文章编号:1000-582X(2007)07-0134-04

具有迷向 S-曲率的指数度量

孙建凯[1],程新跃[2]
(1.重庆大学 数理学院,重庆 400030;2.重庆工学院 数理学院,重庆 400050)

摘 要:研究了 Finsler 几何中一类特殊(α,β)-度量-指数度量 $F=\alpha e^{ks}$ 的 S-曲率性质。笔者通过把指数度量的 S-曲率与其特殊 S-曲率的表达式进行比较,采用代数方程公式运算的方法,分析方程因式指数的变化,得到了指数度量具有迷向 S-曲率的充要条件:指数度量具有迷向 S-曲率当且仅当它具有迷向平均 Berwald 曲率。此时,该度量的 S-曲率为零,且是弱 Berwald 度量。结论表明:对于这类特殊的(α,β)-度量来说,它的曲率性质较简单,即它有迷向 S-曲率等价于它有迷向平均 Berwald 曲率,等价于它具有为零的 S-曲率。

关键词:指数度量;S-曲率;迷向 S-曲率;迷向平均 Berwald 曲率;(α,β)-度量。
中图分类号:O186 **文献标志码**:A

1 研究背景

(α,β)-度量是一类重要的有丰富几何性质的 Finsler 度量,包括黎曼度量和 Randers 度量。在近来十几年中 Finsler 几何取得了飞速的发展,各种曲率性质和它们的意义已被广泛研究和理解。这在很大程度上要归功与对(α,β)-度量的研究。这是因为 Finsler 几何中涉及大量的复杂计算,而(α,β)-度量的特殊性和可计算性,为 Finsler 几何的研究提供了很大的方便。(α,β)-度量在物理学和生物学方面也有很重要的应用[1-2]。

S-曲率是 Finsler 几何中一个非常重要的非黎曼几何量,它是由沈忠民教授在文献[3]中把 Bishop 比较定理推广到 Finsler 几何中时首次引进的,又可以称为平均协变导数。S-曲率反映了 Finsler 度量的 distortion 沿测地线的变化率,而 distortion 是将黎曼度量从 Finsler 度量中分离出来的重要几何量,即 F 是黎曼度量当且仅当它的 distortion 等于0,即 $\tau(y)=0$,因此它的 S-曲率消失。近来许多几何学家在 S-曲率研究方面给予了很大的关注,表明 S-曲率在 Finsler 几何研究中起重要作用。例如,具有迷向 S-曲率的 Finsler 度量 F 若具有标量 flag 曲率 $K=K(x,y)$,则它的 flag 曲率可以表示成:

$$K=3c_{x^i}y^i/F+\sigma,$$

其中 $\sigma:=\sigma(x)$ 是流形 M 上的标量函数[4-5],具有常 flag 曲率的 Randers 度量 F 一定具有常 S-曲率[6-7],关于 Randers 度量 S-曲率的研究可见文献[6,8-9]。(α,β)-度量是比 Randers 度量更广泛的一类 Finsler 度量,目前关于(α,β)-度量 S-曲率的研究和一些(α,β)-度量具有迷向 S-曲率的条件的研究有很大的进展[9-10]。

笔者重点研究了光滑流形上一类具有重要应用背景的特殊(α,β)-度量-指数度量的 S-曲率性质,得到如下定理。

定理1 对 n 维流形 M 上的一个指数度量 $F=\alpha e^{ks}$,$s=\beta/\alpha$,$k\neq0$ 为常数,下列条件是等价的:

1)F 具有迷向 S-曲率,即存在 M 上的标量函数 $c:=c(x)$,使得 $S=(n+1)cF$;

2)F 具有迷向平均 Berwald-曲率,即存在 M 上的标量函数 $c(x)$,使得

收稿日期:2007-04-19
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10671214);重庆市科委自然科学基金资助项目(CSTC,2006BB8394)。
作者简介:孙建凯(1981-),男,重庆大学硕士,主要从事微分几何研究。程新跃(联系人),男,重庆工学院教授,从事微分几何学研究,(E-mail)chengxy@cqit.edu.cn。

$$E = (n+1)c(x)F^{-1}h/2,$$

其中 $h: = h_{ij}dx^i dx^j, h_{ij}: = FF_{y^iy^j}$;

3) β 关于 α 是长度恒定的 Killing1-形式，即 $r_{00} = 0, s_0 = 0$;

4) $S = 0$;

5) F 为弱 Berwald 度量，即 $E = 0$。

第二作者与沈忠民教授已经证得对于 Randers 度量 $F = \alpha + \beta$，以下条件是等价的[6]：

①F 具有迷向 S-曲率，即 $S = (n+1)cF$;

②F 具有迷向平均 Berwald 曲率，即

$$E = (n+1)c(x)F^{-1}\frac{h}{2};$$

③$r_{00} + 2\beta s_0 = 2c(x)(\alpha^2 - \beta^2)$.

同时由定理还可以得到指数度量成为弱 Berwald 度量的充要条件。

2　相关知识

设 M 是一个 n 维光滑流形，TM 为 M 的切丛，我们记：$TM\backslash\{0\}: = \{(x,y) \in TM | y \neq 0\}$

定义 1[1]　C^∞ 流形 M 上的 Finsler 度量是指 TM 上的函数 $F: = F(x,y): TM \to [0,\infty)$，它满足下列性质：

1) 正则性，F 在 $TM\backslash\{0\}$ 上是光滑的；

2) 一阶正齐次性，$F(x,\lambda y) = \lambda F(x,y)$，$\forall (x,y) \in TM, \forall \lambda > 0$;

3) 强凸性，矩阵 $(g_{ij}): = (\partial^2 F^2/(2\partial y^i \partial y^j))$ 在 $TM\backslash\{0\}$ 上处处正定。其中 y^i 是由 M 上局部坐标函数 x^i 诱导的 TM 的局部坐标函数 (x^i, y^i) 的分量；(M,F) 则称为 Finsler 流形。

S-曲率是 Finsler 度量的 distortion 沿测地线的变化率，对于 $y \in T_xM$，定义 (M,F) 的 distortion 为

$$\tau(y): = \ln\sqrt{\det[g_{ij}(x,y)]}/\sigma_F(x),$$

其中 $g_{ij}(x,y): = [F^2]_{y^iy^j}(x,y)/2$，$\sigma_F(x)$ 表示 F 的 Busemann-Hausdorff 体积形式[11]。F 的 S - 曲率定义为：

$$S(y): = \partial\{\tau[\dot{c}(t)]\}_{t=0}/\partial t,$$

其中 $c(t)$ 为满足条件 $c(0) = x, \dot{c}(0) = y$ 的测地线。在局部坐标系 (U, x^i) 中 S-曲率的表达式为：

$$S(y) = \frac{\partial G^m}{\partial x^m} - y^m \frac{\partial \ln\sigma_F}{\partial x^m}.$$

一个 (α,β) - 度量可以表示成以下形式，$F = \alpha\varphi(s), s = \beta/\alpha$,

其中 $\alpha = \sqrt{a_{ij}(x)y^iy^j}$ 是一个黎曼度量，$\beta = b_i(x)y^i$ 是一个 1 - 形式。$\varphi = \varphi(s)$ 是定义在一个开集 $(-b_0, b_0)$ 上且满足下面条件的光滑函数：$\phi(s) - s\phi'(s) + (b^2 - s^2)\phi''(s) > 0, |s| \leq b \leq b_0$,

其中：$\phi'(s)$ 和 $\phi''(s)$ 分别表示 $\phi(s)$ 关于 s 的一次和二次导数。

令 $G^i = G^i(x,y)$ 与 $G^i_\alpha = G^i_\alpha(x,y)$ 分别表示 (α,β) 度量与黎曼度量的测地系数，并定义：

$r_{ij}: = (b_{i;j} + b_{j;i})/2, s_{ij} = (b_{i;j} - b_{j;i})/2, s_{i0}: = s_{ij}y^j$, $s^i_0: = a^{ij}s_{j0}, s_0: = s_{i0}b^i, r_{00}: = r_{ij}y^iy^j, b: = \|\beta_s\|_\alpha$。

其中“;”表示 β 关于 α 的黎曼联络的协变导数。

关于 (α,β) 度量的测地系数有如下引理，

引理 1[7].　对于 (α,β) 度量 $F = \alpha\phi(s), s = \beta/\alpha$，$F$ 与 α 的测地系数 G^i 与 G^i_α 满足关系

$$G^i = G^i_\alpha + Py^i + Q^i,$$

其中

$$P = \alpha^{-1}\Theta\{-2Q\alpha s_0 + r_{00}\},$$

$$Q^i = \alpha Q s^i_0 + \Psi\{-2Q\alpha s_0 + r_{00}\}b^i,$$

且

$$Q = \phi'/(\phi - s\phi'),$$

$$\Theta = \frac{\phi\phi' s(\phi\phi'' + \phi'\phi'')}{2\phi((\phi - s\phi) + (b^2 - s^2)\phi''},$$

$$\Psi = \frac{\phi''}{2((\phi - s\phi') + (b^2 - s^2)\phi''}。$$

对于流形 M 上的 (α,β) 度量的 S-曲率笔者有公式，

引理 2　(α,β) 度量 $F = \alpha\phi(s), s = \beta/\alpha$ 的 S-曲率为：

$$S = \{Q' - \Psi Q s - 2[\Psi Q]'(b^2 - s^2) - 2(n+1)Q\Theta + \lambda\}s_0 + (2\Psi + \lambda)r_0 + \alpha^{-1}\{(b^2 - s^2)\Psi' + (n+1)\Theta\}r_{00} \quad (1)$$

其中，$\lambda: = -f'(b)/[f(b)]$ 为流形 M 上的标量函数[10]。

3　定理 1 的证明

观察指数度量 $F = \alpha e^{ks} = \alpha e^{k\beta/\alpha}$，发现 k 可以与 β 并起来为 $\bar{\beta} = k\beta$ 形成新的指数度量 $F = \alpha e^{\bar{\beta}/\alpha}$，而 β 的变化不影响到黎曼度量 α，因此它们的 S-曲率性质是等价的。不妨假设 $k = 1$，即讨论的曲率性质。

对于指数度量 $F = \alpha e^{\beta/\alpha}$，可以表示为 $F = \alpha\phi(s), s = \beta\alpha$，即 $\phi(s) = e^s$，由引理 1

可知：

$$Q=\frac{1}{1-s},\Theta=\frac{2s-1}{2(-1+s-b^2+s^2)},$$

$$Q'=\frac{1}{(-1+s)^2},\Psi=-\frac{1}{2(-1+s-b^2+s^2)},$$

$$\Psi Q=\frac{1}{2(-1+s)(-1+s-b^2+s^2)},$$

$$(\Psi Q)'=\frac{2+b^2-3s^2}{2(-1+s)^2(-1+s-b^2+s^2)},$$

$$Q\Theta=\frac{-1+2s}{2(-1+s)(-1+s-b^2+s^2)}。\quad(2)$$

证明

1)⇒2)：显然。据平均 Berwald 曲率的定义，由 $s=(n+1)cF$ 可得到

$$E=(n+1)c(x)F^{-1}\frac{h}{2}。$$

2)⇒3)：知道 $E=(n+1)c(x)F^{-1}h/2\Leftrightarrow S=(n+1)(c(x)F+\eta)$，只需证 $\eta=0$。

将(2)代入(1)式 S-曲率公式得到，

$$\begin{aligned}S:=&\frac{1}{2\alpha(-1+s)(-1+s-b^2+s^2)^2}\{(4ns^2-\\&2ns^4-2sb^2+n+2b^2+3s^2-4s+1+\\&2ns^2b^2-4ns+nb^2+ns^3-3nsb^2)r_{00}\\&+(-6\alpha\lambda s+2\alpha\lambda b^4+2\alpha\lambda-2\alpha\lambda s^4+\\&2\alpha\lambda s^2-4\alpha ns^3+2\alpha s^3+4\alpha\lambda b^2+\\&6\alpha\lambda s^3-8\alpha\lambda sb^2-2\alpha\lambda sb^4+4\alpha\lambda b^2s^3+\\&4\alpha nsb^2+2\alpha s-2\alpha n+6\alpha ns-2\alpha ns^2-2\alpha nb^2-\\&2\alpha sb^2-2\alpha\lambda s^5-2\alpha b^2)s_0+(2\alpha b^2+\\&2\alpha s^3-2\alpha\lambda s^4+2\alpha-8\alpha\lambda sb^2-2\alpha\lambda sb^4+\\&4\alpha\lambda b^2s^3-2\alpha sb^2+2\alpha\lambda-6\alpha\lambda s+4\alpha\lambda b^2-\\&4\alpha s+6\alpha\lambda s^3+2\alpha\lambda b^4-2\alpha\lambda s^5+2\alpha\lambda s^2)r_0\}。\end{aligned}\quad(3)$$

若 $S=(n+1)(c(x)\alpha e^s+\eta)$，发现等式左边是 s 的多项式，而等式的右边是 s 的指数函数形式，并且不能在 $s=0$ 处幂级数展开，因此，则有

$$S-(n+1)\eta=0。\quad(4)$$

将 $s=\beta/\alpha$ 代入(4)并整理得到

$$A_5\alpha^5+A_4\alpha^4+A_3\alpha^3+A_2\alpha^2+A_1\alpha+A_0=0。\quad(5)$$

其中：

$$A_0:=(2\beta\lambda(r_0+s_0)+2nr_{00}-2(n+1)\eta\beta)\beta^4,$$

$$\begin{aligned}A_1:=&-n\beta^3r_{00}+2\lambda\beta^4r_0+\\&2\lambda\beta^4s_0+2(n+1)\eta(2b^2\beta^3-\beta^4),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_2:=&(-3\beta^2-2n\beta^2b^2-4n\beta^2)r_{00}+\\&(-2\beta^3+4n\beta^3-4\lambda b^2\beta^3-6\lambda\beta^3)s_0+\\&2(n+1)\eta(-\beta b^4+3\beta^3)+\\&(-2\beta^3-6\lambda\beta^3-4\lambda b^2\beta^3)r_0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_3:=&2(n+1)\eta(-4\beta b^2+b^4+\beta^2)+\\&(-2\lambda\beta^2+2n\beta^2)s_0-2\lambda\beta^2r_0+\\&(4n\beta+2\beta b^2+3n\beta b^2+4\beta)r_{00},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_4:=&(-n-bn^2-1-2b^2)r_{00}+(2\lambda\beta b^4-\\&4n\beta b^2+8\lambda\beta b^2-2\beta-6n\beta+6\lambda\beta)s_0+\\&(4\beta+2\beta b^2+2\lambda\beta b^4+8\lambda\beta b^2+\\&6\lambda\beta)r_0+2(n+1)\eta(-3\beta+2b^2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_5:=&(-2\lambda b^4+2n-2\lambda+2b^2-4\lambda b+2nb^2)s_0+\\&(-2\lambda-2-2\lambda b^4-4\lambda b^2-2b^2)r_0+2(n+1)\eta。\end{aligned}$$

由于 α^2 是 y^i 的多项式，因此(5)中 α 的系数必须等于0。即

$$A_4\alpha^4+A_2\alpha^2+A_0=0。\quad(6)$$

$$A_s\alpha^4+A_3\alpha^2+A_1=0。\quad(7)$$

由(6)知 A_0 能被 α^2 整除，而 β^4 不能被 α^2 整除，则存在流形 M 上的标量函数 τ_1 使得

$$2\beta\lambda(r_0+s_0)+2nr_{00}-2(n+1)\eta\beta=\tau_1\alpha^2。\quad(8)$$

由(7)同样可以知，A_1 能被 α^2 整除，在流形 M 上存在标量函数 τ_2 使得

$$\begin{aligned}&2\lambda\beta(r_0+s_0)-nr_{00}+\\&2(n+1)\eta(2b^2-\beta)=\tau_2\alpha^2。\end{aligned}\quad(9)$$

那么(8)+(9)×2，(8)-(9)可以得到：

$$\begin{aligned}&6\lambda\beta(r_0+s_0)-2(n+1)\eta(3\beta-4b^2)=\\&(\tau_1+2\tau_2)\alpha^2。\end{aligned}\quad(10)$$

$$3nr_{00}-4(n+1)\eta b^2=(\tau_1-\tau_2)\alpha^2。\quad(11)$$

则(10)左边能够被 α^2 整除，这是不可能的，因此

$$6\lambda\beta(r_0+s_0)-2(n+1)\eta(3\beta-4b^2)=0。\quad(12)$$

由(12)可以得到：

$$3r_{00}=\frac{(3\beta-4b^2)(n+1)\eta}{b^2\lambda}。\quad(13)$$

将(13)代入(11)得：

$$(n+1)\eta[(3\beta-4b^2)n-4b^4\lambda]=b^2\lambda(\tau_1-\tau_2)\alpha^2。\quad(14)$$

则(14)式左边能被 α^2 整除，这是不可能的，因此，$(n+1)\eta[(3\beta-4b^2)n-4b^4\lambda]=0$，而 $\beta\neq0$，故 $(3\beta-$

$4b^2)n-4b^4\lambda\neq 0$，所以 $(n+1)\eta'=0\Rightarrow\eta=0$，故 F 具有迷向的 S-曲率。

2)⇒3)：将 $\eta=0$ 代入(13)得到：$r_{00}=0$，由 $r_0=r_{l0}b^l$，将两边用 y^l 与 b_l 缩并得：$r_0\beta=r_{00}b^2$，因 $\beta\neq 0$，则 $r_0=0$，将 $\eta=0,r_0=0$，代入(12)得：$s_0=0$，即 β 是关于 α 长度恒定的 Killing1-形式。

3)⇒4)：将 $r_{00}=0,r_0=0,s_0=0$，代入(1)得：$S=0$。

4)⇒5)：由 $S=0$ 得到 $c(x)=0$，由 $E=(n+1)c(x)F^{-1}h/2$ 知 $E=0$，即 F 是弱 Berwald 度量。

5)⇒2)：由 F 是弱 Berwald 度量 $E=0$ 知 $E=(n+1)c(x)F^{-1}h/2,c(x)=0$。证毕。

参考文献：

[1] CHERN S S, SHEN Z M, Riemann-Finsler geometry [M]. Singapore, World Scientific Publishing Co. , 2005.

[2] ROMAN M, SHIMADA H, SABAU V S. On-change of the Antonelli-Shimada ecological metric [J]. Tensor, N. S. 2004, 65: 65-73.

[3] SHEN Z M, Volume comparison and its applications in Riemann-Finsler Geometry [M]. Advan-ces in. Math. 1997, 128: 306-328.

[4] CHENG X Y, MO X H, SHEN Z M. On the flag curvature of Finsler Metrics of scalar curvature [J]. Journal of the London Mathematical Society, 2003, 68 (2):762-780.

[5] CHENG X Y, SHEN Z M. Projectively flat Finsler Metrics with almost istotropic S-curvature [M]. Acta Mathematica Scientia, 2006, 26B (2):307-313.

[6] CHENG X Y, SHEN Z M. Randers Metrics with special curvature properties[J]. Osaka Journal of Mathematical, 2003, 40: 87-101.

[7] SHEN Z M, YILDIRIM G C. On a class of projectively flat metrics with constant flag curcature[J]. Canadian Journal of Mathematical, 2006.

[8] MO X H. On the flag curvature of a Finsler spaces with constant S-curcature [J]. Houston of Math. 2005, 3 (1): 131-144.

[9] SHEN Z M. Finsler metrics with K = 0 and S = 0[J]. Canadian Journal of mathematical, 2003,55(1):112-132.

[10] 崔宁伟. 关于度量的 S－曲率[J]. 数学物理学报 2006,26 (A):1047-1056.

On the Exponential Metrics with Isotropic S-curvature

SUN Jian-kai[1], *CHENG Xin-yue*[2]

(1. Department of Mathematics and Physics, Chongqing University, Chongqing 400030, China;

2. Department of Mathematics and Physics, Chongqing Institute of Technology, Chongqing 400050, China)

Abstract: The writer studied the S-curvature of a special metric(α,β)-exponential metrics in the Finsler geometry with the form $F=\alpha e^{ks}$, where $s=\beta/\alpha$, $\alpha=\sqrt{a_{ij}(x)y^iy^j}$ is a Riemannian metric, $\beta=b_i(x)y^i$ is a non-zero 1-form , k is a constant that. The sufficiency and necessary conditions are given by comparing expressions of the S－curvature and of exponential metrics and it's special S-curvature, adopting the formula operations and analyzing the changes of the exponent of equation factors, i. e. the exponential metrics are of ispotropic S-curbature , if and only if they are of isoptropic mean Berwald metrics . In this case, it's S-curvature vanishes, i. e. $S=0$, and it is of weakly-Berwald metric. The curvature characteristic of this class of (α,β)-metrics is not complex, i. e. they are of isotropic S－curvature which means they are of isotropic mean Berwald curvature or their S-curvatures are zero.

Key words: exponential metrics; S-curvature; ispotropic S-curvature; ispotropic mean Berwald curvature; metrics

（编辑 吕建斌）