

文章编号:1000-582X(2009)02-0207-05

# 污染环境中赤潮非线性动力学模型的稳定性分析

张丽萍<sup>a,b</sup>, 王惠南<sup>b</sup>

(1. 南京航空航天大学 a. 理学院; b. 自动化学院, 江苏 南京 210016)

**摘要:** 基于污染环境中两种释放毒素的赤潮藻类和一种浮游动物的相互作用, 考虑外界污染源排放毒素和浮游植物排放毒素, 建立赤潮藻类离散时滞非线性动力学模型。运用非线性动力学理论分析了模型的稳定性及分岔行为, 得到每个种群生存和绝灭的阈值, 以及时滞和内禀增长率增加时, 会发生一系列 Hopf 分岔。最后通过计算机模拟验证理论的正确性。

**关键词:** 毒素; 赤潮; 污染环境; 时滞; 稳定性; 分岔

中图分类号: P76

文献标志码: A

## Stability of a nonlinear red tide dynamic model in a polluted environment

ZHANG Li-ping<sup>a,b</sup>, Wang Hui-nan<sup>b</sup>

(a. College of Science; b. College of Automation Engineering, NUAA,  
Nanjing 210016, P. R. China)

**Abstract:** We develop a nonlinear red tide dynamic model to study the effect on a system of two harmful phytoplankton and zooplankton and of a toxicant emitted into the environment from external sources and a toxin excreted by phytoplankton. We use modern nonlinear dynamics to discuss stability and bifurcation, and obtain the thresholds of persistence and extinction for each species. Numerical simulations are used to validate the theoretical results. The results show that a sequence of Hopf bifurcations occur at the interior equilibrium as the delay increases or the growth rates increase.

**Key words:** toxicant; red tide; pollution environment; delay; stability; bifurcation

赤潮是由于海洋富营养化导致赤潮藻类异常繁盛的自然现象, 对赤潮成因的研究是中国海洋当前重大的环境问题之一。目前国内对于赤潮形成机理的研究多侧重于实验分析, 运用统计回归方法进行相关性分析, 对赤潮的数学模型研究, 一般是关于水动力学三维数值研究<sup>[1]</sup>, 而有关海洋中藻类的数学模型研究并不多<sup>[2-6]</sup>。考虑污染环境中 2 种赤潮藻类和 1 种浮游动物的相互作用, 建立了 3 种群赤潮藻类的非线性离散时滞动力学模型, 研究表明某些

参数的变化可以致使变量发生分岔乃至混沌行为<sup>[7-14]</sup>, 在实际意义上, 也就是导致赤潮出现了爆发性的增长(赤潮的发生)。

首先, 考虑了浮游植物毒素释放作用 TPP (toxin producing phytoplankton), 一些赤潮藻类产生毒素。产毒藻类通过分泌毒素抑制其它藻类增长而获得竞争优势, 当浮游植物释放毒素时, 将导致浮游动物的死亡率上升, 考虑毒素作用有时滞的存在, 研究结果表明 TPP 使赤潮动力系统发生稳定性开关

收稿日期: 2008-10-10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60575038); 南京航空航天大学理学院青年科研基金资助项目(XK-0803)

作者简介: 张丽萍(1973-), 女, 南京航空航天大学博士研究生, 主要从事精密仪器方向的研究。

王惠南(联系人), 男, 南京航空航天大学教授, 博士生导师, (Tel)025-84891938; (E-mail) wanghn-nuaa@sina.com。

欢迎访问重庆大学期刊网 <http://qks.cqu.edu.cn>

现象,说明毒素释放作用 TPP 可以促使赤潮的消失。

其次,赤潮在环境污染的海洋中发生频繁。在当今工业污染严重的世界里,环境中的毒素进入生物体内,对生物群落的内禀增长率有抑制作用,通常毒素通过直接或通过改变环境来影响生物个体。考虑进入生物体内的毒素通过影响赤潮种群的内禀增长率,从而影响赤潮种群的情况,研究结果表明,毒素通过对内禀增长率的抑制也可以使赤潮动力系统的混沌状态得到控制。

## 1 模型建立及稳定性分析

考虑污染环境中 3 种群之间的 Volterra 模型,其中  $p_1, p_2, z$  分别代表 2 种赤潮藻类及浮游动物的密度,  $r_i (i = 1, 2)$  代表无毒素作用时浮游植物和浮游生物的内禀增长率,  $d$  代表浮游动物的死亡率,  $\alpha_1$  及  $\alpha_2$  分别表示 2 种赤潮藻类之间的相互作用系数,  $\rho_1, \rho_2$  和  $\gamma_1, \gamma_2$  分别表示浮游动物与 2 种赤潮藻类之间的相互作用系数。

无毒素影响时, 2 种竞争赤潮藻类  $p_1, p_2$  和浮游动物  $z$  的变化服从 Volterra 模型

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= r_1 p_1 \left(1 - \frac{p_1}{k}\right) - \alpha_1 p_1 p_2 - \rho_1 p_1 z, \\ \frac{dp_2}{dt} &= r_2 p_2 \left(1 - \frac{p_2}{k}\right) - \alpha_2 p_1 p_2 - \rho_2 p_2 z, \\ \frac{dz}{dt} &= (\gamma_1 p_1 + \gamma_2 p_2) z - dz. \end{aligned} \right\} (1)$$

下面考虑有毒赤潮藻类毒素释放作 TPP,  $\theta_1$  和  $\theta_2$  分别表示赤潮藻类  $p_1$  和  $p_2$  的毒素释放率, 环境中毒素的浓度为  $C_E(t)$ , 生物体内毒素的浓度为  $C_0(t)$ 。研究它们之间的相互关系, 以及在毒素的影响下赤潮藻类和浮游生物的变化规律。Branson、Thomann 等人建议, 对化学等毒素来说, 生物体内毒素浓度可用下述一阶微分方程来描述

$$\frac{dC_0}{dt} = hC_E - gC_0 - mC_0,$$

其中:  $h, g, m$  均为常数;  $hC_E$  表示  $t$  时刻个体对环境中毒素浓度的吸收率, 它与  $t$  时刻环境中毒素的浓度  $C_E$  成正比;  $gC_0$  表示  $t$  时刻个体体内毒素的排泄

率;  $mC_0$  表示由于新陈代谢等因素的作用,  $t$  时刻个体体内毒素的净化率。它们都分别与当时个体体内的毒素浓度  $C_0$  成正比。由此可见由于环境中毒素浓度发生变化, 会导致生物体内毒素浓度发生变化, 进一步影响生物种群的内禀增长率, 由于毒素浓度的影响, 种群的内禀增长率会减少, 考虑最简单的线性关系, 即由于毒素的侵袭, 种群成员数的内禀增长率  $r'_i = r_i - r_{i0} C_0$ , 它随种群体内的毒素浓度升高而减小, 其中  $r_{i0}$  为正常数, 反映种群增长率受毒素影响程度;  $i = 1, 2$ , 为书写方便, 把  $r'_i$  仍然记为  $r_i$ 。当浮游植物释放毒素时, 将导致浮游动物的死亡率上升, 同时考虑毒素作用有时滞的存在, 于是得到具有毒素影响的 3 种群赤潮藻类模型

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= r_1 p_1 \left(1 - \frac{p_1}{k}\right) - \alpha_1 p_1 p_2 - \rho_1 p_1 z, \\ \frac{dp_2}{dt} &= r_2 p_2 \left(1 - \frac{p_2}{k}\right) - \alpha_2 p_1 p_2 - \rho_2 p_2 z, \\ \frac{dz}{dt} &= (\gamma_1 p_1 + \gamma_2 p_2) z - dz - \theta_1 p_1 (t - \tau) z - \theta_2 p_2 (t - \tau) z, \end{aligned} \right\} (2)$$

以及初始条件

$$\begin{aligned} p_1(0) &\geq 0, p_2(0) \geq 0, z(0) \geq 0, \\ 0 &\leq C_0(0) \leq 1, 0 \leq C_E(0) \leq 1. \end{aligned}$$

## 2 模型稳定性及分岔行为分析

系统(2)的平衡点如下。

- 1) 平凡平衡点:  $E_T = (0, 0, 0)$ 。
- 2) 轴平衡点:  $E_{A1} = (k, 0, 0)$  和  $E_{A2} = (0, k, 0)$ 。
- 3) 边界平衡点,

$$\left. \begin{aligned} E_{B1} &= \left[ \frac{(r_2 - r_{20} C_0)(r_1 - r_{10} C_0 - \alpha_1 k)}{(r_2 - r_{20} C_0)(r_1 - r_{10} C_0) - \alpha_1 \alpha_2 k^2}, \right. \\ &\quad \left. \frac{(r_1 - r_{10} C_0)(r_2 - r_{20} C_0 - \alpha_2 k)}{(r_2 - r_{20} C_0)(r_1 - r_{10} C_0) - \alpha_1 \alpha_2 k^2}, 0 \right] \\ E_{B2} &= \left[ 0, \frac{d}{\gamma_1}, \frac{(r_2 - r_{20} C_0)}{\beta_2} \left(1 - \frac{d}{k\gamma_2}\right) \right] \\ E_{B3} &= \left[ \frac{d}{\gamma_1}, 0, \frac{(r_1 - r_{10} C_0)}{\beta_1} \left(1 - \frac{d}{k\gamma_1}\right) \right] \end{aligned} \right\}.$$

- 4) 内部平衡点  $E^* = (P_1^*, P_2^*, Z^*)$ ,

$$\left. \begin{aligned} P_1^* &= \frac{d[(r_2 - r_{20} C_0)\beta_1 - \alpha_1 \beta_2 k] + k[\beta_2(r_1 - r_{20} C_0) - k\beta_1(r_2 - r_{20} C_0) - \beta_1(r_1 - r_{10} C_0)]\gamma_2}{[(r_2 - r_{20} C_0)\beta_1 - \alpha_1 \beta_2 k]\gamma_1 + [(r_1 - r_{10} C_0)\beta_2 - \alpha_2 \beta_1 k]\gamma_2} \\ P_2^* &= \frac{d[(r_2 - r_{20} C_0)\beta_1 - \alpha_2 \beta_1 k] - k[\beta_2(r_1 - r_{10} C_0) - \beta_1(r_2 - r_{20} C_0)]\gamma_1}{[(r_2 - r_{20} C_0)\beta_1 - \alpha_1 \beta_2 k]\gamma_1 + [(r_1 - r_{10} C_0)\beta_2 - \alpha_2 \beta_1 k]\gamma_2} \\ Z^* &= \frac{k[(r_1 - r_{20} C_0 - \alpha_1 k)\gamma_1 + (r_2 - r_{20} C_0 - \alpha_2 k)\gamma_2] - d[(r_1 - r_{10} C_0)(r_2 - r_{20} C_0) - \alpha_1 \alpha_2 k^2]}{k\{[(\beta_1(r_2 - r_{20} C_0) - \alpha_1 \beta_2 k)\gamma_1 + [\beta_2(r_1 - r_{10} C_0) - \alpha_2 \beta_1 k]\gamma_2]\}} \end{aligned} \right\}.$$

其中内部平衡点  $E^*$  存在的条件是

$$\alpha_1 < \min \left\{ \begin{aligned} & \frac{(r_2 - r_{20}C_0)\beta_1}{\beta_2 k} + \frac{[(r_1 - r_{10}C_0)\beta_2 - (r_2 - r_{20}C_0)\beta_1]\gamma_2}{d\beta_2}, \\ & \frac{(r_1 - r_{10}C_0)\beta_2\gamma_2}{k} + \frac{(r_2 - r_{20}C_0)\beta_1\gamma_2}{k} - \alpha_2\beta_1\gamma_2 \\ & \frac{\beta_2\gamma_1}{\beta_2\gamma_1}, \\ & \frac{(r_2 - r_{20}C_0)(r_1 - r_{10}C_0)(\gamma_2 + \gamma_1 - \frac{\alpha}{k}) - (r_1 - r_{10}C_0)\gamma_2\alpha_2}{d\beta_2} \end{aligned} \right\},$$

$$\alpha_2 < \min \left\{ \begin{aligned} & \frac{(r_2 - r_{20}C_0)\gamma_1}{d}, \frac{(r_2 - r_{20}C_0)(\gamma_2 + \gamma_1 - \frac{d}{k})}{\gamma_2}, \\ & \frac{(r_1 - r_{10}C_0)\beta_2}{\beta_1 k} - \frac{[(r_1 - r_{10}C_0)\beta_2 - (r_2 - r_{20}C_0)\beta_1]\gamma_1}{d\beta_1}, \\ & \frac{(r_1 - r_{10}C_0)\beta_2\gamma_2}{k} + \frac{(r_2 - r_{20}C_0)\beta_1\gamma_1}{k} \\ & \frac{\beta_1\gamma_2}{\beta_1\gamma_2} \end{aligned} \right\}.$$

运用局部线性近似法分析系统(2)的局部渐近稳定性,通过计算各平衡点的特征矩阵,可以得到如下引理。

**引理 1** 系统(2)的平衡点  $E_T = (0, 0, 0)$  是不稳定的鞍点。

**引理 2** 系统(2)的平衡点  $E_{A1} = (k, 0, 0)$  和  $E_{A2} = (0, k, 0)$  是不稳定的鞍点。

**引理 3** 如果  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} < \frac{r_1 - r_{10}}{r_2 - r_{20}}$ , 则系统(2)的平衡点  $E_{B1}$  是不稳定。

**引理 4** 系统(2)的平衡点  $E_{B2}$  和  $E_{B3}$  是稳定的。下面着重研究 3 种群共存的正平衡点  $E^* = (P_1^*, P_2^*, Z^*)$  的稳定性及分岔与混沌。首先考虑系统(2)的扰动方程,令  $x_1 = p_1 - p_1^*, x_2 = p_2 - p_2^*, x_3 = z - z^*$  系统(2)的线性化系统为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{(r_1 - r_{10})p_1^*}{k}x_1 - \alpha_1 p_1^* x_2 - \rho_1 p_1^* x_3 - \frac{r_1 - r_{10}}{k}x_1^2 - \alpha_1 x_1 x_2 - \rho_1 x_1 x_3, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{(r_2 - r_{20})p_2^*}{k}x_2 - \alpha_2 p_2^* x_1 - \rho_2 p_2^* x_3 - \frac{r_2 - r_{20}}{k}x_2^2 - \alpha_2 x_1 x_2 - \rho_2 x_2 x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} &= (\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2)z^* - \theta_1 x_1(t - \tau)z^* - \theta_2 x_2(t - \tau)z^* + (\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2)x_3 - \\ & \quad \theta_1 x_1(t - \tau)x_3 - \theta_2 x_2(t - \tau)x_3. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

系统(3)在平衡点  $E^* = (P_1^*, P_2^*, Z^*)$  的线性化系统的特征方程为

$$\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 + (b_1\lambda + b_0)e^{-\lambda\tau_1} + (c_1\lambda + c_0)e^{-\lambda\tau_2} = 0, \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{(r_1 - r_{10}C_0)P_1^*}{k} + \frac{(r_2 - r_{20}C_0)P_2^*}{k} > 0, \\ a_1 &= \left[ \frac{(r_2 - r_{20}C_0)(r_1 - r_{10}C_0)}{k^2} - \alpha_1\alpha_2 \right] P_1^* P_2^* + \\ & \quad \beta_2\gamma_2 P_2^* + \beta_1\gamma_1 P_1^*, \\ a_0 &= \left[ \frac{(r_1 - r_{10})\beta_2\gamma_2}{k} + \frac{(r_2 - r_{20})\beta_1\gamma_1}{k} - \alpha_1\beta_2\gamma_2 - \right. \\ & \quad \left. \alpha_1\beta_2\gamma_1 \right], \\ b_1 &= -\rho_1\theta_1 p_1^* z^*, \\ b_0 &= -\theta_1 \left[ \frac{(r_2 - r_{20}C_0)\rho_1}{k} - \alpha_1\rho_2 \right] p_1^* p_2^* z^*, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1 &= -\rho_2\theta_2 p_2^* z^*, \\ c_0 &= -\theta_2 \left( \frac{(r_1 - r_{10}C_0)\rho_{21}}{k} - p_1^* p_2^* z^* \right). \end{aligned}$$

下面研究方程(4)的特征根分布,当  $\tau_1 = 0$  和  $\tau_2 = 0$  时,方程(4)变成

$$\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 + b_0 + c_0 = 0. \quad (5)$$

由霍尔维茨盘判据,特征方程的根具有负实部的充要条件是

$$\begin{aligned} H1: & (a_0 + b_0 + c_0) > 0, \\ & a_2(a_1 + b_1 + c_1) > (a_0 + b_0 + c_0), \end{aligned}$$

此时  $E^* = (P_1^*, P_2^*, Z^*)$  是渐近稳定的。当参数取值满足  $a_2(a_1 + b_1 + c_1) = (a_0 + b_0 + c_0)$  时,系统将发生 Hopf 分岔。所以得到如下的定理。

**定理 5** 系统(2)当 H1 满足时,  $E^* = (P_1^*, P_2^*, Z^*)$  是渐近稳定的;当  $a_2(a_1 + b_1 + c_1) = (a_0 + b_0 + c_0)$  时,系统将发生 Hopf 分岔。

### 3 计算机模拟及结论

各参数取值如下： $k = 20, \alpha_1 = 0.01, \beta_1 = 0.6, r_2 = 2.3, \alpha_2 = 0.02, \beta_2 = 0.55, \gamma_1 = 0.4, \gamma_2 = 0.3, d = 0.1$ 。首先选取  $r_1$  作为分岔参数对系统进行研究，当  $r_1$  取不同值时，可以看到 Hopf 分岔的存在。 $r_1 = 2.5$  表示不考虑污染环境中的毒素影响  $p_1$  的内禀增长率， $r_1 < 2.5$  表示考虑污染环境中的毒素影响时  $p_1$  的内禀增长率，由于毒素的侵袭，使赤潮藻类  $p_1$  的内禀增长率减小。

1) 当  $r_1 = 2.5, \tau = 5$ ，此时系统(2)有正的平衡点，2 种赤潮藻类和浮游动物的密度分别是 0.125 7, 0.191 1 和 4.134 8，见图 1。

2) 当  $r_1 = 1.5, \tau = 5$ ，由于污染环境中的毒素影响，系统(2)仍趋于稳定的焦点，但是正平衡点消失， $p_1$  不能持续生存， $p_2$  和  $z$  能够持续生存，此时  $p_1, p_2$  和  $z$  的密度分别是：0, 0.333 2, 4.110 2，见图 2。

3)  $r_1 = 2.5, \tau = 7.43$  时，由于污染环境中的毒素影响，系统(2)发生 Hopf 分岔，出现极限环，见图 3。

4) 当  $r_1 = 2, \tau = 7.43$ ，由于污染环境中的毒素影响，系统(2)的稳定性发生改变，由原来的极限环变为稳定的焦点，此时  $p_1, p_2$  和  $z$  的密度分别是：0, 0.332 7, 4.110 6，见图 4。

5) 当  $r_1 = 2.5, \tau_1 = 15, \tau_2 = 6$  时，系统(2)的稳定性发生改变，由原来的极限环变为稳定的焦点，此时  $p_1, p_2$  和  $z$  的密度分别是：0.149 5, 0.212 1, 4.132 4，见图 5。

6) 当  $r_1 = 1.5, \tau_1 = 15, \tau_2 = 6$  时，由于污染环境中的毒素影响，系统(2)仍趋于稳定的焦点，但是正平衡点消失，硅藻不能持续生存，甲藻和浮游动物能够持续生存，此时  $p_1, p_2$  和  $z$  的密度。分别是：0, 0.434 7, 4.094 3，见图 6。

7) 当  $r_1 = 2.5, \tau_1 = 15, \tau_2 = 20$  时，由于时滞的作用，系统(2)发生 Hopf 分岔，出现极限环，见图 7。

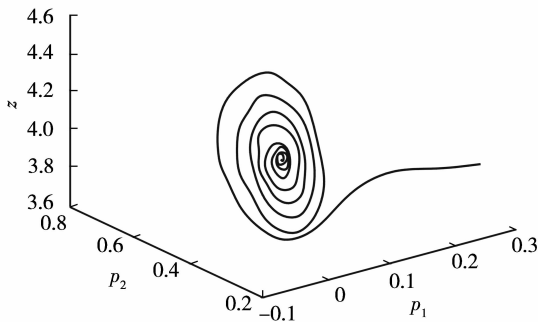


图 2  $r_1 = 1.5, \tau = 5$  时，系统(2)趋于的焦点， $p_1, p_2, z$  持续生存  $p_1$  不能持续生存， $p_2, z$  持续生存

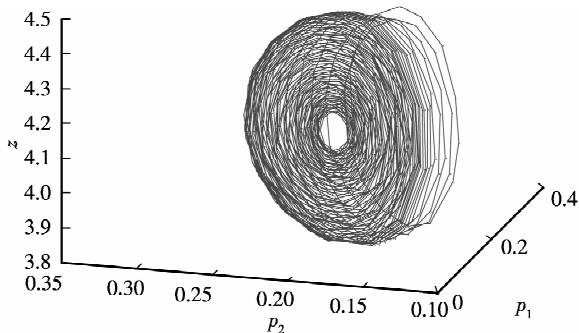


图 3  $r_1 = 2.5, \tau = 7.43$  时，系统(2)出现周期解

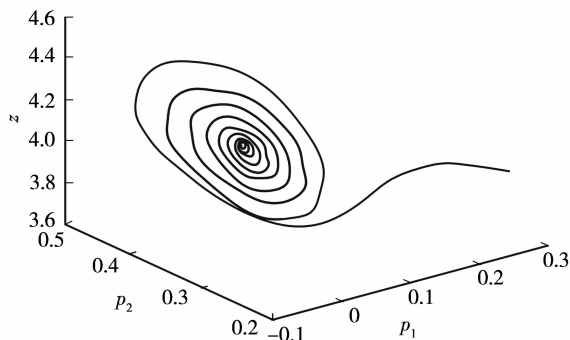


图 4  $r_1 = 2, \tau = 7.43$  时，系统(2)趋于稳定的焦点

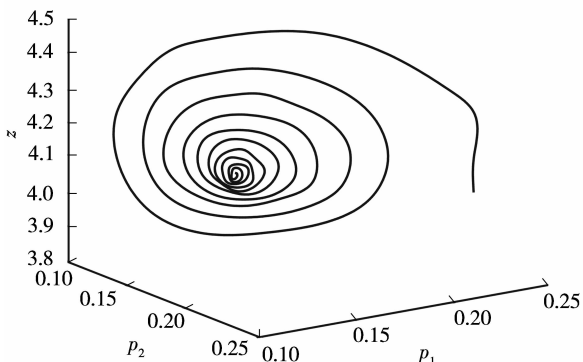


图 1  $r_1 = 2.5, \tau = 5$  时，系统(2)趋于稳定的焦点

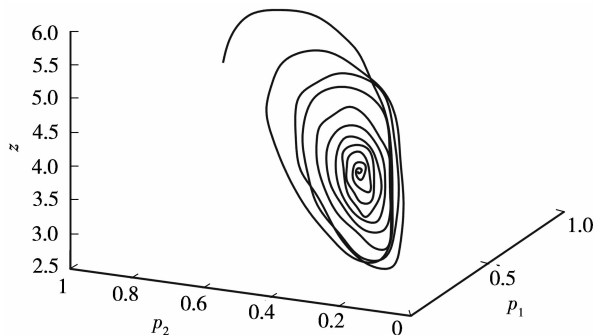


图 5  $r_1 = 2.5, \tau_1 = 15, \tau_2 = 6$  时，系统(2)趋于稳定的焦点

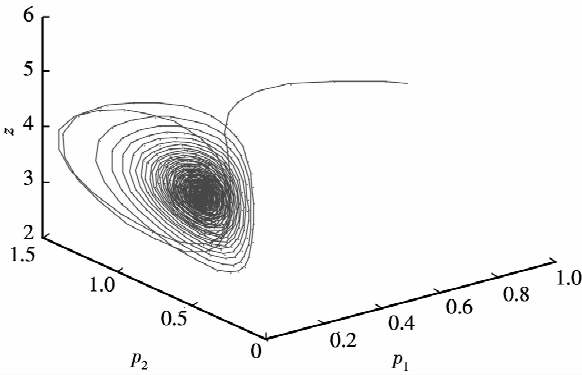


图 6  $r_1=1.5, \tau_1=15, \tau_2=6$  时,系统(2)趋于稳定的焦点

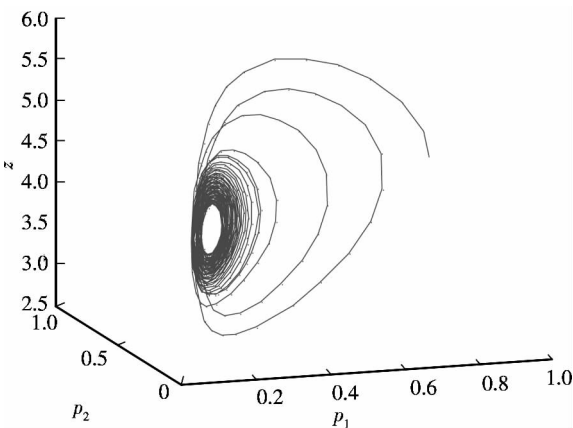


图 7  $r_1=2.5, \tau_1=15, \tau_2=20$  时,系统(2)出现极限环

根据上述计算机模拟结果,得出结论如下:

1) 比较图 1、2 可知,考虑 1 个时滞的系统中,污染环境中毒素影响系统(2)正平衡点的存在性,污染环境中毒素影响藻类的内禀增长率,影响藻类的持续生存。

2) 比较图 3、4 可知,考虑 1 个时滞的系统中,污染环境中藻类释放的毒素通过对内禀增长率的抑制使赤潮藻类动力系统的混沌状态得到控制。

3) 比较图 5、6 可知,考虑 2 个时滞的系统中,污染环境中毒素影响系统(2)正平衡点的存在性,污染环境中毒素影响藻类的内禀增长率,影响藻类的持续生存。

4) 比较图 5、7 可知,考虑 2 个时滞的系统中,时滞导致 Hopf 分岔的出现,改变系统的稳定性。

通过以上的分析和计算机模拟,看到污染环境中毒素对藻类的内禀增长率有影响,并进一步改变系统正平衡点的存在性和系统的稳定性。同时,TPP 使赤潮藻类动力系统的混沌状态得到控制。

#### 参考文献:

[1] 朱永春,蔡启铭. 风场对藻类在海洋种迁移影响的动力学研究[J]. 湖泊科学,1997,9(2):152-158.

ZHU YONG-CHUN, CAI QI-MING. The dynamic  
欢迎访问重庆大学期刊网 <http://qks.cqu.edu.cn>

research of the influence of wind field on the migration of algae in Taihu Lake[J]. Journal of Lake Science, 1997,9(2):152-158.

[2] DING L, WU J Q, PANG Y, et al. Simulation study on algal dynamics based on ecological flume experiment in Taihu Lake, China[J]. Ecology Engineering, 2007, 31(3): 200-206.

[3] SARKER R R, MALCHOW H. Nutrient and toxin producing phytoplankton control algal blooms-a spatiotemporal study in a noisy environment[J]. Journal of Bioscience, 2005,30(5):749-760.

[4] SARER R R, PETROVSKII S V, BISWAS M, et al. An ecological study of a marine plankton community based on the field data collected from Bay of Bengal [J]. Ecological Modeling 2006, 193(3/4):589-601.

[5] SARKER R R, CHATTOPADHYAY J. Occurrence of planktonic blooms under environmental fluctuations and its possible control mechanism-mathematical models and experimental observations [J]. Journal of Theoretical Biology, 2003,224(3):501-16.

[6] SOLE J, GARCIA-LADONA E, RUARDIJ P, et al. Modelling allelopathy among marine algae [J]. Ecological Modelling, 2005, 183(4):373-84.

[7] SARKER R R, MUKHOPADHYAY B, BHATTACHARYYA R, et al. Time lags can control algal bloom in two harmful phytoplankton-zooplankton system[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 186(1):445-459.

[8] SONG Y L, WEI J. Local hopf bifurcation and global periodic solutions in a delayed predator-prey system[J]. Journal of Mathematics Analysis and Application, 2005, 301(1):1-21.

[9] YAN X P, ZHANG X H. Hopf bifurcation in a delayed Lotka-Volterra predator-prey system [J]. Nonlinear Analysis, 2008(9):114-127.

[10] SONG Y L, HAN M A, PENG Y H. Stability and hopf bifurcation in a competitive Lotka-Volterra system with two delays [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2004,22(5) 1139-1148.

[11] LI J Q, MA Z E. Stability switches in a class of characteristic equations with delay-dependent parameters [J]. Nonlinear Analysis: Real World Application, 2004, 5 (3):389-408.

[12] ZHANG J, JIN I, YAN J, et al. Stability and hopf bifurcation in a delayed competition system [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2008, 70(2):658-670.

[13] LIU Z H, YUAN R. Stability and bifurcation in a harmonic oscillator with delays[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005,23(2): 551-562.

[14] YAN X P, LI W T. Hopf bifurcation and global periodic solutions in a delayed predator-prey system[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 177 (1): 427-445.