ 是正规的;

②由已知,$|\mu|=\sum_{i=1}^{n}(|A_i|\cdot r_i)=\sum_{i=1}^{n}(|B_i|\cdot r_i)=|v|$,即 $M=(E,\psi)$ 的任意两个基的势均相等,故由定理3知,$M=(E,\psi)$ 是正规的.

参考文献:

[1] WELSH D J A. Matroid Theory[M]. London: Academic Press, 1976.

[2] 刘桂真,陈庆华. 拟阵[M]. 湖南长沙:国防科技大学出版社,1994.

[3] R GOETSCHEL, W VOXMAN. Fuzzy matroids[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1988, 27: 291-302.

[4] R GOETSCHEL, W VOXMAN. Bases of Fuzzy matroids[J]. fuzzy Sets and Systems, 1989, 31: 253-261.

[5] R GOETSCHEL, W VOXMAN. Fuzzy matriod structures[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1991, 41: 343-357.

[6] R GOETSCHEL, W VOXMAN. Spanning properties of fuzzy matriods[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 51: 313-321.

Fundamental Squence of Closed Regular Fuzzy Matroids

LI Yong-hong[1], *ZHANG Zhong*[2], *LIU Zhi-hua*[2]

(1. College of Computer Science and Technology, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China; 2. College of Mathematics and Physics, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

Abstract: Fundamental sequence and induced matroid sequence are two fundamental conceptions of fuzzy matroid and play an important role in fuzzy matroid. The authors study the fundamental sequence of closed regular fuzzy matroids, and find some results concerning fundamental sequence: (1)some sufficient conditions of the fundamental sequence of closed regular fuzzy matroids; (2)some properties of its fuzzy dual matroids; (3)some properties of fuzzy bases of closed regular fuzzy matroids; (4)two sufficient conditions of regular fuzzy matroids based on closed fuzzy matroids are provided. These results are helpful to study other properties of fuzzy matroid.

Key words: matroids; fuzzy matroids; closed regular fuzzy matroids; fuzzy dual matroids; fundamental sequence

(编辑 张小强)