文章编号:1000-582X(2007)09-0093-03

一类特殊非线性 Neumann 边值问题的正解

姚庆六

(南京财经大学 应用数学系,江苏 南京 210003)

摘　要:考察了一类特殊非线性 Neumann 边值问题。该类边值问题没有 Green 函数,能够通过适当的变换将其转化为一般 Neumann 边值问题。利用积分方程和锥上的度数理论证明了这类问题的 n 个正解的存在性,其中 n 是一个任意的自然数。

关键词:二阶常微分方程;Neumann 边值问题;正解;存在性;多解性

中图分类号: O175.8　　**文献标志码**:A

笔者考察下列二阶 Neumann 边值问题的正解:

$$(P)\begin{cases}u''(t)+f(t,u(t))=0,0\leqslant t\leqslant 1,\\ u'(0)=u'(1)=0。\end{cases}$$

问题(P)的正解 u^* 是指(P)的满足 $u^*(t)\gg 0,0\leqslant t\leqslant 1$ 的解。由于方程 $-u''(t)=0,u'(0)=u'(1)=0$ 的解不唯一,边值问题(P)的特殊之处是它没有 Green 函数。

二阶 Neumann 边值问题描述了两端点处梯度为零的一类重要物理现象,因此这一问题的研究历史悠远[1-2]。近年来,利用 Green 函数考察一般二阶 Neumann 边值问题正解已经获得了丰富的成果[3-8]。Neumann 边值问题(P)没有 Green 函数,因此必须寻求新的方法解决面临的问题。受文献[9]处理二阶周期边值问题的启发,笔者将通过适当的变换把问题(P)转化为一般 Neumann 边值问题,然后构造一个适用的锥并利用锥上度数理论证明问题(P)的 2 个,3 个,乃至 n 个正解的存在性,其中 n 是一个任意的自然数。

笔者使用下列假设

(H_1) $f:[0,1]\times(0,+\infty)\to(-\infty,+\infty)$ 为连续函数。

(H_2) 存在 $\lambda>0$ 使得

$$f(t,u)+\lambda u\geqslant 0,(t,u)\in[0,1]\times(0,+\infty)。$$

文中记 $G(t,s)$ 是齐次边值问题

$$-u''(t)+\lambda u(t)=0,u'(0)=u'(1)=0$$

的 Green 函数,即

(1)当 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1$ 时

$$G(t,s)=\frac{\cosh\sqrt{\lambda}(1-t)\cosh\sqrt{\lambda}s}{\sqrt{\lambda}\sinh\sqrt{\lambda}};$$

(2)当 $0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1$ 时

$$G(t,s)=\frac{\cosh\sqrt{\lambda}t\cosh\sqrt{\lambda}(1-s)}{\sqrt{\lambda}\sinh\sqrt{\lambda}}。$$

容易看出

$$0\leqslant G(t,s)\leqslant G(s,s),0\leqslant s,t\leqslant 1。$$

又设 $0\leqslant\delta<\frac{1}{2}$ 并且

$$A=\left[\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s\right]^{-1}=\lambda,$$

$$B=\left[\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_\delta^{1-\delta}G(t,s)h(s)\mathrm{d}s\right]^{-1}=\frac{\lambda\sinh\frac{1}{2}\sqrt{\lambda},}{\sinh\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}-\sinh\delta\sqrt{\lambda}}。$$

显然 $0<A<B$。

设 $C[0,1]$ 是赋予范数 $\|u\|=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|u(t)|$ 的 Banach 空间。记

$$q(t)=\frac{\min\{\cosh\sqrt{\lambda}(1-t),\cosh\sqrt{\lambda}t\}}{\cosh\sqrt{\lambda}}。$$

显然 $0<q(t)\leqslant 1,0\leqslant t\leqslant 1$。又设

收稿日期:2007-05-17

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10571085)

作者简介:姚庆六(1946-),男,南京财经大学教授,主要从事应用微分方程的研究,(E-mail)yaoqingliu2002@hotmail.com。

$\sigma = \min_{\delta\leq t\leq 1-\delta} q(t) = \cosh\delta\sqrt{\lambda}/\cosh\sqrt{\lambda}$,

$\tau = \min_{0\leq t\leq 1} q(t) = 1/\cosh\sqrt{\lambda}$。

于是 $0<\tau<\sigma<1$。

定义

$K=\{u\in C[0,1]:u(t)\geq(u)q(t),0\leq t\leq 1\}$。容易核验 K 是一个锥。笔者引入下列控制函数作为基本工具。

$$\varphi(r)=\max\left\{f(t,u)+\lambda u:\begin{matrix}t\in[0,1]\\u\in[\tau r,r]\end{matrix}\right\},$$

$$\psi(r)=\min\left\{f(t,u)+\lambda u:\begin{matrix}t\in[\delta,1-\delta]\\u\in[\sigma r,r]\end{matrix}\right\}。$$

显然 $\varphi,\psi:(0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 都是连续的。

引理1[6] 成立不等式

$q(t)G(s,s)\leq G(t,s)\leq G(s,s),0\leq s,t\leq 1$。

引理2[10] 设 X 是 Banach 空间,K 是 X 中的锥,Ω_1,Ω_2 都是 K 中的有界开子集满足 $0\in\Omega_1,\underline{\Omega_1}\subset\Omega_2$,$T$:$\underline{\Omega_2}\backslash\Omega_1\to K$ 是连续的紧算子。如果下列条件之一成立,

1) $\|Tu\|\leq\|u\|,u\in\partial\Omega_1$ 并且

$\|Tu\|\geq\|u\|,u\in\partial\Omega_2$。

2) $\|Tu\|\geq\|u\|,u\in\partial\Omega_1$ 并且

$\|Tu\|\leq\|u\|,u\in\partial\Omega_2$。

则 T 在$\underline{\Omega_2}\backslash\Omega_1$ 中有一个不动点。

笔者证明了下列存在性结论。

定理1 假设(H_1)、(H_2)成立并且存在两个正数 a,b 使得 $\varphi(a)\leq aA$ 并且 $\psi(b)\geq bB$,则问题(P)至少有一个正解 $u^*\in K$ 满足

$$\min\{a,b\}\leq\|u^*\|\leq\max\{a,b\}。$$

证明 定义算子 T 为,对于 $0\leq t\leq 1$ 和 $u\in K\backslash\{0\}$,

$$(Tu)(t)=\int_0^1 G(t,s)[f(s,u(s))+\lambda u(s)]ds。$$

根据条件(H_2)和引理1,对于 $0\leq t\leq 1$ 有

$$(Tu)(t)\geq q(t)\int_0^1 G(s,s)[f(s,u(s))+\lambda u(s)]ds\geq$$

$$q(t)\max_{0\leq t\leq 1}\int_0^1 G(t,s)[f(s,u(s))+\lambda u(s)]ds=$$

$$\|Tu\|q(t)。$$

于是 $T:K\backslash\{0\}\to K$。

容易核验算子 T 的不动点均为问题(P)的解。此外,如果 $0\neq u^*\in K$,则有

$$u^*(t)\geq\|u^*\|q(t)\geq aq(t)>0,0\leq t\leq 1。$$

因此 T 在 K 中的任一非零不动点均为问题(P)的正解。

这样一来,只需证明 T 有一个不动点 $u^*\in K$ 且 $\min\{a,b\}\leq\|u^*\|\leq\max\{a,b\}$。

因 $A\neq B$,易知 $a\neq b$。不妨设 $a<b$。记 $\Omega_r=\{u\in K:\|u\|<r\}$。

利用 Arzela-Ascoli 定理不难证明 $T:\underline{\Omega_b}\backslash\Omega_a\to K$ 为连续的紧算子。

如果 $u\in\partial\Omega_a$,则$u=a$。这表明

$$\tau a=\|u\|\min_{0\leq t\leq 1}q(t)\leq u(t)\leq a,0\leq t\leq 1。$$

于是对于 $0\leq t\leq 1$ 有

$$0\leq f(t,u(t))+\lambda u\leq\varphi(a)\leq aA。$$

由此推出

$$\|Tu\|=\max_{0\leq t\leq 1}\int_0^1 G(t,s)[f(s,u(s))+\lambda u(s)]ds\leq$$

$$aA\max_{0\leq t\leq 1}\int_0^1 G(t,s)ds=a=\|u\|。$$

如果 $u\in\partial\Omega_b$,则 $\|u\|=b$。这表明

$$\sigma b=\|u\|\min_{\delta\leq t\leq 1-\delta}q(t)\leq\min_{\delta\leq t\leq 1-\delta}u(t)$$

$$\leq\max_{\delta\leq t\leq 1-\delta}u(t)\leq b。$$

于是对于 $\delta\leq t\leq 1-\delta$,

$$f(t,u(t))+\lambda u(t)\geq\psi(b)\geq bB。$$

由此推出

$$\|Tu\|\geq\max_{0\leq t\leq 1}\int_\delta^{1-\delta}G(t,s)[f(s,u(s))+\lambda u(s)]ds\geq$$

$$bB\max_{0\leq t\leq 1}\int_\delta^{1-\delta}G(t,s)ds=b=\|u\|。$$

根据引理2,算子 T 至少有一个不动点 $u^*\in\underline{\Omega_b}\backslash\Omega_a$ 并且 $a\leq\|u^*\|\leq b$。证毕。

推论1 假设(H_1)、(H_2)成立且下列条件之一满足:

1) $0\leq\overline{\lim_{r\to 0}}\varphi(r)/r<A$ 并且

$B<\underline{\lim_{r\to\infty}}\psi(r)\leq+\infty$。

2) $B<\underline{\lim_{r\to 0}}\psi(r)\leq+\infty$ 并且

$0\leq\overline{\lim_{r\to\infty}}\varphi(r)/r<A$。

则问题(P)至少有一个正解 $u^*\in K$。

推论2 假设(H_1)、(H_2)成立且下列条件之一满足:

1) $\overline{\lim_{u\to+0}}\max_{0\leq t\leq 1}f(t,u)/u<0$ 并且 $\overline{\lim_{u\to+\infty}}\min_{\delta\leq t\leq 1-\delta}f(t,u)/u>B/\sigma-\lambda$。

2) $\overline{\lim_{u\to+0}}\min_{\delta\leq t\leq 1-\delta}f(t,u)/u>B/\sigma-\lambda$ 并且 $\overline{\lim_{u\to+\infty}}\max_{0\leq t\leq 1}f(t,u)/u<0$。

则问题(P)至少有一个正解 $u^*\in K$。

证明 参见文献[7]中推论3的证明。

利用定理1可以方便地获得下列多解性结论。

定理2 假设(H_1)、(H_2)成立且存在三个正数 $a<b<c$ 使得下列条件之一满足:

1) $\varphi(a)\leq aA,\psi(b)>bB,\varphi(c)\leq cA$。

2) $\psi(a) \geq aB, \varphi(b) < bA, \psi(c) \geq cB$。

则问题(P)至少有两个正解 $u_1^*, u_2^* \in K$ 满足 $a \leq \| u_1^* \| < b < \| u_2^* \| \leq c$。

证明　仅证情况(1)。因为 $\psi:(0, +\infty) \to [0, +\infty)$ 连续，知存在正数 $a < b_1 < b < b_2 < c$ 使得 $\psi(b_1) \geq b_1 B, \psi(b_2) \geq b_2 B$。现在分别对数对 $\{a, b_1\}, \{b_2, c\}$ 应用定理 1，证明即告完成。

定理 3　假设(H_1)、(H_2)成立且存在四个正数 $a < b < c < d$ 使得下列条件之一满足：

1) $\varphi(a) \leq aA, \psi(b) > bB, \varphi(c) < cA$ 并且 $\psi(d) \geq dB$。

2) $\psi(a) \geq aB, \varphi(b) < bA, \psi(c) > cB$ 并且 $\varphi(d) \leq dA$。

则问题(P)至少有三个正解 $u_1^*, u_2^*, u_3^* \in K$ 满足

$$a \leq \| u_1^* \| < b < \| u_2^* \| < c < \| u_3^* \| \leq d。$$

对于任意的自然数 n，容易写出类似的结论。下面是一个比较简单的 n 解性结论。

定理 4　假设(H_1)、(H_2)成立且存在 $2n$ 个正数 $r_1 < r_2 < \cdots, < r_{2n-1} < r_{2n}$ 使得对于 $a_i, b_i \in \{r_{2i-1}, r_{2i}\}$，$a_i \neq b_i, i = 1, 2, \cdots, n$，均有

$$\varphi(a_i) \leq a_i A, \psi(b_i) \geq b_i B。$$

则问题(P)至少有 n 个正解 $u_i^* \in K, i = 1, 2, \cdots, n$，满足 $r_{2i-1} \leq \| u_i^* \| \leq r_{2i}$，其中$[c]$表示 c 的整数部分。

说明　由于缺乏 Green 函数，还没有文献考察过 Neumann 边值问题(P)的正解。笔者开启了这项工作。除此而外，与文献[3-7]中的方法相比较该文有两点改进。第一，允许 $f(t,u)$ 在 $u = 0$ 处奇异。第二，允许

$$\min\{f(t,u) + \lambda u : (t,u) \in [0,1] \times [\sigma r, r]\}$$

取零值。这些改进无疑扩大了该文结论的使用范围。

通过下列例子说明这一点。设

$$f(t,u) = \sin\pi t / u^3 - \frac{1}{4}u。$$

则 $f(t,u)$ 在 $u = 0$ 处奇异且对于 $0 \leq t \leq 1, 0 < u < +\infty$ 有

$$f(t,u) + \frac{1}{4}u = \sin\pi t / u^3 \geq 0。$$

这样一来对于任何 $r > 0$ 均有

$$\min\{f(t,u) + \lambda u : (t,u) \in [0,1] \times [\sigma r, r]\} = \min\{\sin\pi t / u^3 : (t,u) \in [0,1] \times [\sigma r, r]\} = 0。$$

令 $\delta = \frac{1}{6}$。注意到

$$\lim_{u \to +0} \min_{1/6 \leq t \leq 5/6} f(t,u)/u = \lim_{u \to +0} 1/(2u^4) = +\infty$$

并且

$$\lim_{u \to +\infty} \max_{0 \leq t \leq 1} f(t,u)/u = -\frac{1}{4} < 0,$$

根据推论 2，相应的问题(P)存在一个正解。

在具体的问题中 λ 与 δ 的值可以根据非线性项 $f(t,u)$ 的性态来决定。

参考文献：

[1] ARCOYA D, VILLEGAS S. Nontrivial solutions for a Neumann boundary value problem with a nonlinear term asymptotically linear at $-\infty$ [J]. Math Z, 1995, 219(4): 499-512.

[2] CABADA A, POUSO R L. Existence results for the problem $(\varphi(u'))' = qf(t,u,u')$ with periodic and Neumann boundary value problems [J]. Nonlinear Anal, 1997, 30(12): 1733-1742.

[3] 蒋达清，刘辉昭. 二阶微分方程 Neumann 边值问题正解得存在性[J]. 数学研究与评论，2000，20(3)：360-364.

[4] SUN J, LI W. Multiple positive solutions to second order Neumann boundary value problems [J]. Appl Math & Comput, 2003, 146(2): 187-194.

[5] LI X, JIANG D. Optimal existence theory for single and multiple solutions to second order Neumann boundary value problems [J]. Indian J Pure and Appl Math, 2004, 35(4): 573-586.

[6] 张兴秋，孙永平，仲秋艳. 奇异二阶 Neumann 边值问题的正解[J]. 工程数学学报，2004，21(4)：645-648.

[7] 姚庆六，李永祥. 半正 Neumann 边值问题的解和正解的存在性与多解性[J]. 西南交通大学学报，2005，40(4)：539-543.

[8] YAO Q. Multiple positive solutions of a singular Neumann boundary value problem [J]. 中国科学技术大学学报，2006，36(10)：1082-1088.

[9] TORRES PJ. Existence of one - signed periodic solutions of some second-order differential equations via Krasnoselskii fixed point theorem [J]. J Diff Eqns, 2003, 195(3): 643-662.

[10] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 2 版. 济南：山东科学技术出版社，2003.

（下转第 98 页）

由引理2知,当$N \geqslant 473$时,方程(15)在实数域中不可解。证明完成。

从定理2和定理3,很容易完成定理1的证明。

致谢 **感谢张世清教授和张伟年教授的关心和支持。**

参考文献:

[1] MOECKELR. ,SIMO C. Bifurcation of spatial central configurations from planar ones[J]. SIAM J Math Anal,1995,26:978-998.

[2] ALBOUY A. The symmetric central configuration of four equal masses[J]. Contemp Math,1996,198:131-135.

[3] FAYCAL N. On the classification of pyramidal central configurations[J]. Proc Amer Math Soc,1996,124:249-258.

[4] WINTNER A. Analytical foundations of celestial Mechanics[M]. Princeton: Combridge Unvi. Press, 1941.

[5] TIANCHENG O. XIE Z. ZHANG S. Pyramidal central configurations and perverse solutions[J]. Electron J Diff Eqns, 2004,106:1-9.

[6] ZHANG WEINIAN. On nulls of perturbed Fredholm operators and degenerate homoclinic bifurcations[J]. Science in China Ser A,2004,47:617-627.

The Planar and Spatial Central Configurations for N + 1-body Problem

ZHU Chang-rong[1,2], *LUO Guang-ping*[2]

(1. Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China;
2. College of Mathematics and Physics, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

Abstract: Discusses the relationship between central configurations and the vector fields which restrict on the unit mass ellitic balls. Based on the knowledge, authors obtain all planar and spatial pyramidal central configurations. Precisely, let N bodies locate on vertices of a regular N-gon, the (N + 1) st body lies on the vertical line which passing through the geometrical center of the N-gon. For any $N, N \geqslant 2$, the planar central configurations always exist. For non-planar case, there is a pair of spatial central configurations for $N \leqslant 472$, one is upward, the other is downward. And for $N \geqslant 473$, there is no any spatial central configurations.

Key Words: Central configurations; equilibrium; celestiol me chanies; dynamical system

(编辑 陈移峰)

(上接第95页)

Positive Solutions of a Kind of Special Nonlinear Neumann Boundary Value Problems

YAO Qing-liu

(Department of Applied Mathematics, Nanjing University of Finance and Economics, Nanjing 210003, China)

Abstract: The purpose of this paper is to consider a kind of special nonlinear Neumann boundary value problems. The kind of boundary value problems has not Green function. Using suitable transformation, we can change these problems to general Neumann boundary value problems. By applying integral equation and degree theory on cone, the existence of n positive solutions is proved for the kind of problems, where n is an arbitrary natural number.

Key words: second-order ordinary differential equation; Neumann boundary value problem; positive solution; existence; multiplicity

(编辑 张小强)