文章编号:1000-582X(2007)02-0142-04

涉及微分多项式的全纯函数的正规性*

刘　静,李 江 涛
(重庆大学 数理学院,重庆　400030)

摘　要:通过研究全纯函数族的正规性,给出了一个一般性的正规定则,改进了李江涛和仪洪勋的结果.设 F 为区域 D 上的全纯函数族,k 为正整数,并令 $a(z)$, $b(z)\neq 0$, $c(z)\neq 0$ 为 D 上解析函数.若对 $\forall f\in F$,f 的零点重级至少为 k ,且 $f(z)=0\Rightarrow P(f)^{(k)}+H^{(k)}+H(f,f',\cdots,(f^{(k)}))=a(z)$, $P(f^{(k)})+H(f,f',\cdots,(f^{(k)}))=b(z)\Rightarrow f(z)=c(z)$.则 F 在 D 上正规.

关键词:全纯函数;微分多项式;分担值;正规族
中图分类号:O174.5　　**文献标识码**:A

1　引言及主要结果

设 $f(z)$ 为复平面区域 D 上的全纯函数,m, q , k 为正整数,$a_i(z)(i=1,2,\cdots,q-1)$,$b_j(z)(j=1,2,\cdots,m)$,为区域 D 上的解析函数,$n_0,n_1,\cdots,n_k$ 为非负整数.令

$$P(\omega)=\omega^q+a_{q-1}(z)\omega^{q-1}+\cdots+a_1(z)\omega,$$
$$M(f,f',\cdots,(f^{(k)}))=f^{n_0}(f')^{n_1}\cdots(f^{(k)})^{n_k},$$
$$r_M^*=n_0+n_1+\cdots+n_{k-1},$$
$$r_M=n_0+n_1+\cdots+n_k,$$
$$\tau_M=n_0+2n_1+3n_2+\cdots+(k+1)n_k$$

$M(f,f',\cdots,(f^{(k)}))$ 称为 f 的微分单项式,更进一步,令 $M_1(f,f',\cdots,(f^{(k)}))$,$M_2(f,f',\cdots,(f^{(k)}))$,$\cdots$,$M_m(f,f',\cdots(f^{(k)}))$ 为 f 的微分单项式.称 $H(f,f',\cdots,(f^{(k)}))=b_1(z)M_1(f,f',\cdots,(f^{(k)}))+\cdots+b_n(z)M_n(f,f',\cdots,(f^{(k)}))$ 为 f 的微分多项式,定义

$$r_H^*=\min\{r_{M_1}^*,r_{M_2}^*,\cdots,r_{M_m}^*\},$$

令 f,g 为区域 D 上的全纯函数,a, b 为复数.若 $f(z)=a$ 时 $g(z)=b$, 则可表示为 $f(z)=a\Rightarrow g(z)=b$,若 $f(z)=a\Rightarrow g(z)=b$ 且 $g(z)=b\Rightarrow f(z)=a$,则可表示为 $f(z)=a\Leftrightarrow g(z)=b$,若 $f(z)=a\Leftrightarrow g(z)=a$, 可称 f, g 在区域 D 上分担值 a.

Schwick 首先把分担值与正规族联系起来,证明了

定理 A[1]　设 F 为单位圆盘△上的亚纯函数族,a_1,a_2,a_3 为三个互相判别的有穷复数,如果对 $\forall f\in F$, a 与 b 为 f 和 f' 在△上的 IM 分担值,则 F 在△上正规.

2002 年,黄小军证明了:

定理 B[2]　设 F 为区域 D 上的亚纯函数族,m, q , k 为正整数,$p(\omega)=\omega^q+a_{q-1}(z)\omega^{q-1}+\cdots+a_1(z)\omega$ 为一个多项式.令 $H(f,f'\cdots,(f^{(k)}))$ 为上面所提到的微分多项式,满足 $r_H^*>0$,$a(z)$,$b(z)$,$b(z)\neq 0$,$c(z)\neq 0$ 为 D 上的解析函数,如果对 $\forall f\in F$,f 的零点重级至少为 k ,且

$$f(z)=0\Leftrightarrow P(f^{(k)})+H(f,f',\cdots,(f^{(k)}))=a(z),$$

且 $P(f^{(k)})+H(f,f',\cdots,(f^{(k)}))=b(z)\Rightarrow f(z)=c(z)$.则 F 在 D 上正规,$k\geqslant 2$.当 $k=1$ 时,只要 $a(z)\neq(m+1)b(z)(n=1,2,\cdots)$ 即可.

最近,李江涛和仪洪勋证明了:

定理 C[3]　设 F 为区域 D 上的全纯函数族,k 为正整数,a, $b(\neq 0)$,$c(\neq 0)$ 及 d 为有穷复数且 $b\neq a$.若对 $\forall f\in F$,$f-d$ 的零点重级至少为 k.$f=0\Rightarrow f^{(k)}=a$ 且 $f^{(k)}=b\Rightarrow f=c$,则 F 在 D 上正规.

自然地,希望把定理 C[3] 中的 $f^{(k)}$ 用 f 的微分多项式来代替,结论仍成立,笔者将证明如下定理.

定理 1　设 F 为区域 D 上的全纯函数族,m,q,k 为正整数,$p(\omega)=\omega^q+a_{q-1}(z)\omega^{q-1}+\cdots+a_1(z)\omega$ 为

* 收稿日期:2006-09-30
作者简介:刘静(1981-),女,重庆大学硕士研究生,主要研究方向为值分布理论研究.李江涛(1963-),男,副教授,博士,
电话(Tel.):023-65102521;E-mail:lit@sdu.edu.cn.

一个多项式. 令 $H(f,f',\cdots,(f^{(k)}))$ 为定理 B 中所提到的微分多项式,满足 $r_H^*>0$,$a(z)$, $b(z)\neq 0$,$c(z)\neq 0$ 为 D 上的解析函数,如果对 $\forall f\in F$,f 的零点重级至少为 k ,且

$f(z)=0\Rightarrow P(f^{(k)})+H(f,f',\cdots,(f^{(k)}))=a(z)$,

且 $P(f^{(k)})+H(f,f',\cdots,(f^{(k)}))=b(z)\Rightarrow f(z)=c(z)$

则 F 在 D 上正规.

当 $H(f,f',\cdots,(f^{(k)}))$ 取特殊函数值时,即可得到下面的推论.

推论　设 F 为区域 D 上的全纯函数族,m,q,k 为正整数,$p(\omega)=\omega^2+a_{q-1}(z)\omega^{q-1}+\cdots+a_1(z)\omega$ 为一个多项式. $a(z)$,$b(z)\neq 0$,$c(z)\neq 0$ 为 D 上的解析函数,如果对 $\forall f\in F$,f 的零点重级至少为 k ,且

$$f(z)=0\Rightarrow P(f^{(k)})=a(z)\ ;$$
$$P(f^{(k)})=b(z)\Rightarrow f(z)=c(z)\ .$$

则 F 在 D 上正规.

明显地,定理 C 是推论的一个推论.

定理2　设 F 为区域 D 上的全纯函数族, m,q,k 为正整数,$p(\omega)=\omega^q+a_{q-1}(z)\omega^{q-1}+\cdots+a_1(z)\omega$ 为一个多项式, $H(f,f',\cdots,(f^{(k)}))$ 为定理 B 中所提到的微分多项式,满足 $r_H^*>0$,$a(z)$, $b(z)\neq 0$ 为 D 上的解析函数,如果对 $\forall f\in F$,f 的零点重级至少为 k ,且

$f(z)=a(z)\Rightarrow P((f^{(k)}))+H(f,f',\cdots,(f^{(k)}))=a(z)$,

且 $P(f^{(k)})+H(f,f',\cdots,(f)^{(k)})=b(z)\Rightarrow f(z)=b(z)$

则 F 在 D 上正规.

2　引理

引理1[4]:设 F 为单位圆盘 Δ 上的全纯函数族,K 为一正整数,对 $\forall f\in F$,f 的零点重级均 $\geqslant k$. 假设存在 $A\geqslant 1$,当 $f(z)=0$ 时,$|f^{(k)}(z)|\leqslant A$. 若 F 在 Δ 上不正规. 则对 $0\leqslant\alpha\leqslant k$,存在:

(1)数 r,$0<r<1$,

(2)函数列 $f_n\in F$,

(3)正数列 $\rho_n\to 0$,

(4)点列 $|z_n|<r$,

使得 $g_n(\xi)=\rho_n^{-\alpha}f_n(a_n+\rho_n\xi)\to g(\xi)$ 按球面距离一致收敛. 这里 g 为复平面 C 上的整函数,满足 $g^{\#}(\xi)\leqslant g^{\#}(0)=kA+1$, $\forall z\in C\setminus\{0\}$ 且 $g(\xi)$ 的零点重级 $\geqslant k$.

注:在引理1中,若 $0\leqslant\alpha\leqslant k$ 时,对 $f^{(k)}(z)$ 的限制可以忽略.

引理2[5]　正规函数的级至多为2,正规整函数是指数型的,且级至多为1.

引理3[6]　g 为有限级的亚纯函数,若 g 仅有有限个临界值,则 g 仅有有限个渐近值.

引理4[7]　g 为超越亚纯函数,$g(0)\neq\infty$,若 g 的临界值和渐近值为有界集. 则存在 $R>0$ 使得

$$|g'(z)|\geqslant\frac{|g(z)|}{2\pi|z|}\log\frac{|g(z)|}{R},\text{对}\ \forall z\in C\setminus\{0\}\text{ 且 }z$$

不为 g 的极点.

引理5[8]　设 f 为复平面 C 上的超越亚纯函数,则当 $r\to\infty$ 时

$$T(x,f)\leqslant(2+\frac{1}{l})N(r,\frac{1}{f})+$$
$$(2+\frac{2}{l})\overline{N}(r,\frac{1}{f^{(l)}-1})+s(r,f).$$

引理6[9]　区域 D 上的亚纯函数族 F 是正规的充要条件是对任意的子集 $k\subseteq D$, $\exists$ 常数使得

$$f^{\#}(z)\leqslant M\text{ 对 }\forall f\in F,z\in K.$$

引理7[10]　令 $p(\omega)=\omega^q+a_{q-1}(z)\omega^{q-1}+\cdots+a_1(z)\omega$,$a_i(z)(i=1,2,\cdots q-1)$,$d(z)$ 在 $\{z:\ |z|\leqslant 1\}$ 解析. 则集合

$$S=\Big\{\omega\in C:\ P(\omega=)\omega^q+$$
$$a_{(q-1)}(z)\omega^{(q-1)}+\cdots+a_1(z)\omega=d(z),|z|\leqslant 1\Big\}$$

是有界的.

3　定理1证明

不失一般性,假设 $D=\Delta=\{z:\ |z|\leqslant 1\}$,$a(z)$,$a_i(z)(i=1,2,\cdots,q-1)$ 在 $\{z:\ |z|\leqslant 1\}$ 解析. 因此存在正常数 $M>0$, $\forall z\in D$ 有 $|a(z)|\leqslant M$, $|a_i(z)|\leqslant M$, $(i=1,2,\cdots q-1)$. 由假设和引理7,我们可得到当 $F(z_0)=0$ 时,$|f^{(k)}(z_0)|\leqslant Mq+1$. 现假设 F 不正规,由引理1对 $A=Mq+1$, 存在函数列 $f_n\in F$ 复数列 $z_n\to 0$,正数列 $\rho_n\to 0$,有

$$g_n(\xi)=\rho_n^{-k}f_n(z_n+\rho_n\xi)\to g(\xi)\ ,$$

按球面距离一致收敛. g 为非常数整函数,满足:g 的零点重级均 $\geqslant k$ 和 $g^{\#}(\xi)\leqslant g^{\#}(0)=kA+1$.

又由引理2,$g(\xi)$ 的级至多为1. 令

$$\psi(\omega)=\omega^q+a_{(q-1)}+w^{(q-1)}+\cdots+a_1(0)\omega.$$

首先证明:

(1) $g(\xi)=0\Rightarrow\psi(g^{(k)})=a(0)(\neq 0)$;

(2) $\psi(g^{(k)}(\xi))\neq b(0)$.

不妨令

$$L(f)=P(f^{(k)})+H(f,f',\cdots,(f^{(k)}))\ ,$$

假设 $g(\xi_0)=0$, 由 Hurwitz 定理, $\exists\xi_n$, $\xi_n\to\xi_0$,

$g_n(\xi)=\rho_n^{-k}f_n(z_n+\rho_n\xi)=0$,(当 n 充分大时),则有 $L(f_n(z_n+\rho_n\xi))=a(z_n+\rho_n\xi_n)$, i.e,

$$L(f_n(z_n+\rho_n\xi))=P(f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\xi_n))+H\left(f_n(z_n+\rho_n\xi_n),\cdots,f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\xi_n)\right)=$$
$$\left(f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\xi_n)\right)^q+\sum_{i=1}^{q-1}a_i(z_n+\rho_n\xi_n)\left(f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\xi_n)\right)^i+$$
$$\sum_{i=1}^{m}b_i(z_n+\rho_n\xi_n)M_i\left(f_n(z_n+\rho_n\xi_n),\cdots,f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\xi_n)\right)=\left(g_n^{(k)}(\xi_n)\right)^q+\cdots+a_1(z_n+\rho_n\xi_n)g_n^{(k)}(\xi_n)+\sum_{i=1}^{m}b_i(z_n+\rho_n\xi_n)\rho_n^{(k+1)r_{M_i}-\tau_{M_i}}M_i\left(g_n(\xi_n),\cdots,g_n^{(k)}(\xi_n)\right)=a(z_n+\rho_n\xi_n).$$

由假设 $r_H^*>0$,可知 $\tau_{M_i}/r_{M_i}<(k+1)(i=1,2,\cdots n)$,因此可得

$$\sum_{i=1}^{m}b_i(z_n+\rho_n\xi_n)\rho^{(k+1)r_{M_i}-\tau_{M_i}}M_i\left(g_n(\xi_n),\cdots,g_n^{(k)}(\xi_n)\right),$$

在点 ξ_0 的邻域内一致收敛于0. 所以 $\psi\left(g^{(k)}(\xi_0)\right)=a(0)(n\to\infty)$,即.

$$g(\xi)=0\Rightarrow\psi\left(g^{(k)}(\xi)\right)=a(0).$$

以下证明(2)

假设 $\psi\left(g^{(k)}(\xi_0)\right)=\left(g^{(k)}(\xi_0)\right)^q+a_{q-1}(0)\left(g^{(k)}(\xi_0)\right)^{q-1}+\cdots+a_1(0)g^{(k)}(\xi_0)=b(0)$.

不妨设 $\psi\left(g^{(k)}(\xi)\right)$ 不恒等于 $b(0)$,否则 $g^{(k)}(\xi)\equiv c_0$(c_0 为常数),下面证明这是矛盾的!由引理7,$|c_0|\leqslant Mq+1$. 又因 g 的零点重级至少为 k,则 g 一定有一个重级为 k 的单零点 ξ,使得

$$g(\xi)=c_0(\xi-\xi_1)^k/k!.$$

通过简单计算得 $g^{\#}(0)\leqslant\frac{k}{2}$(当 $|\xi_1|\geqslant1$ 时)或 $g^{\#}(0)\leqslant|c_0|$(当 $|\xi_1|\leqslant1$ 时),这与 $g^{\#}(0)=kA+1,A=Mq+1$ 矛盾.

因此由 Hurwitz'定理 $\exists\xi_n,\xi_n\to\xi_0$,

$$L(f_n(z_n+\rho_n\xi_n))=b(z_n+\rho_n\xi_n)$$

又根据 $L(f_n(z))=b(z)\Rightarrow f_n(z)=c(z),c(0)\neq0$ 有

$$f_n(z_n+\rho_n\xi_n)=c(z_n+\rho_n\xi_n),$$
$$g_n(\xi_n)=\frac{f_n(z_n+\rho_n\xi_n)}{\rho_n^k}=\frac{c(z_n+\rho_n\xi_n)}{\rho_n^k}.$$

这与 $\lim\limits_{n\to\infty}g_n(\xi_n)=g(\xi_0)\neq\infty$ 矛盾!这就证明了(2).

由引理2,g 是指数型的整函数,且级至多为1,则 $g^{(k)}$ 的级也至多为1. 又由(2)知存在一个非零常数 b_1,使得 $g^{(k)}\neq b_1$.

于是有

$$g^{(k)}=b_1+e^{c_0+c_1\xi_1}(c_0,c_1\text{ 为常数}),$$

下面分两种情况来讨论.

(i) 当 $c_1\neq0$ 时,g 为超越整函数.

明显地,零不是 $\psi(\omega)-b(o)$ 的根,这是因为当 $\omega=0$时,$\psi(\omega)=0$ 而 $b(0)\neq0$. 由 $b(0)\neq0$,$g^{(k)}(\xi)\neq b_1$,又 g 为超越的,根据引理5,可得 g 一定有无穷多个零点 $z_1,z_2,\cdots,z_n,\cdots,|z_j|\to\infty\ (j\to\infty)$. 令 $H(\xi)=g^{(k-1)}(\xi)-b_1\xi$,则 $H'(\xi)=g^{(k)}(\xi)-b_1$,$H(\xi)$ 是有限级的超越整函数. 结合引理3 和引理4 可知 $\exists R>0$,使得

$$\frac{|z_nH'(z_n)|}{H(z_n)}\geqslant\frac{1}{2\pi}\log\frac{|H(z_n)|}{R}=\frac{1}{2\pi}\frac{|b_1z_n|}{R},$$

所以

$$\frac{|z_nH'(z_n)|}{|H(z_n)|}\to\infty,\qquad\text{当 } n\to\infty\text{ 时}.$$

另一方面,由引理7,当 $n\to\infty$ 时,$\frac{|z_nH'(z_n)|}{|H(z_n)|}$ 是有界的. 于是得到矛盾.

(ii)当 $c_1=0$ 时,$g^{(k)}(\xi)=b_1+e^{c_0}\equiv$ 常数. 即 g 为 k 次多项式,且 g 的零点重级至少为 k,则 g 一定有一个重级为 k 的单零点 ξ_1,使得

$$g(\xi)=(b_1+e^{c_0})\frac{(\xi-\xi_1)^k}{k!},$$

由引理7 知 $|b_1+e^{c_0}|\leqslant Mq+1$.

通过简单计算得 $g^{\#}(0)\leqslant\frac{k}{2}$(当 $|\xi_1|\geqslant1$ 时)或 $g^{\#}(0)\leqslant|b_1+e^{c_0}|$(当 $|\xi_1|\leqslant1$ 时). 这与 $g^{\#}(0)=Ka+1,A=Mq+1$ 矛盾.

综上,F 在 $\triangle$ 上正规,进而在 D 上正规,证毕.

4 定理2 的证明

令 $\bar{F}=\{f-a:\ f\in F\}$,则对 $\forall\bar{f}\in\bar{F}$,$\bar{f}-a$ 的零点重级 $\geqslant k$,$\bar{f}=0\Rightarrow L(\bar{f})=a(\neq0)$ 和 $L(\bar{f})=b\Rightarrow\bar{f}-b-a$,又因 $b(z)\neq a(z)$ 运用定理1 到 $\bar{F}$ 上,即可得 $\bar{F}$ 在 D 上正规,则 F 在 D 上正规. 证毕.

参考文献:

[1] W SCHWICH. Sharing values and normality [J]. Arch Math, 1992,59:50-54.

[2] XJ HUANG. Normality of meromorphic functions with muiti-ple zeros and share values [J]. J Math Anal, 2003, 227: 190 - 198.

[3] JIANG-TAO LI, HONG-XUN YI. Normal families and shared values of holomorphic functions s [J]. Appl Math J Chinese Univ Ser B, 2006,21(3): 335-342.

[4] XC PANG, L ZALCMAN, Normal families and shared values[J]. Bull London Math Soc,2000, 32 (3):325-331.

[5] J CLUNIE, W K HAYMAN. The spherical derivatives of intergral and meromoephic functions[J]. Comment Math Hev, 1996,40:117-148.

[6] W BERGWEILER, A ERMENKO. On the singularties of the inverse to a meromorphic function of finite order[J]. Rev Mat Ibreoamericana, 1995, 11:355-373.

[7] W BERGWEILER. On the zeros of certain homogeneous differential polynomials [J]. Arch Math, 1995, 64: 192-202.

[8] W K HAYMAN. meromorphic functions[M]. London Oxford clarendon Press, 1964.

[9] J SCHIFF. Normal Families[M]. Berlin: Springer-verlag, 1993.

Normality of Holomorphic Functions with Differential Polynomial

LIU Jing, LI Jiang-tao

(College of Mathematics and Physics, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

Abstract: The anthors study the normality of a famility of holomorphic functions. A general normal criterion is obtained, which improves the results given by Li JT and Yi HX. Let F be a families of holomorphic functions in a domain D. k be positive intrgers, $a(z)$, $b(z)\neq 0$, $c(z)\neq 0$ be some analytic functions in D. If for each $f\in F$, the zeros of f have multiplicity at least k, and

$$f(z) = a(z) \Rightarrow P(f^{(k)}) + H(f, f^{1}, \cdots (f^{(k)})) = a(z),$$
$$P(f^{(k)}) + H(f, f, \cdots (f^{(k)})) + b(z) \Rightarrow f(z) = b(z).$$

Then F is normal in D.

Key words: homomorphic function; differential polynomial; shared values; normality

(编辑　张小强)