

文章编号:1000-582X(2007)02-0149-04

# 基于广义成本的公共交通最优发车频率分析\*

赵良杰,陈义华

(重庆大学 数理学院,重庆 400030)

**摘要:**公共交通的发车频率是体现公共交通供给和服务水平的重要指标.在考虑容积率对广义成本影响的基础上,建立了一个新的基于广义成本的公共交通模型.分别以“社会福利最大化”和“企业利润最大化”为目标,从最优定价的角度构造了2种公共交通最优发车频率模型.研究表明,在不考虑外部性效应的情况下,该2种公共交通最优发车频率是相同的.最后根据某市的广义成本参数估计值,利用该模型对发车频率进行了模拟,表明此模型可行.

**关键词:**公共交通;最优发车频率;广义成本;容积率

**中图分类号:**U 491

**文献标识码:**A

公共交通的发车频率是体现公共交通供给和服务水平的重要指标,合理的发车频率不仅能够缓解城市交通的压力,达到承担交通分担率的目标,更能够保证公交企业得到可观的运营收入.因此,关于公共交通最优发车频率的研究是交通运输学中的热门课题.

对于公共交通的最优发车频率问题,往往是连同最优票价和最优供给问题一起研究的. Mohring<sup>[1]</sup>首次建立了一个比较简单的模型,从总资源价值消耗(VRC)最小化的角度对此做了开创性的研究. Nash<sup>[2]</sup>在假设客流量取决于票价和公共交通运营里程的条件下,分别从社会福利最大化和企业利润最大化的角度进行了研究. J. O. Jasson<sup>[3,4]</sup>通过考虑乘客上、下车对旅行时间的影响以及高峰、非高峰时段客流量等因素的不同,对 Mohring 的模型做了扩展. 而 Evans 和 Morrison<sup>[5]</sup>将公共交通由于晚点所造成的时间价值损失和车祸风险2个变量引入模型,从广义成本(Generalised cost)的角度进行了研究. De Borge 和 Wouters<sup>[6]</sup>将外部性(Externalities)和次优理论(Theory of the second best)相结合,研究了比利时城市交通的最优定价和最优供给. Chien<sup>[7]</sup>利用遗传算法研究了公共交通的最优路线和最优发车频率. K. Jasson<sup>[8]</sup>则在模型中考虑了公共交通的拥挤程度——容积率(occupancy rate)对乘客乘车时间价值的影响. 笔者将容积率这一因素引入到文献[3]的模型中,从而建立了一个新的模型,

然后从广义成本的角度,分别研究了以“社会福利最大化”和“企业利润最大化”为目标的公共交通最优发车频率.

## 1 模型构建

广义成本是指:对于某个乘客来讲,其在乘车的过程中所付出的总成本,不仅包括实际支付的票价水平,更重要的是在此过程中所花费的旅行时间成本(Travel time costs)——通常包括乘客步行到车站的时间价值、乘客等车的时间价值、乘客乘车的时间价值以及由于公共交通服务质量(如安全性、方便性、舒适性等因素)所带来的额外成本. 由上可知构成广义成本的因素很多,不同的文献在建立基于广义成本的公共交通模型时,出于简化模型的需要,通常只考虑广义成本中几个主要因素. 笔者参照文献[8],设广义成本由票价、乘客乘车的时间价值以及乘客等车的时间价值3部分构成. 如果令票价为 $p$ ,乘客乘车的单位时间价值为 $P_v$ ,乘车时间为 $T_v$ ,乘客等车的单位时间价值为 $P_w$ ,等车时间为 $T_w$ ,则广义成本 $R$ 可以表示为:

$$R = p + P_v T_v + P_w T_w \quad (1)$$

不失一般性,笔者以某条具体的公共交通路线作为建模对象,则就该公共交通路线而言,其总路程的长度 $L$ 是一个固定值,设公共交通运行全程的平均时间为 $T_c$ ,乘客的平均乘距为 $h$ ,在不考虑乘客之间差异的情

\* 收稿日期:2006-10-09

作者简介:赵良杰(1981-),男,重庆大学硕士研究生,主要从事经济数学模型与软件工程方面的研究. 陈义华,男,教授,电话(Tel.):023-65104255;E-mail: yhchen@cqu.edu.cn.

况下,乘客的平均乘车时间  $T_v$  可以表示为:

$$T_v = T_c \frac{h}{L} \tag{2}$$

出于方便,笔者以 1 h 为时间段进行讨论. 设公共交通在 1 h 内的客流量为  $X$  人次,发车频率为  $F$  次,则公共交通发车时间间隔  $e = \frac{1}{F}$ ,每次班车上面的平均乘客数为  $\frac{Xh}{LF}$  人,根据文献[9],乘客的等车时间可以近似地估计为发车时间间隔的一半:

$$T_w = \frac{e}{2} = \frac{1}{2F} \tag{3}$$

另外设公共交通的座位数为  $N$  个,则公共交通的容积率  $\varphi$ ,即平均每个座位拥有的乘客数可以表示为:

$$\varphi = \frac{Xh}{LNF} \tag{4}$$

根据文献[8,10],乘客乘车的单位时间价值  $P_v$ ,实际上是关于容积率  $\varphi$  的函数,参照文献[10]的做法,设  $P_v$  与  $\varphi$  之间存在线性函数的关系:

$$P_v = P_{v0} + P_{v1}\varphi, \tag{5}$$

其中  $P_{v0}, P_{v1}$  为参数.

而乘客等车的单位时间价值  $P_w$  是一个常数,这样在假设  $h, L, T_c$  和  $N$  是已知的情况下,将式(2) - 式(5) 带入式(1)中,广义成本  $R$  就可以进一步表示为:

$$R = R(p, F) = p + T_c \frac{h}{L} \left( P_{v0} + P_{v1} \frac{Xh}{LNF} \right) + \frac{P_w}{2F} \tag{6}$$

而对于客  $X$  流量来讲,假设其是关于广义成本  $R$  的函数,即:

$$X = X(R) = X[R(p, F)], X_R < 0, X_{RR} \leq 0, \tag{7}$$

由式(6)及式(7),还可求得  $R$  和  $X$  分别对  $p, F$  的一阶导数:

$$R_p = 1 + P_{v1} T_c \frac{h^2}{L^2 N F} X_p \tag{8}$$

$$R_F = -P_{v1} T_c \frac{h^2}{L^2 N F^2} X + P_{v1} T_c \frac{h^2}{L^2 N F} X_F - \frac{P_w}{2F^2} \tag{9}$$

$$X_p = X_R R_p, X_F = X_R R_F \tag{10}$$

由于在实际测量中  $P_{v0}, P_{v1}$  都为正数,故根据式(7)、式(8)和式(10)可以判断:

$$R_p > 0, X_p < 0, X_F < 0, X_{pp} \leq 0,$$

同时设公共交通的固定成本为  $C_0$ ,每个小时的平均运

营成本为  $C_1$ ,另外还包括一部分与客流量  $X$  成比例的额外成本  $C_2$  (如销售成本),这样总成本函数  $C$  可以写成:

$$C = C(X, F) = C_0 + C_1 F T_c + C_2 X, \tag{11}$$

此外设公共交通每小时由于污染、交通堵塞等因素造成的负外部效应成本为  $I$  ( $I < 0$ ),则总外部性效应  $E$  可以表示为:

$$E = E(F) = I T_c F, \tag{12}$$

由前面的公式及经济学知识可知,消费者剩余  $S$  可以表示为:

$$S = S(R) = \int_{R(p, F)}^{+\infty} X(r) dr, \text{ 且 } S_R = \frac{\partial S}{\partial R} = -X, \tag{13}$$

生产者剩余  $\pi$  (企业利润)可以表示为:

$$\pi = pX[R(p, F)] - C(X, F), \tag{14}$$

这样社会福利  $U$  就可以表示为消费者剩余  $S$ 、生产者剩余  $\pi$  以及负外部效应成本  $E$  之和:

$$U = U(p, F) = S(R) + \pi + E =$$

$$\int_{R(p, F)}^{+\infty} X(r) dr + pX[R(p, F)] - C(X, F) + E(F), \tag{15}$$

从式(6)、式(11)、式(12)及式(15)可以看出,发车频率  $F$  对社会福利  $U$  的影响是 3 方面的:第 1,  $F$  的增加会减少乘客出行过程中的广义成本,从而使得消费者剩余的增加;第 2,  $F$  的增加会加重公交企业的运营成本;第 3,  $F$  的增加又会带来更多负外部效应的成本.

## 2 模型求解

### 2.1 社会福利最大化条件下的最优发车频率

要使社会福利最大化,即:

$$\max_{p, F} U(p, F) = S(R) + pX[R(p, F)] - C_0 - C_1 T_c F - C_2 X + I T_c F, \tag{16}$$

对式(16)求  $p$  的一阶导数有:

$$U_p = S_R R_p + X + pX_p - C_2 X_p = 0, \tag{17}$$

把式(8)、式(13)带入式(17)整理得:

$$p = P_{v1} T_c \frac{h^2}{L^2 N F} X + C_2, \tag{18}$$

对式(16)求  $p$  的二阶导数,并利用公式(18)及前面的条件有,

$$U_{pp} = -P_{v1} T_c \frac{h^2}{L^2 N F} (X_p)^2 + X_p < 0,$$

故关于  $p$  的最优化二阶条件满足,同理可证如下几个最优化二阶条件同样满足。

对式(16)求  $F$  的一阶导数有:

$$U_F = S_R R_F + p X_F - C_1 T_c - C_2 X_F + I T_c = 0, \quad (19)$$

把式(9)、式(13)带入式(19)得:

$$-X \left( -\frac{P_w}{2F^2} - P_{v1} T_c \frac{h^2}{L^2 N F^2} X + P_{v1} T_c \frac{h^2}{L^2 N F} X_F \right) + (p - C_2) X_F - C_1 T_c + I T_c = 0,$$

令在社会福利最大化条件下的最优发车频率为  $F_U^*$ ,将式(18)带入上式,化简得:

$$F_U^* = \sqrt{\frac{X}{T_c(C_1 - I)} \left( \frac{P_w}{2} + P_{v1} T_c \frac{h^2}{L^2 N} X \right)}. \quad (20)$$

从公式(20)可以看出,最优发车频率  $F_U^*$  率主要取决于  $P_w$  和  $P_{v1}$  两部分因素. 当客流量较小时,  $P_w$  起主要作用;而当客流量越来越大时,  $P_{v1}$  将对  $F_U^*$  的影响起主要作用。

### 2.2 企业利润最大化条件下的最优发车频率

要使企业利润最大化,即:

$$\max_{p,F} \pi(p,F) = pX[R(p,F)] - C_0 - C_1 T_c F - C_2 X, \quad (21)$$

与 2.1 节相同,令式(21)对  $p$  和  $F$  的一阶导数等于 0, 整理得:

$$p = -\frac{X}{X_p} + C_2. \quad (22)$$

$$(p - C_2) X_F = C_1 T_c. \quad (23)$$

将式(22)带入式(23):

$$-X \frac{X_F}{X_p} = C_1 T_c, \quad (24)$$

同时利用式(8)和式(9)把式(10)改写成:

$$X_p \left( 1 - P_{v1} T_c \frac{h^2}{L^2 N F} X_R \right) = X_R, \quad (25)$$

$$X_F \left( 1 - P_{v1} T_c \frac{h^2}{L^2 N F} X_R \right) = X_R \left( -\frac{P_w}{2F^2} - P_{v1} T_c \frac{h^2}{L^2 N F^2} X \right). \quad (26)$$

则式(26)与式(25)相除可得:

$$\frac{X_F}{X_p} = -\frac{P_w}{2F^2} - P_{v1} T_c \frac{h^2}{L^2 N X F^2} X. \quad (27)$$

令在企业利润最大化条件下的最优发车频率为  $F_\pi^*$ ,把式(27)带入式(24)中,解得:

$$F_\pi^* = \sqrt{\frac{X}{T_c C_1} \left( \frac{P_w}{2} + P_{v1} T_c \frac{h^2}{L^2 N} X \right)}. \quad (28)$$

将式(28)与式(20)对比,不难发现,在不考虑外部效应的情况下,即  $I=0$  时,  $F_U^*$  与  $F_\pi^*$  相等。

### 3 例子

尽管在建模中客流量与最优票价和最优发车频率存在一定的关系,但在实际情况下,这种关系很难用函数表示,因此在仿真时可以忽略. 为了便于观察发车频率与客流量之间的变化关系(假设不考虑外部效应),笔者选取文献[10]中提供的智利首都圣地亚哥市的公交车广义成本参数估计值(见表 1)进行模拟. 在公共交通的座位数  $N=40$  个,客流量  $X$  从 100~2 000 人次/h 之间变化时,得到的最优发车频率见图 1。

表 1 广义成本参数估计值

广义成本参数	$C_1 /$ 美元 $\cdot$ h $^{-1}$	$P_w /$ 美元 $\cdot$ h $^{-1}$	$P_{v1} /$ 美元 $\cdot$ h $^{-1}$	$L /$ km	$h /$ km	$T_c /$ h
估计值	12.07	8.11	0.54	60	10	3

从式(20)、式(28)以及图 1 可以看出,随着客流量  $X$  的逐渐增大,最优发车频率与客流量将呈现一个线性变化的趋势。

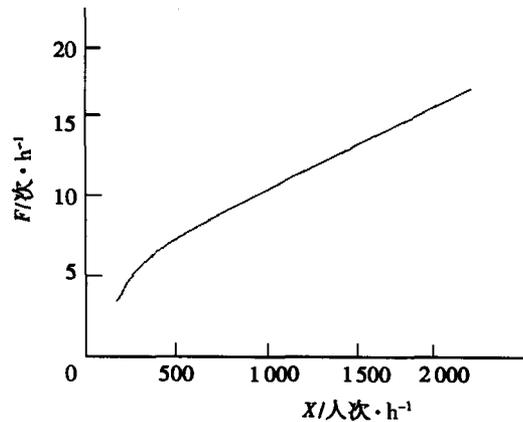


图 1 发车频率客流量之间的关系

### 4 结束语

从文中的研究结果来看,在不考虑外部效应时,在社会福利最大化和企业利润最大化条件下的最优发车频率相同,这对公共交通的供给决策具有重要的意义,即:最优发车频率与企业的运营目的无关,如果企业要增加运营收入,其应改变的不是发车频率,而是票价或其它因素。

笔者仅建立了一个比较简单的最优发车频率模型,更为复杂的模型应该考虑到交通需求的时间和空间分布、车祸风险等其它因素,这是值得进一步研究的问题。

## 参考文献:

- [1] MOHRING H. Optimization and scale economies in urban bus transportation[J]. American Economic Review, 1972, 62:591-604.
- [2] NASH C A. Management objectives, fares and service levels in bus transport [J]. Journal of Transport Economics and Policy, 1978, 1: 70-85.
- [3] JANSSON J. Transport system optimization and pricing [M]. New York:John Wiley & Sons, 1984.
- [4] JANSSON J. Optimal public transport price and service frequency [J]. Journal of Transport Economics and Policy, 1993, 27: 33-50.
- [5] EVANS A W, MORRISON A D. Incorporating accident risk and disruption in economic models of public transport[J]. Journal of Transport Economics and Policy, 1997, 31: 117-146.
- [6] DE BORGER B, WOUTERS. Transport externalities and optimal pricing and supply decisions in urban transportation: a simulation analysis for Belgium [J]. Regional Science and Urban Economics, 1998, 28:163-197.
- [7] CHIEN S, YANG Z, HOU E. Genetic algorithm approach for transit route planning and design[J]. Journal of Transportation Engineering, 2001, 127:200-207.
- [8] JANSSON K. Optimal pricing and financing of rail passenger services [EB/OL]. [2004-05-27]. [http://www.its.usyd.edu.au/conferences/thredbo/thredbo\\_papers\\_8/Thredbo8\\_Jansson\\_K.pdf](http://www.its.usyd.edu.au/conferences/thredbo/thredbo_papers_8/Thredbo8_Jansson_K.pdf).
- [9] VITON P A. Pareto-optimal urban transportation equilibria [J]. Research in Transportation Economics, 1983, 1: 75-101.
- [10] JARA-DIAZ S R, GSCHWENDER A. Towards a general microeconomic model for the operation of public transport [EB/OL]. [2004-10-03]. <http://tomarugo.cec.uthife.c1/dicidet/sjara/Towards%20a%20General.pdf>.

## Analysis on Optimal Service Frequency of Public Transport Considered with Generalised Cost

ZHAO Liang-jie, CHEN Yi-hua

(College of Mathematics and Physics, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

**Abstract:** The service frequency is an important factor which shows the supply and service level of public transportation. By considering the effect of occupancy rate on generalised cost firstly, the authors establish a new public transport model based on generalised cost. Then from the view of optimal pricing, this paper constructs two optimal service frequency models by the aim of maximizing social welfare and maximizing profit separately. The result shows that, without the effect of externalities, the two optimal service frequency is the same. Finally, this paper use some parameters of generalised cost, which coming from a city, to simulate this model, and the result shows it is feasible.

**Key words:** public transport; optimal service frequency; generalised cost; occupancy rate

(编辑 李胜春)