文章编号:1000-582X(2008)01-0115-04

带超强奇异积分的 Galerkin 边界元法

张玲玲[1],祝家麟[1],林　鑫[1],张守贵[2]王贵学[3]
(1 重庆大学 数理学院,重庆 400030;2 重庆师范大学,重庆 400000;3 重庆大学 生物工程学院,重庆 400030)

摘　要:当采用 Calderon 投影的第二个表达式的直接边界公式解 Laplace 方程的 Neumann 问题时,需求解含超强奇异性的第一类 Fredholm 积分方程。为了克服积分方程的奇异性,采用 Galerkin 边界元方法,利用广义函数的分部积分公式,把对积分核的两阶导数转移为未知边界量的旋度。对二维问题,采用线性单元时,边界旋度可离散为常向量,从而得到简单的计算公式,避免了超强奇异积分数值计算的困难。数值算例验证了这种方法的有效性和实用性。

关键词:Galerkin 边界元;超强奇异积分;Laplace 方程;Neumann 问题
中图分类号:O242　　文献标志码:A

Garlerkin Boundary Element Method with Hyper Singular integral kernel

ZHANG Ling-ling[1], *ZHU Jia-lin*[1], *LIN-xin*[1], *ZHANG Shou-gui*[2], *WANG Gui-xue*[3]
(1. College of Mathematics and Physics, Chongqing University, Chongqing 400030, P. R. China)
(2. College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, P. R. China)
(3. College of Bioengineer, Chongqing Normal University, Chongqing 400030, P. R. China)

Abstract: A Galerkin Boundary Elements was applied to solve the first kind of integral equation with hyper-singularity, which can be deduced from the direct boundary integral formula for the Neumann problem of Laplace equation. The concept of integration by parts in the sense of distributions was used. When boundary rotation is introduced, the two order derivatives of singular kernel are shifted to the boundary rotation of unknown function in the Galerkin variational formulation. While linear boundary elements are used for 2-dimensional problems, the boundary rotation on each element can be discretized into a constant vector, so that the integration can be performed in a simple way and the difficulty of numerical calculation for hyper-singularity is overcome. The results of numerical examples demonstrate that the scheme presented is practical and effective.

Key words: Garlerkin boundary element method; hyper singular integral; Laplace equation; Neumman problem

Laplace 方程的 Neumann 问题作为一类重要的椭圆边值问题,有广泛的运用背景。在可采用的多种边界积分公式中,当采用 Calderon 投影的第二个表达式的直接边界积分公式求解时, 将会导致含超强奇异积分的第一类 Fredholm 积分方程。为了克服积分的超强奇异性,笔者采用 Galerkin 边界元方法求解,以便利用广义函数的分部积分公式,将对奇异积分核的导数转化为未知函数的边界旋度,从而得到简单的计算公式。

收稿日期:2007-07-24
基金项目:国家科技部国际科技合作重点项目(2004DFA06400)
作者简介:张玲玲(1980-),女,重庆大学硕士研究生,主要从事边界元方法及应用的研究。
祝家麟(联系人),男,重庆大学教授,博士生导师,(E-mail)jlzhujl@hotmail.com。

1 边界积分方程及其变分形式

设 Ω 是 R^2 中具有边界 Γ 的单连通有界区域，Ω' 表示 $\overline{\Omega}=\Omega+\Gamma$ 在 R^2 中的补域。考虑如下 Laplace 方程的 Neumann 问题：

$$\begin{cases}\Delta u(x)=0;x\in\Omega\cup\Omega' \\ \left.\dfrac{\partial u(x)}{\partial n(x)}\right|_{\Gamma}=g(x);x\in\Gamma\end{cases},\tag{1}$$

由文献[1]知，若 $g(x)\in \overset{0}{H}{}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$，则问题(1)在 $H'(\Omega)$ 和 $W_0^1(\Omega')$ 中除相差一个常数 c 外 唯一确定的解。

该问题的解可用双层位势表示，也可用单层位势表示。本文采用直接边界积分表示：

$$u(x)=u_1(x)+u_2(x)+c。\tag{2}$$

其中

$$u_1(x)=-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}(\ln\frac{1}{|x-y|})\mathrm{d}s_y;$$

$$u_2(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}\ln(\frac{1}{|x-y|})\mathrm{d}s_y;$$

C 是一个常数。

对表达式两边求法向导数，即

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n_x}=\frac{\partial u_1(x)}{\partial n_x}+\frac{\partial u_2(x)}{\partial n_x}。\tag{3}$$

设法向始终自 Ω 指向 Ω'。

对外边值问题，当 x 由 Ω 外趋向边界 Γ 时，可得到如下表达式：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}u(y)\frac{\partial^2}{\partial n_x\partial n_y}\ln(\frac{1}{|x-y|})\mathrm{d}s_y=\frac{1}{2}g(x)+\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}g(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\ln(\frac{1}{|x-y|})\mathrm{d}s_y。\tag{4}$$

对内边值问题，当 x 由 Ω 内趋向边界 Γ 时，可得到如下表达式：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}u(y)\frac{\partial^2}{\partial n_x\partial n_y}\ln(\frac{1}{|x-y|})\mathrm{d}s_y=-\frac{1}{2}g(x)+\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}g(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\ln(\frac{1}{|x-y|})\mathrm{d}s_y。\tag{5}$$

以外问题为例，用 Galerkin 方法求解这个第一类 Fredholm 积分方程，其变分公式是

$$a(u,v)=f(v);\quad \forall v\in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)/p_0。\tag{6}$$

其中

$$a(u,v)=-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\int_{\Gamma}u(y)v(x)\frac{\partial^2}{\partial n_x\partial n_y}\ln\frac{1}{|x-y|}\mathrm{d}s_x\mathrm{d}s_y$$

$$f(v)=\frac{1}{2}\int_{\Gamma}g(x)v(x)\mathrm{d}s_x+\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\int_{\Gamma}g(y)v(x)\frac{\partial}{\partial n_x}\ln\frac{1}{|x-y|}\mathrm{d}s_y\mathrm{d}s_x。$$

该方程左端的积分核是超强奇异的，不可直接计算，不过根据广义函数的分部积分公式。可以把对奇异积分核的导数转化为未知边界量的旋度. 为了实现这一转化，根据文献[2]用于三维问题的方法，引进基于边界旋度的变分公式，把变分方程转化为另一种形式。

2 基于边界旋度的等价变分方程

定义1 对于定义在曲线 Γ 的开邻域 Γ_δ 上的所有可微函数 $u(x)$，定义其正交于边界曲线所在的平面的向量场为：

$$\mathbf{rot}_{\Gamma}u(x)=\mathrm{grad}\tilde{u}(x)\times\boldsymbol{n}_x\ \tilde{u}(x)=u(p(x)),\quad x\in\Gamma_\delta,\ p(x)\in\Gamma.$$

其中 $\boldsymbol{n}_x$ 是过 x 点的 Γ 上的法向量，grad 是定义在 Γ 的开邻域 Γ_δ 上的梯度算子。p 是由 Γ_δ 到 Γ 的投影算子。

设 $u(x)$，$v(x)$ 二阶可微，由文献[1-2]知双线性形式 $a(u,v)$ 等价于

$$\int_{\Omega}\nabla u\cdot\nabla v dx=\int_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial n}v\mathrm{d}s=\int_{\Gamma}\frac{\partial v}{\partial n}u\mathrm{d}s,$$

$$\int_{\Omega'}\nabla u\cdot\nabla v dx=-\int_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial n}v\mathrm{d}s=-\int_{\Gamma}\frac{\partial v}{\partial n}u\mathrm{d}s。$$

基于文献[6]的推演，对外问题

$$a(u,v)=-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\int_{\Gamma}\ln\frac{1}{|x-y|}\mathbf{rot}_{\Gamma}u(y)\cdot\mathbf{rot}_{\Gamma}v(x)\mathrm{d}s_x\mathrm{d}s_y。$$

从而得到基于边界旋度的等价变分方程

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\int_{\Gamma}\ln\frac{1}{|x-y|}\mathbf{rot}_{\Gamma}u(y)\cdot\mathbf{rot}_{\Gamma}v(x)\mathrm{d}s_x\mathrm{d}s_y=\frac{1}{2}\int_{\Gamma}g(x)v(x)\mathrm{d}s_x+\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\int_{\Gamma}g(y)v(x)\frac{\partial}{\partial n_x}\cdot\ln\frac{1}{|x-y|}\mathrm{d}s_y\mathrm{d}s_x。\tag{7}$$

3 边界积分方程的数值解法

为了数值求解边界积分方程(7)，将边界 Γ 离散为 N 个线性单元，从而把边界积分方程转化为线

性代数方程组进行求解。设

$$\varphi_i = \begin{cases} \dfrac{x - x_i}{l_i}, x \in \Gamma_i = [x_i, x_{i+1}]; \\ \dfrac{x_{i+2} - x}{l_{i+1}}, x \in \Gamma_{i+1} = [x_{i+1}, x_{i+2}]; \\ 0,\text{其它。} \end{cases}$$

为插值基函数,l_i 为单元长度,

令

$$u(x) = \sum_{i=1}^{N} u_i \varphi_i(x)。\tag{8}$$

u_i 为节点 i 处待定值。把式(8)代入变分方程(7),并依次选 $v(x)$ 为 φ_j

则得到

$$\sum_{i=1}^{N} a_{ij} u_i = b_j。$$

其中

$$a_{ij} = -\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_i+\Gamma_{i+1}} \mathbf{rot}_\Gamma \varphi_i \left(\int_{\Gamma_i+\Gamma_{i+1}} \ln \frac{1}{|x-y|} \cdot \mathbf{rot}\varphi_j \mathrm{d}s_x \right) \mathrm{d}s_y$$

$$(i = 1,2,\cdots,N; j = 1,2,\cdots,N)。$$

$$b_j = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_j+\Gamma_{j+1}} g(x)\varphi_j \mathrm{d}s_x +$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_j+\Gamma_{j+1}}\int_{\Gamma_i+\Gamma_{i+1}} g(y)\,\frac{\partial}{\partial n_x}\ln\frac{1}{|x-y|}\varphi_j \mathrm{d}s_x \mathrm{d}s_y,$$

$(j = 1,2,\cdots,N)$(注意,当 $i = N$ 时,$\Gamma_1 = \Gamma_N$)。

由于采用线性单元离散。在每个单元上,$\mathbf{rot}_\Gamma \varphi_j$ 是常向量,表达为:

$$\mathrm{rot}_\Gamma \varphi_j = \begin{cases} -\dfrac{1}{l_i}\boldsymbol{k}, x \in \Gamma_i; \\ \dfrac{1}{l_{i+1}}\boldsymbol{k}, x \in \Gamma_{i+1}; \\ 0,\text{其它。} \end{cases}$$

$\boldsymbol{k}$ 是正交于曲线所在平面的单位向量。

把线性代数方程组写成矩阵形式

$$\boldsymbol{AU} = \boldsymbol{B}。$$

其中

$$\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{N\times N}, \boldsymbol{U} = [u_j]_{N\times 1}, \boldsymbol{B} = [b_j]_{N\times 1}$$

计算系数矩阵元素,在求二重积分时,第一重积分可采用精确积分,第二重积分采 Gauss 数值积分。为解析计算第一重积分,本文引进图 1 所示的局部坐标系。用 $\boldsymbol{r}$ 在沿单元走向的单位向量 $\boldsymbol{m}$ 上的投影 s 作为积分变量,则可得出下面的计算公式

$$\int \ln\frac{1}{r} d_\Gamma = \int_{s_1}^{s_2} \ln\frac{1}{\sqrt{s^2+d^2}}\mathrm{d}s =$$

$$\left(l - s_2\ln r_2 + s_1 \ln r_1 - d\left(arctg\frac{s_2}{d} - arctg\frac{s_1}{d}\right)\right)。$$

计算右端项时在两个相邻的单元上分别要用以下两个积分公式

$$\int_\Gamma \frac{s-s_1}{l}\frac{\cos((x-y),n_x)}{|x-y|}\mathrm{d}s = \frac{d}{l}(\ln r_2 - \ln r_1) -$$

$$\frac{s_1}{l}\left(arctg\frac{s_2}{d} - arctg\frac{s_1}{d_1}\right),$$

$$\int \frac{s_2 - s}{l}\frac{d}{r^2}\mathrm{d}s = -\frac{d}{l}(\ln r_2 - \ln r_1) +$$

$$\frac{s_2}{l}\left(\mathrm{arctg}\frac{s_2}{d} - \mathrm{arctg}\frac{s_1}{d}\right)。$$

其中 d 为场点到积分单元 P_1P_2 的距离,r_1 为场点到单元端点 P_1 的有向线段 $\boldsymbol{r}_1$ 长度,r_2 为场点到单元端点 P_2 的有向线段 $\boldsymbol{r}_2$ 长度,s_1 为有向线段 $\boldsymbol{r}_1$ 在 P_1P_2 上的投影,s_2 为有向线段 $\boldsymbol{r}_2$ 在 P_1P_2 上的投影,都是分别在两个相邻单元上各自计算的。

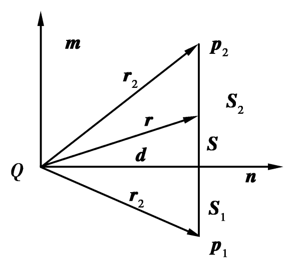

图 1　局部坐标系

4　数值算例

算例 1[5]

设 $\Omega = \{(x,y) | x^2 + y^2 \geqslant 1\}$ 为单位圆外部区域,Γ 为其边界;$u = \dfrac{1}{r^2}\cos(2\theta) = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)}$ 为 Ω 内的调和函数 其边界条件是

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = 2\cos\theta = 2x^2 - 2y^2。$$

利用本文编制的通用程序进行计算,单位圆外若干点的计算值与精确值的比较,结果见表 1。

表 1 计算结果

r	近似解				精确解
	16	32	64	128	
1.5	0.419 858 5	0.438 342 4	0.442 932 5	0.444 068 7	0.444 444 4
3.0	0.105 249 2	0.109 658 3	0.110 751 1	0.111 021 7	0.111 111 1
5.0	0.038 139 42	0.039 539 02	0.039 885 76	0.039 997 16	0.040 000 0
7.0	0.019 650 09	0.020 220 49	0.020 361 67	0.020 396 75	0.020 408 16
9.0	0.012 041 39	0.012 270 35	0.012 326 93	0.012 341 17	0.012 345 68
12.0	0.006 944 098	0.006 944 398	0.006 944 44	0.006 944 91	0.006 944 44

考查表 1 中的结果可以发现函数 u 的误差 $E(u)$ 与单元长度 h（$h=\frac{2\pi}{N}$，N 单元数目），有如下关系式

$$E(u) = 0(h^2)。$$

事实上，见图 2，我们采用拟合曲线的方法，得到 $\ln E(u)$ 与 $\ln h$ 的线性关系。该直线斜率略为 2。

即：

$$\ln E(u) \approx 2\ln h + \ln(\alpha)。$$

其中 $\ln(\alpha)$ 为一个常数。

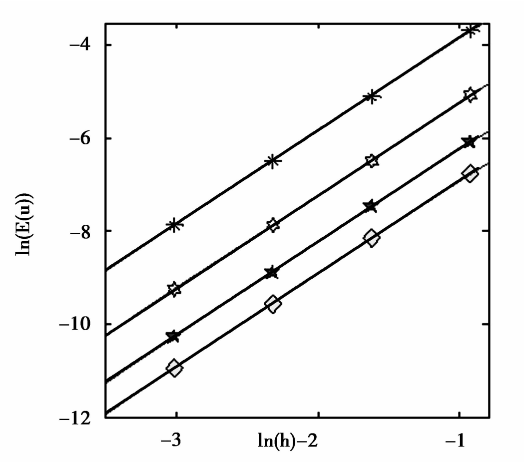

图 2 $E(u)$ 随剖分单元 h 变化情况

这个算例说明：笔者提出的方法对外问题是适用的，且从误差与单元剖分的关系看收敛阶大约 2。并且与文献[6]中用双层位势解得到的结果相比较本文所得到的结果要更好一些。

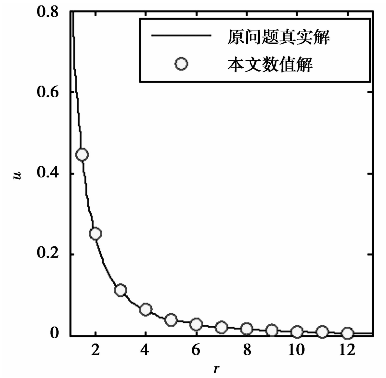

图 3 u 随 r 变化情况

笔者所编制的程序对内边值问题也是适用的，只要注意一下(4)、(5)、(6)式中涉及到法向导数的项的符号。

参考文献：

[1] 祝家麟. 椭圆边值问题的边界元分析[M]. 北京：科学出版社，1991.

[2] NEDELEC J C. Equations integral, Chapitre XI[C]//Analyse mathematique et calcul numerique pour les sciences et les technique. Masson，1984-1985：666-678.

[3] BREBBIA C A. The boundary element method for engineers[M]. London：Pentech Press，1978.

[4] 余德浩. 自然边界元法的数学理论[M]. 北京：科学出版社，1993.

[5] 张守贵，祝家麟，董海云. 用双层位势求解二维调和方程的 Neumann 外边值问题的 Garlerkin 边界元解法[J]. 重庆大学学报：自然科学版，2006. 29(4)：122-125.
ZHANG SHOU-GUI, ZHU JIA-LIN, DONG HAI-YUN. Galerkin boundary element method for two-dimension laplace equation of neumman condition [J]. Journal of Chongqing University：Natural Science Edition，2006，29(4)：122-25.

[6] 李开泰，黄艾香. 张量分析极其应用[M]. 西安：西安交通大学出版社，1984.

（编辑 张小强）