

文章编号:1000-582X(2008)08-0881-04

光栅参数与小波谱值的关系

印 勇¹, 田逢春¹, 陈 梨²

(1. 重庆大学 通信工程学院, 重庆 400030; 2. 重庆通信学院, 重庆 400030)

摘 要: 推导了光栅参数与小波频谱值之间的数学关系。采用矢量衍射理论和标量衍射理论两种方法分别计算光栅的衍射效率, 并分析两者近似相等的条件, 导出光栅参数和小波谱值的关系。以墨西哥帽小波为例计算平面透射光栅的狭缝宽度, 获得平面透射光栅参数、衍射效率和墨西哥帽小波谱值的关系。

关键词: 衍射光栅; 小波变换; 谱分析; 衍射效率; 光学小波

中图分类号: TN247

文献标志码: A

Relationship between grating parameters and wavelet spectrum values

YIN Yong¹, TIAN Feng-chun¹, CHEN Li²

(1. College of Communication Engineering, Chongqing University, Chongqing 400030, P. R. China;

2. Chongqing Communication Institute, Chongqing 400030, P. R. China)

Abstract: The relationship between grating parameters and wavelet spectrum values was deduced. Firstly, the vector diffraction theory and scalar quantity diffraction theory were used to calculate the diffraction efficiency. The approximately equal conditions were analyzed next. Finally, the relationship was obtained. The gap width of the plane transmission grating was calculated with the Mexico-hat wavelet. The relationship among the parameters of the plane transmission grating, diffraction efficiency and Mexico-hat wavelet values was obtained.

Key words: diffraction gratings; wavelet transforms; spectrum analysis; diffraction efficiency; optical wavelet

近年来,伴随着视觉领域和图形图像处理领域的大量信息处理的需要,采用光学方法实现小波变换的重要性已经被人们所认识。用光学方法实现小波变换具有并行性和高速实时性的特点,已在模式识别、图像边缘增强和特征提取等方面得到应用^[1-5]。小波变换与日趋成熟的光学信息处理技术的结合,必将为信息处理领域带来新的突破。

在典型的光学 $4f$ 系统的谱面上加滤波片是实现光学小波变换的常用方法。目前常采用胶片、全息图等方法制作滤波片^[2-5],但精度并不高。由于光

在传播过程中遇到障碍物如狭缝(狭缝须很小)时,波阵面受到限制,受限后的传播情况可以看作是此时狭缝处光波在各点的权重重新分配,即狭缝对光波的波阵面进行滤波。而光栅是由等间隔的狭缝组成,或者能够等间隔地分割波阵面,所以可以采用光栅方式制作滤波片,实现光学小波变换。因为光栅只由狭缝和遮挡物组成,相当于只有黑白两种灰度的二值图像,是典型的数字化系统,其加工难度较小,可以获得较高的精度。

由于光栅刻线宽度是由处于该点的小波频谱值

收稿日期:2008-03-08

基金项目:国家自然科学基金资助项目(60472037)

作者简介:印勇(1963-),男,重庆大学副教授,博士,主要从事图像信息处理,光学小波变换方向研究,

(E-mail)yy@ccee.cqu.edu.cn.

欢迎访问重庆大学期刊网 <http://qks.cqu.edu.cn>

决定,因此,采用光栅方式实现光学小波变换的关键是要找出光栅参数与小波频谱值之间的数学关系,并以此为根据来设计光栅。采用矢量衍射理论和标量衍射理论两种方法计算光栅的衍射效率,并分析两者近似相等的条件,导出光栅参数和小波谱值的关系。以墨西哥帽小波为例进行仿真计算和分析,获得平面透射光栅与墨西哥帽小波谱值的关系,为采用光栅方式实现光学小波变换奠定基础。

1 光栅衍射角度

图1表示的是由多个狭缝组成的平面光栅,透光部分(狭缝宽)为 b ,不透光部分为 a ,光栅周期 $d=a+b$ 。波长为 λ 的光以与光栅法线夹 θ_i 的方向入射到光栅上,发生了衍射。一部分衍射光透过光栅,到达折射率为 n_2 的透射区,衍射角为 u_k^t 。其中 u_k^t 的下标 k 表示衍射级次,上标 t 表示透射。这样的衍射满足下列关系

$$n_1 \sin\theta_i + n_2 u_k^t = \frac{k\lambda}{d} \quad (1)$$

另一部分衍射光发生反射,反射区的折射率为 n_1 ,衍射角 u_k^r 。其中 u_k^r 的上标 r 表示反射。这样的衍射满足下列关系

$$n_1 \sin\theta_i + n_1 u_k^r = \frac{k\lambda}{d} \quad (2)$$

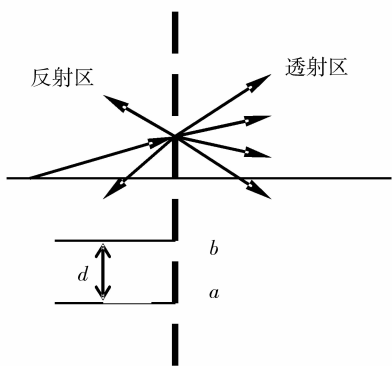


图1 光束经过光栅的衍射示意图

在一般情况下,光经过光栅前后的区域都是空气,此时 $n_1 = n_2 = 1$ 。所以式(1)、(2)写为

$$\sin\theta_i + u_k^t = \frac{k\lambda}{d} \quad (3)$$

$$\sin\theta_i + u_k^r = \frac{k\lambda}{d} \quad (4)$$

因此,如果知道了入射光的波长,光栅的周期以及入射角大小,就可以求出光经过光栅后各级衍射角的大小。

2 光栅衍射效率

就平面透射光栅而言,光栅刻线宽度由该处的小波频谱决定。刻线宽度与小波频谱值的比率是非线性的,可由光栅的衍射效率计算出来。光栅各级衍射效率定义为:某级衍射光束的能量大小与入射到光栅上的光束能量和之比。用公式表达为

$$\eta_k = \frac{I_k}{I_i} \quad (5)$$

其中: k 为某衍射级次; i 表示入射; I_k 为 k 级衍射光束的能量; I_i 为入射到光栅上的光束能量。

2.1 矢量衍射理论计算光栅衍射效率

光波是一种电磁波,通常把电场强度矢量称为光矢量^[6]。根据电磁场理论,当电场平行于光栅刻槽入射时(如图2所示),入射电场表示为

$$\vec{E}^i = E^i \exp[i\Omega(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)] \quad (6)$$

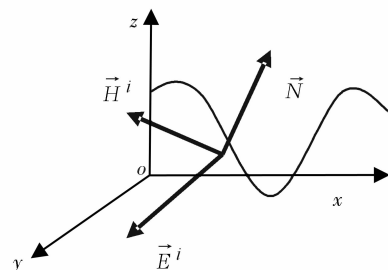


图2 电场平行光栅刻槽入射时,电场、磁场和入射波的方向

反射衍射波和透射衍射波由一系列谐波(各级衍射波)叠加而成,分别为

$$\vec{E}^r = \sum_{k=-K}^K \vec{E}_k^r \quad (7)$$

$$\vec{E}^t = \sum_{k=-K}^K \vec{E}_k^t \quad (8)$$

各级衍射波表示为

$$\vec{E}_k^r = E_k^r \exp[i\Omega(xu_k^r + z\omega_k^r)] \quad (9)$$

$$\vec{E}_k^t = E_k^t \exp[i\Omega(xu_k^t + z\omega_k^t)] \quad (10)$$

其中: $\Omega = \frac{2\pi}{\lambda}$ 为空间频率; λ 表示入射波长; θ_i 表示入射角; k 表示衍射级次; r 表示反射; t 表示透射; u_k, ω_k 表示衍射波的方向余弦。

根据边界条件:在没有电流的分界面上,电场和磁场的切向分量是连续的,那么有

$$\vec{E}^i + \sum_{k=-K}^K \vec{E}_k^r = \sum_{k=-K}^K \vec{E}_k^t \quad (11)$$

其中 $K = \left\lfloor \frac{d}{\lambda} \right\rfloor$ 表示衍射的最高级次。

设光栅各级衍射光能量为 I_k , 那么

$$I_k^r = |E_k^r|^2, \\ I_k^t = |E_k^t|^2.$$

在典型的光学 4f 系统中假设采用平面透射光栅作为滤波片。如果制作光栅的材料性能很好,当光入射到透射光栅上时,所有的衍射光都是透射的,没有衍射光反射回来,所以各 $E_k^r=0$ 。根据式(11),得到平面透射光栅的各级衍射电场

$$\vec{E}^i = \sum_{k=-K}^K \vec{E}_k^t. \quad (12)$$

当用单位振幅平面波垂直照射光栅时,光栅各级衍射效率为

$$\eta_k = I_k^t = |E_k^t|^2. \quad (13)$$

2.2 标量衍射理论方法计算光栅衍射效率

能引起衍射的障碍物称为衍射屏。显然,光栅是一种衍射屏。设光栅透过率系数为 $t(x)$, 频谱函数为 $T(\xi)$ 。

在图 3 中, θ_k 是透射光栅衍射的第 k 级衍射角, f 表示焦距, x 表示空间位置。当用单位振幅的平面波垂直照射光栅时, $\sin\theta_i = 0$ 。所以

$$u_k^i = \sin\theta_k = \frac{k\lambda}{d} \approx \tan\theta_k = \frac{x}{f}. \quad (14)$$

又因为 $\xi = \frac{x}{\lambda z} = \frac{x}{\lambda f}$, 所以

$$\xi = \frac{k}{d}. \quad (15)$$

所以,衍射效率^[7]

$$\eta_k = |T(\xi)|^2 = \left| T\left(\frac{k}{d}\right) \right|^2. \quad (16)$$

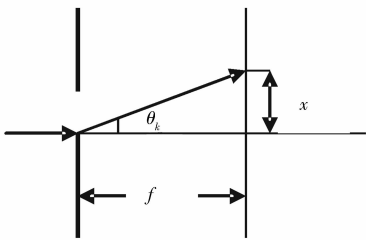


图 3 衍射角的另一种描述

如果满足以下条件,那么用标量衍射理论得出的计算衍射效率的式(16)近似地等于用矢量衍射理论得出的计算衍射效率的式(13)^[8]。

- 1) 光栅介质较薄,光栅条纹密度较小;
- 2) 光栅的衍射级次足够多,所以

$$\eta_k = |T(\xi)|^2 = \left| T\left(\frac{k}{d}\right) \right|^2 = |E_k^t|^2. \quad (17)$$

3 光栅参数与小波频谱值之间的关系

设平面透射光栅的光栅周期为 d , 每个周期内的透光部分长度为 b_m , m 表示第 m 个周期,假设共有 M 个周期。用小波函数表示光栅的透射系数为 $t(x)$, 相应的频谱为 $T(\xi)$ 。

式(12)变为^[10]

$$\sum_{k=-K}^K \frac{\sin\left[\frac{b_m(\nu+k)\pi}{d}\right]}{(\nu+k)\pi} \exp(i\pi \frac{b_mk}{d}) E_k^t = \frac{\sin(\frac{b_m\nu}{d}\pi)}{\nu\pi}. \quad (18)$$

一般来说,作为光栅透射系数的小波函数是实函数,所以由式(17)得

$$T(\xi) = T\left(\frac{k}{d}\right) = E_k^t. \quad (19)$$

将式(19)代入式(18),得到

$$\sum_{k=-K}^K \frac{\sin\left[\frac{b_m(\nu+k)\pi}{d}\right]}{(\nu+k)\pi} \exp(i\pi \frac{b_mk}{d}) T\left(\frac{k}{d}\right) = \frac{\sin(\frac{b_m\nu}{d}\pi)}{\nu\pi}. \quad (20)$$

式(20)表明了光栅参数与小波谱值之间的数学关系。

4 计算与仿真分析

一般地,希望小波具有以下特性:1)光滑性,以获得较好的压缩图像的视觉特性;2)紧支性,以适应快速运算;3)尽量使小波频域为实函数。

因为光栅是只有透光和不透光的二值元件,无法表示相位,所以在仿真时,应首选频域为实函数的小波。结合前两个条件,选择墨西哥帽小波,它具有比较好的能量集中性。

用单位振幅平面波照射光栅。以一维墨西哥帽小波 $t(x) = (1-x^2)\exp(-0.5x^2)$ 为例,用 Matlab 来进行计算和仿真。

一维墨西哥帽的小波谱为

$$T(\xi) = \sqrt{2\pi}\xi^2 \exp(-0.5\xi^2). \quad (21)$$

由于衍射光场的分布是对称的,即 $E_k^t = E_{-k}^t$, 因此,由式(18)得

$$\sum_{k=1}^K \left\{ \frac{\sin\left[\frac{b_m(\nu+k)\pi}{d}\right]}{(\nu+k)\pi} \exp(i\pi \frac{b_mk}{d}) E_k^t + \frac{\sin\left[\frac{b_m(\nu-k)\pi}{d}\right]}{(\nu-k)\pi} \exp(i\pi \frac{-b_mk}{d}) E_{-k}^t \right\} + \frac{\sin(\frac{b_m\nu}{d}\pi)}{\nu\pi} E_0^t = \frac{\sin(\frac{b_m\nu}{d}\pi)}{\nu\pi}. \quad (22)$$

所以

$$2 \sum_{k=1}^K \frac{\sin[\frac{b_m(\nu+k)}{d}\pi]}{(\nu+k)\pi} \cos(\frac{b_m}{d}k\pi) E_k^i + \frac{\sin(\frac{b_m\nu}{d}\pi)}{\nu\pi} E_0^i = \frac{\sin(\frac{b_m\nu}{d}\pi)}{\nu\pi} \quad (23)$$

现在结合式(23)、(13)进行计算仿真,仿真结果如图4。

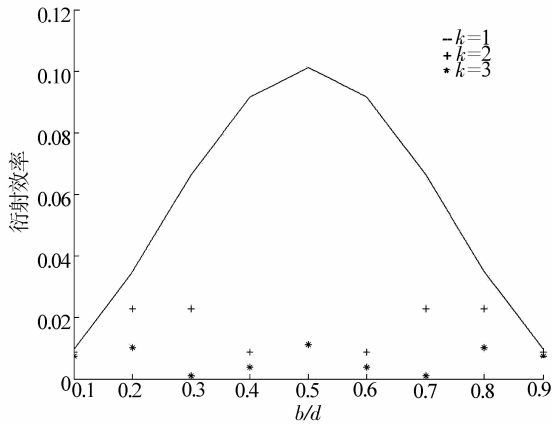


图4 不同衍射级次下透光比与衍射效率的关系 ($d=5 \mu\text{m}$)

由图4可以看出,1级衍射效率最高。当处于1级和3级衍射时, $b/d=0.5$ 时衍射效率最高。当处于2级衍射时, b/d 在 $[0,1]$ 间靠近两头取值时,衍射效率高于在 $[0,1]$ 中间取值。

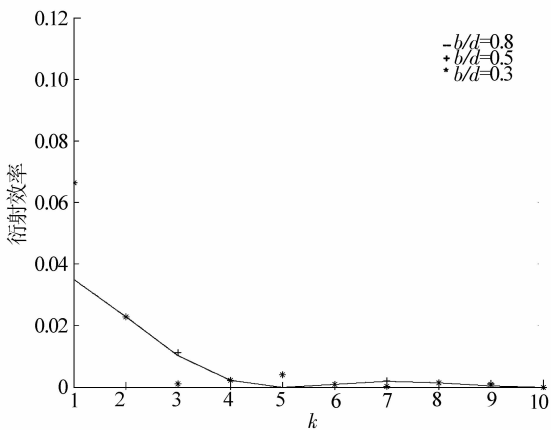


图5 不同透光比时衍射级次与衍射效率的关系 ($d=5 \mu\text{m}$)

图5为不同透光比时衍射级次与衍射效率的关系曲线。可以看出,1级衍射效率最高。级次越高,衍射效率越低。衍射级次不同时, b/d 取不同的值使衍射效率达到最高。例如,当处于1级和3级衍射时, $b/d=0.5$ 时衍射效率最高。当处于2级衍射

时, $b/d=0.8$ 时衍射效率最高。

根据式(19)得到墨西哥帽小波小波谱值与平面透射光栅狭缝宽度的关系如图6所示。

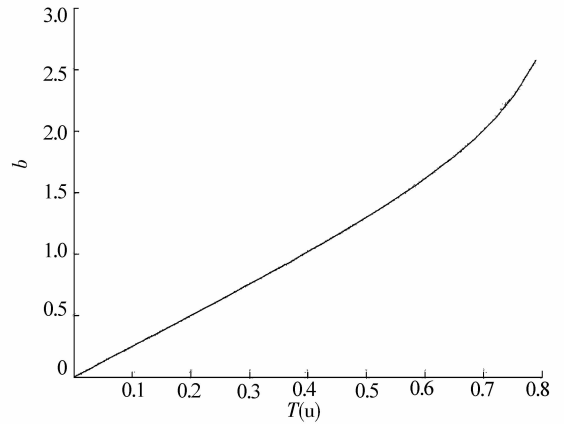


图6 小波谱值与光栅狭缝宽度的关系

从图6可以看出,小波谱值与平面透射光栅狭缝宽度符合反正弦的关系。

5 结论

采用矢量衍射理论和标量衍射理论两种方法计算光栅的衍射效率,并分析两者近似相等的条件,导出了光栅参数和小波谱值的关系。用 Matlab 计算由墨西哥帽小波谱值得到的平面透射光栅的缝宽,并仿真光栅参数、衍射效率和小波谱值的关系。从仿真结果看出平面光栅的一级衍射效率最大,光栅狭缝宽度与小波谱值之间符合反正弦关系。

参考文献:

- [1] SHENG Y L, ROBERGE D, SZU H H. Optical wavelet transform[J]. Optical Engineering, 1992, 31(9): 1840-1845.
- [2] WANG W L, JIN G F, YAN Y B, et al. Image feature extraction with optical Haar wavelet transform [J]. Optical Engineering, 1995, 34(4): 1238-1242.
- [3] BLOCK P Q, ROGERS S K, RUCH D K. Optical wavelet transform from computer-generated holography[J]. Applied Optics, 1994, 33(23): 5275-5278.
- [4] 陈鹤鸣,施伟华,贾小兵. 用计算全息制作改进的 Mexican-hat 子波匹配滤波器实现二维光学子波变换[J]. 中国激光, 1999, 26(5): 420-424.

CHEN HE-MING, SHI WEI-HUA, JIA XIAO-BING. Realization of 2D optical wavelet transform using a Mexican hat wavelet matched filter modified by computer generated holography[J]. Chinese Journal of Lasers, 1999, 26(5): 420-424.

(下转第 896 页)

- separation, and data processing strategy [J]. GPS Solutions, 2005, 9(3): 212-215.
- [12] BOUVETA D, FROUMENTINB M, GARCIA G. A real-time localization system for compactors [J]. Automation in Construction, 2001, 10(4): 417-428.
- [13] PEYRET F, BETAILLE D, HINTZY G. High-precision application of GPS in the field of real-time equipment positioning[J]. Automation in Construction, 2000, 9(3): 299-314.
- [14] ROH T H, SEO D J, LEE J C. An accuracy analysis for horizontal alignment of road by the kinematic GPS/GLONASS combination [J]. KSCE Journal of Civil Engineering, 2003(7): 73-79.
- [15] HU G R, KHOO H S, GOH P C. Development and assessment of GPS virtual reference stations for RTK positioning [J]. Journal of Geodesy, 2003(5): 292-302.

(编辑 张 苹)

(上接第 884 页)

- [5] 谢嘉宁, 陈伟成, 赵建林, 等. 光学小波变换在图像边缘特征提取中的应用[J]. 佛山科学技术学院学报, 2004, 22(1): 12-15, 40.
- XIE JIA-NING, CHEN WEI-CHENG, ZHAO JIAN-LIN, et al. Applications of the optical wavelet transform to the edge detection of images[J]. Journal of Foshan University, 2004, 22(1): 12-15, 40.
- [6] 黄婉云. 傅里叶光学教程[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 1985.
- [7] 金国藩. 二元光学[M]. 北京: 国防工业出版社, 1998.
- [8] 殷庆琰. 傅里叶方法分析光栅衍射效率特性[J]. 苏州教育学院学报, 2003, 20(2): 73-76.
- YIN QING-YAN. Analysis of properties of grating diffraction efficiency with Fourier method[J]. Journal of Suzhou College of Education, 2003, 20(2): 73-76.
- [9] MENDLOVIC D, OUZIELI I, KIRYUSCHEV I, et al. Two-dimensional wavelet transform achieved by computer-generated multireference matched filter and Dammann grating[J]. Applied Optics, 1995, 34(35): 8213-8219.
- [10] 陈梨. 用光栅法实现光学小波滤波器[D]. 重庆: 重庆大学通信工程学院, 2006.
- [11] 周慧君, 王取泉. 闪耀光栅的二元近似结构[J]. 光学与光电技术, 2005, 3(3): 39-40.
- ZHOU HUI-JUN, WANG QU-QUAN. Binary approximate structure of blazed grating[J]. Optics & Optoelectronic Technology, 2005, 3(3): 39-40.
- [12] 谢嘉宁, 陈伟成, 赵建林, 等. Matlab 在光学信息处理仿真实验中的应用[J]. 物理实验, 2004, 24(6): 23-28.
- XIE JIA-NING, CHEN WEI-CHENG, ZHAO JIAN-LIN, et al. Application of Matlab in simulated optical information processing experiments [J]. Physics Experimentation, 2004, 24(6): 23-28.
- [13] MOREOLO M S, CINCOTTI G, NERI A. Synthesis of optical wavelet filters [J]. IEEE Photonics Technology Letters, 2004, 16(7): 1679-1681.
- [14] WANG Y Z, MA L, SHI S X. An optical method for production of Haar wavelet [J]. Optics Communications, 2002, 204(1-6): 107-110.
- [15] SALAZAR A, GOEZ R, SIERRA D, et al. Optical wavelet correlator by four-wave mixing via reflection holograms in a BSO crystal [J]. Optics Communications, 2004, 239(4-6): 287-296.

(编辑 赵 静)