文章编号:1000-582X(2007)09-0096-03

N + 1 - 体问题的空间和平面中心构型

朱长荣[1,2],罗广萍[2]
(1. 四川大学 数学学院,四川 成都 610064;2. 重庆大学 数理学院,重庆 400030)

摘 要:研究了在单位质量椭球上的向量场与中心构型的关系,得到以正 N - 边形为基底的 N + 1 - 体问题构成的空间和平面中心构型。可以得到结论:对于任意的 $N, N\geqslant 2$,平面中心构型总是存在的;但对于空间中心构型,仅当 $N\leqslant 472$ 时存在一对中心构型,一个向上,另一个向下,而当 $N\geqslant 473$ 时就不存在非平面的中心构型。

关键词:中心构型;平衡解;天体力学;动力系统
中图分类号:O193;O301 **文献标志码**:A

1 引言及主要结果

N - 体问题描述的是 N 个质点在万有引力作用下的运动规律,这个规律可以由牛顿第二定律给出,它表现为一个二阶常微分方程组

$$m_j\ddot{q}_j = \frac{\partial U}{\partial q_j}, \qquad j = 1,2,\cdots,N, \tag{1}$$

$m_j \in R^+$, $q_j \in R^3$ 为质量和位置,牛顿势:$U(q) = \sum\limits_{1\leqslant j<k\leqslant N} \frac{m_j m_k}{|q_j - q_k|}$。

定义碰撞集:$\Delta = \cup \Delta_{jk}$,其中 $\Delta_{jk} = \{q = (q_1, q_2,\ldots,q_N) \in R^{3N} \mid q_j = q_k$,对 $j\neq k\}$。令 $X = \{q = (q_1, q_2,\ldots,q_N) \mid \sum m_j q_j = 0\}$,则 X/Δ 就是构型空间。

定义 一个构型 $q \in X/\Delta$ 称为中心构型,如果存在一个不依赖于质点的常数 λ,使得

$$M^{-1}\frac{\partial U}{\partial q} = \lambda q, \tag{2}$$

其中 $M = \mathrm{diag}(m_1, m_1, m_1, \cdots, m_N, m_N, m_N)$。对中心构型的研究可以追溯到 18 世纪,欧拉和拉格朗日分别发现三体问题的共线和等边三角形的中心构型。1995 年,Moeckel 和 Simo[1] 研究了由 2 个正 N - 边形套构成的所有平面和空间中心构型。假设放在内外层正 N - 边形各顶点上的 N 个天体质量分别全等,他们证明了对于任意的 $N, N\geqslant 2$,平面和空间的中心构型总是存在的;当 $N\leqslant 472$ 时存在一对中心构型,当 $N\geqslant 473$ 时空间的中心构型是从平面中心构型分岔而来。文中将研究具有对称结构的所有平面和空间的金字塔形的中心构型。令放在正 N - 边形的 N 个天体的质量都为 1,$m_{N+1} = m$,$\rho_j = e^{\frac{2\pi i j}{N}}$,$i^2 = -1$ 且

$$q_j = (r\rho_j,\ -mh/(N+m)),\ j = 1,\ldots,N,$$
$$q_{N+1} = (0, Nh/(N+m)), \tag{3}$$

现在可以给出文中的主要结果。

定理 1 对于任意的 $N, N\geqslant 2$,由这 $N+1$ 个天体构成的平面中心构型总是存在的。并且当 $N\leqslant 472$ 时,所有的中心构型都是汇;当 $N\geqslant 473$ 时,所有的中心构型都是源。

但对于空间中心构型,仅当 $N\leqslant 472$ 时存在一对非平面的中心构型,并且中心构型的高度不依赖于任意天体的质量;而当 $N\geqslant 473$ 时就不存在非平面的中心构型。

2 定理 1 的证明

从中心构型的定义,得到

$$M^{-1}\partial U/\partial q - \lambda q = 0, \tag{4}$$

假设把 $(M^{-1}\partial U/\partial q - \lambda q)$ 看作向量场,那么中心构型就是向量场 (4) 的平衡解。因而去寻找中心构型就

收稿日期:2007-05-17
基金项目:国家自然科学基金资助项目(0208002321018);重庆市自然科学基金资助项目(0208002433023)
作者简介:朱长荣(1973-),男,重庆大学讲师,博士,主要从事分岔理论和中心构型研究,(E-mail)zhuchangrong126@126.com。

等价于去研究向量场（4）的平衡解。在 R^{3N} 中引入：$<q,\tilde{q}> = q^{T}M\tilde{q}$。很容易证明，$<\cdot,\cdot>$ 可以是 R^{3N} 中的内积。又令单位质量椭球为

$$S = \{q \in X/\Delta: <q,q> = q^{T}Mq = 1\}。$$

引理 1　限制在单位质量椭球 S 上的向量场 $(M^{-1}\partial U/\partial q + U(q)q)$ 是梯度场 $U|_S$，其中 $U|_S$ 表示 $U(q)$ 在单位椭球 S 上的限制。还有，梯度场 $U|_S$ 的平衡点就是中心构型。

证明：牛顿势是 -1 次齐次式，因而 $DU(q)\cdot q = -U(q)$，由此有

$$< M^{-1}\partial U/\partial q + U(q)q,q > = (\partial U/\partial q)^{T}q + U(q) = 0, q \in S, \tag{5}$$

从式(5)知，在度量 $<q,q> = q^{T}Mq$ 下，向量场垂直于 S。对 $q\in S, v\in T_qS$，有

$$< M^{-1}\partial U/\partial q + U(q)q,v > = < M^{-1}\partial U/\partial q,v > = DU(q)\cdot v, \tag{6}$$

从方程（5）和（6）知，向量场 $(M^{-1}\partial U/\partial q + U(q)q)$ 就是梯度场。现在考虑，向量场 $(M^{-1}\partial U/\partial q + U(q)q)$ 与 $(M^{-1}\partial U/\partial q - \lambda q)$ 的关系。对于 $q\in S$，从式(2)，有 $\lambda = -U(q)$，即 $(M^{-1}\partial U/\partial q + U(q)q) = (M^{-1}\partial U/\partial q - \lambda q)$。因而中心构型的方程为

$$0 = (M^{-1}\partial U/\partial q - \lambda q) = M^{-1}\partial U/\partial q + U(q)q, q \in S, \tag{7}$$

由式(7)知道，梯度流 $(M^{-1}\partial U/\partial q + U(q)q)$ 的平衡点正是在 S 上的中心构型。

（注：用 Λ 表示由方程（3）定义的 $q_1,q_2,\ldots,q_{N+1}$ 构成的集合。从对称性，$U|_S$ 与 Λ 相切，因而 Λ 在 $U|_S$ 作用下是不变集。在 Λ 中发现中心构型就等价于去研究 $U|_\Lambda$ 的平衡点。）

从对称性知，令 $\tilde{q} = (r,h)$，$\tilde{M} = \mathrm{diag}(1, m/(N+m))$，令 $A(N) = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{N-1}\csc\frac{\pi j}{N}$，在度量和势函数中，去掉因子 N，椭球和势为

$$S = \{\tilde{q} \in R^{3N} \mid <\tilde{q},\tilde{q}> = \tilde{q}^{T}\tilde{M}\tilde{q} = r^2 + m/(N+m)h^2 = 1\}, \tag{8}$$

$$U(\tilde{q}) = \frac{1}{r}A(N) + Nm/(r^2+h^2)^{\frac{1}{2}}。 \tag{9}$$

在新参数坐标 $\tilde{q} = (r,h)$ 下，由引理 1 知道，梯度流所对应的微分方程为

$$\dot{r} = \left(1 - \frac{1}{r^2}\right)A(N) + rm(r^2+h^2-1)(r^2+h^2)^{-\frac{3}{2}}, \tag{10}$$

$$\dot{h} = \frac{h}{r}A(N) + (rm(r^2+h^2) - h(N+m))(r^2+h^2)^{-\frac{3}{2}}。 \tag{11}$$

引入参数 $x = h\cdot r^{-1}$ 来消除式(10)和(11)的相关性。则 $\dot{x} = r^{-2}(\dot{h}r - h\dot{r})$，引入变换 $t\leftrightarrow t\cdot r^{-3}$，$\Lambda$ 中的中心构型的方程是

$$f(x) := x(A(N) - N(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}) = 0。 \tag{12}$$

下面，将研究方程 $f(x)=0$ 的解。需要参考文献[3]中的一个引理。

引理 2　(Lemma 1[3]) γ 和 B_{2k} 常数，函数 $A(N)$ 可以展开成下面的展式：

$$A(N) = \frac{N}{2\pi}\left(\gamma + \log\frac{2N}{\pi}\right) + \sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^k(2^{2k-1}-1)B_{2k}^2\pi^{2k-1}}{2kN^{2k-1}(2k)!},$$

还有，$A(N)/N$ 是增函数，并且 $A(472)/472 \approx 0.9999$，$A(473)/472 \approx 1.0002$。

对平面中心构型，有下面的定理。

定理 2　对于任意的 $N, N\geq 2$，这 $N+1$ 个天体总存在平面中心构型。并且当 $N\leq 472$ 时，所有的中心构型都是汇；当 $N\geq 473$ 时，所有的中心构型都是源。

证明：应当知道，$x=0$ 就代表平面中心构型。从方程（12）知道，$x=0$ 总是 $f(x)=0$ 的解，因此平面中心构型总是存在的。并且在 $x=0$ 处的特征值为

$$\lambda(0) = \partial f/\partial x|_{x=0} = A(N) - N。 \tag{13}$$

注意到 $\lambda(0)>0$ $(\lambda(0)<0)$ 分别对应于平面中心构型是源（汇）。由引理 2 知道：

$$A(N) < N, \text{ 当 } N \leq 472 \text{ 时；}$$
$$A(N) > N, \text{ 当 } N \geq 473 \text{ 时。} \tag{14}$$

从式(13)和(14)，很容易完成本定理的证明。

对于空间中心构型，有以下的结论。

定理 3　当 $N\leq 472$ 时，存在一对非平面的中心构型，一个向上，另一个向下，并且金字塔的高不依赖于任意天体的质量。当 $N\geq 473$ 时，不存在非平面的中心构型。

证明：为了发现非平面的中心构型，去寻找当 $x\neq 0$ 时方程 $f(x)=0$ 的解，即

$$g(x) = A(N) - N(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} = 0, x \neq 0。 \tag{15}$$

因为在 $g(x)$ 中仅有 x^2 项，$g(x)=0$ 的解就总会是成对出现。方程(15)可解，当且仅当 $\left(\frac{N}{A(N)}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 \geq 0$。从引理 2 知，$\frac{N}{A(N)} \geq 1$ 等价于 $N\leq 472$。因而当 $N\leq 472$ 时，总存在一对非平面中心构型，这一对中心构型为 $x = \pm\left(\left(\frac{N}{A(N)}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right)^{\frac{1}{2}}$。

由引理2知,当$N \geqslant 473$时,方程(15)在实数域中不可解。证明完成。

从定理2和定理3,很容易完成定理1的证明。

致谢 感谢张世清教授和张伟年教授的关心和支持。

参考文献:

[1] MOECKELR. ,SIMO C. Bifurcation of spatial central configurations from planar ones[J]. SIAM J Math Anal,1995,26:978-998.

[2] ALBOUY A. The symmetric central configuration of four equal masses[J]. Contemp Math,1996,198:131-135.

[3] FAYCAL N. On the classification of pyramidal central configurations[J]. Proc Amer Math Soc,1996,124:249-258.

[4] WINTNER A. Analytical foundations of celestial Mechanics [M]. Princeton: Combridge Unvi. Press, 1941.

[5] TIANCHENG O. XIE Z. ZHANG S. Pyramidal central configurations and perverse solutions[J]. Electron J Diff Eqns, 2004,106:1-9.

[6] ZHANG WEINIAN. On nulls of perturbed Fredholm operators and degenerate homoclinic bifurcations[J]. Science in China Ser A,2004,47:617-627.

The Planar and Spatial Central Configurations for N + 1-body Problem

ZHU Chang-rong[1,2], *LUO Guang-ping*[2]

(1. Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China;
2. College of Mathematics and Physics, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

Abstract: Discusses the relationship between central configurations and the vector fields which restrict on the unit mass ellitic balls. Based on the knowledge, authors obtain all planar and spatial pyramidal central configurations. Precisely, let N bodies locate on vertices of a regular N-gon, the $(N+1)$st body lies on the vertical line which passing through the geometrical center of the N-gon. For any $N, N \geqslant 2$, the planar central configurations always exist. For non-planar case, there is a pair of spatial central configurations for $N \leqslant 472$, one is upward, the other is downward. And for $N \geqslant 473$, there is no any spatial central configurations.

Key Words: Central configurations; equilibrium; celestiol me chanies; dynamical system

(编辑 陈移峰)

(上接第95页)

Positive Solutions of a Kind of Special Nonlinear Neumann Boundary Value Problems

YAO Qing-liu

(Department of Applied Mathematics, Nanjing University of Finance and Economics, Nanjing 210003, China)

Abstract: The purpose of this paper is to consider a kind of special nonlinear Neumann boundary value problems. The kind of boundary value problems has not Green function. Using suitable transformation, we can change these problems to general Neumann boundary value problems. By applying integral equation and degree theory on cone, the existence of n positive solutions is proved for the kind of problems, where n is an arbitrary natural number.

Key words: second-order ordinary differential equation; Neumann boundary value problem; positive solution; existence; multiplicity

(编辑 张小强)