

文章编号:1000-582X(2009)12-1403-05

环形液池内低 Pr 数流体热毛细对流的线性稳定性

李友荣,刘玉珊,石万元

(重庆大学 动力工程学院,重庆 400030)

摘要:利用线性稳定性理论分析了低 Pr 数 ($Pr=0.011$) 流体在环形液池内的热毛细对流,以此了解环形液池内热毛细对流的转变特性。液池外壁被加热,内壁被冷却,底部固壁和顶部自由表面均绝热。结果表明,随着液池深宽比的增加,临界 Marangoni 数和临界波数都逐渐减小,且当液池深宽比超过 0.12 后,临界波数基本不变;随着液池内外半径比的增加,临界 Marangoni 数会逐渐减小,但变化幅度不大,而临界波数有一个大的增加。

关键词:线性稳定性分析;热毛细对流;低 Pr 数流体

中图分类号:TK124

文献标志码:A

Linear stability analysis of thermocapillary convection of low Prandtl number fluid in an annular pool

LI You-rong, LIU Yu-shan, SHI Wan-yuan

(College of Power Engineering, Chongqing University, Chongqing 400030, P. R. China)

Abstract: This study uses the linear stability analysis to understand the transition characteristics of thermocapillary convection in an annular pool with low Prandtl number ($Pr=0.011$) fluid. The annular pool is heated from the outer cylindrical wall and cooled at the inner wall. The bottom and top surfaces are adiabatic. The results show that with the increase of the aspect ratio, the critical Marangoni number and the critical wave number decrease. When the aspect ratio exceeds 0.12, the critical wave number keeps almost constant. With the increase of the radius ratio, the critical Marangoni number decreases slightly, while the critical wave number increases.

Key words: linear stability analysis; thermocapillary convection; low Prandtl number fluid

当流体自由表面存在温度不均匀时,会产生表面张力的不均匀,从而驱动流体运动,这种由于表面张力梯度驱动流动称为热毛细对流,它广泛存在于相变换热、薄膜涂层、液滴蒸发、单晶熔体生长等工业技术领域,并对实际生产过程有着重要的影响^[1-3]。近几十年来,许多学者对此进行了大量研究,并取得了相当丰硕的成果。

热毛细对流的不稳定性最早由 Smith 和

Davis^[4] 提出,他们完成了水平温度梯度作用下具有自由界面的无限大水平薄液层内热毛细对流的线性稳定性分析,发现了 2 种不稳定性,一种是稳定的轴向滚胞,另一种是热流体波,并认为临界 Marangoni (Ma) 数和临界波数取决于流体的 Prandtl (Pr) 数。后来,研究者们采用这种方法研究了各种条件下的热毛细对流和热毛细-浮力对流的稳定性^[5-14],得到了流动转化过程的临界条件,分析了各种因素

收稿日期:2009-07-27

基金项目:国家自然科学基金资助项目(50776102)

作者简介:李友荣(1963-),男,重庆大学教授,博士生导师,主要从事传热传质和热力学分析的研究,(E-mail) liyourong@cqu.edu.cn。

对流动转化过程的影响,确认了流动失稳后的各种可能流型。但是,在已有的研究成果中,很少涉及到环形液池内热毛细对流的线性稳定性分析^[15],因此,文中主要采用线性稳定性理论,对环形液池内低 Pr 数流体的热毛细对流进行稳定性分析,重点探讨几何尺寸对热毛细对流转变临界条件的影响。

1 数学物理模型

物理模型如图 1 所示,环形液池内径为 r_i ,外径为 r_o ,深度为 d ,底部为固壁,上表面为自由表面,假设表面平整无变形,内、外壁分别维持恒定温度 T_c 和 T_h ($T_h > T_c$)。

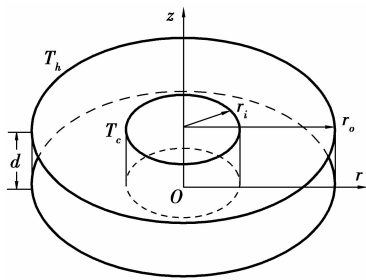


图 1 物理模型

为简化起见,假定:液池底部和自由表面绝热;流体为不可压缩流体,除表面张力外,其它物性均为常数;流动为层流;在自由表面考虑热毛细力的作用,而在所有固壁满足无滑移条件。分别将 $(r_o - r_i)^2/\nu$ 、 $(r_o - r_i)$ 、 $\nu/(r_o - r_i)$ 、 $\nu\mu/(r_o - r_i)^2$ 作为控制方程的无量纲参考时间、长度、速度和压力,则上述条件下的无量纲控制方程为

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{v}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \mathbf{v} \cdot \nabla \Theta = \frac{1}{Pr} \nabla^2 \Theta. \tag{3}$$

边界条件如下:

自由表面 ($z = \epsilon, \beta/(1-\beta) < r < 1/(1-\beta)$):

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{Ma}{Pr} \frac{\partial \Theta}{\partial r}, \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{Ma}{Pr} \frac{\partial \Theta}{r \partial \theta}, \tag{4}$$

$$w = 0, \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0.$$

底面 ($z = 0, \beta/(1-\beta) < r < 1/(1-\beta)$):

$$u = v = w = 0, \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0. \tag{5}$$

内壁面 ($r = \beta/(1-\beta), 0 \leq z \leq \epsilon$):

$$u = v = w = 0, \Theta = 0. \tag{6}$$

外壁面 ($r = 1/(1-\beta), 0 \leq z \leq \epsilon$):

$$u = v = w = 0, \Theta = 1. \tag{7}$$

式中, \mathbf{v} 为无因次速度矢量; p 为无因次压力, $\Theta = (T - T_c)/(T_h - T_c)$ 为无因次温度, τ 为无因次时间。 $Ma = \gamma_T(r_o - r_i)\Delta T/(\mu\alpha)$ 为 Marangoni 数; $Pr = \nu/\alpha$ 为 Prandtl 数; $\gamma_T = -\partial\gamma/\partial T$ 为表面张力系数。 $\epsilon = d/(r_o - r_i)$ 为深宽比, $\beta = r_i/r_o$ 为半径比。流体为硅熔体,其物性参数见表 1。

表 1 $T=1683\text{ K}$ 时硅熔体的物性参数

名称	符号	单位	数值
动量扩散率	ν	m^2/s	2.767×10^{-7}
热扩散率	α	m^2/s	2.53×10^{-5}
密度	ρ	kg/m^3	2 530
Prandtl 数	Pr	—	0.011
表面张力系数	γ_T	$\text{N}/(\text{m} \cdot \text{K})$	-7×10^{-5}

2 线性稳定性分析

在进行线性稳定性分析时,首先通过数值模拟确定基本解,即轴对称的稳定流场和温度场,用 $(u_0, v_0, w_0, p_0, \Theta_0)^T$ 表示。在基本解的基础上,叠加小扰动 $(u', v', w', p', \varphi)^T$ 和波动量,构造出三维非稳态解如下:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ p \\ \Theta \end{pmatrix} (r, \theta, z, \tau) = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ p_0 \\ \Theta_0 \end{pmatrix} (r, z) + \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \\ p' \\ \varphi \end{pmatrix} (r, z) e^{\lambda\tau + im\theta}, \tag{8}$$

式中: m 代表周向波数; λ 代表波动的时相关特性,为复数。将此式代入控制方程和边界条件,并线性化后可得无因次扰动方程

$$\frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{u'}{r} + \frac{imv'}{r} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \tag{9}$$

$$\lambda u' + u_0 \frac{\partial u'}{\partial r} + u' \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{imv_0 u'}{r} + w_0 \frac{\partial u'}{\partial z} + w' \frac{\partial u_0}{\partial z} - \frac{2v_0 v'}{r} = -\frac{\partial p'}{\partial r} + \frac{\partial^2 u'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} - \frac{m^2}{r^2} u' - \frac{u'}{r^2} - \frac{2imv'}{r^2}, \tag{10}$$

$$\lambda v' + u_0 \frac{\partial v'}{\partial r} + u' \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{imv_0 v'}{r} + w_0 \frac{\partial v'}{\partial z} + w' \frac{\partial v_0}{\partial z} + \frac{v_0 u'}{r} + \frac{u_0 v'}{r} = -\frac{im p'}{r} + \frac{\partial^2 v'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'}{\partial r} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z^2} - \frac{m^2}{r^2} v' - \frac{v'}{r^2} + \frac{2imu'}{r^2}, \tag{11}$$

$$\lambda w' + u_0 \frac{\partial w'}{\partial r} + u' \frac{\partial w_0}{\partial r} + \frac{imv_0 w'}{r} + w_0 \frac{\partial w'}{\partial z} +$$

$$w' \frac{\partial w_0}{\partial z} = -\frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{\partial^2 w'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w'}{\partial r} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} - \frac{m^2}{r^2} w', \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \lambda \varphi + u_0 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + u' \frac{\partial \Theta_0}{\partial r} + \frac{imv_0}{r} \varphi + w_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} + w' \frac{\partial \Theta_0}{\partial z} \\ = \frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{m^2}{r^2} \varphi \right). \quad (13) \end{aligned}$$

边界条件转化为如下形式:

自由表面 ($z = \epsilon, \beta/(1-\beta) < r < 1/(1-\beta)$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial z} = -\frac{Ma}{Pr} \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \frac{\partial v'}{\partial z} = -\frac{Ma}{Pr} \frac{im\varphi}{r}, \\ w' = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (14) \end{aligned}$$

底面 ($z = 0, \beta/(1-\beta) < r < 1/(1-\beta)$):

$$u' = v' = w' = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (15)$$

内壁面和外壁面 ($r = \beta/(1-\beta)$ 和 $1/(1-\beta)$, $0 \leq z \leq \epsilon$):

$$u' = v' = w' = 0, \varphi = 0. \quad (16)$$

对上述无量纲控制方程组和边界条件进行离散,可得到关于扰动量的线性代数方程组为

$$\mathbf{A}x = \lambda \mathbf{B}x, x \in C^n. \quad (17)$$

其中, x 代表扰动量 $(u', v', w', p', \varphi)^T$, \mathbf{A} 是由与 λ 无关的各项系数构成的矩阵,其中包含着参数 Ma 数;而 \mathbf{B} 是涉及到 λ 的各项系数构成的矩阵,其与 Ma 数无关; n 是离散区域内节点总数。采用迭代法求解,该方法是一种有效的求解大型稀疏矩阵部分特征值的方法,它通常估计一初值作为拟求特征值和特征向量的近似值,然后求解位移矩阵以及新矢量,直至得到收敛结果,这种方法所需存储空间小,迭代次数少,收敛速度快。计算时,对周向波数 m 赋正整数值,调整 Ma 数,确定实部为非负数的特征值,此时的 Ma 数即为该波数 m 下发生流动失稳的分叉点,即边际 Ma 数。最小边际 Ma 数为流动转化的临界 Marangoni 数 Ma_c ,对应的波数则为临界波数 m_c 。

3 结果与讨论

3.1 计算方法验证

为了检验计算网格的收敛性和结果的正确性,按照上述方法在不同的网格下进行了计算,计算条件为:液池深度 $d = 3 \text{ mm}$,外半径 $r_o = 50 \text{ mm}$,内半径 $r_i = 15 \text{ mm}$,即 $\epsilon = 0.086, \beta = 0.3$,结果如图 2 和表 2 所示。由此可见,当网格加密至 $150^\circ \times (30 - 50)^\circ$ 时,网格对边际 Ma 数和临界 Ma 数的影响都

非常小,因此,在后面的计算中采用的网格为 $150^\circ \times 30^\circ$ 。表 2 同时给出了相同条件下利用三维数值模拟得到的临界 Ma_c 数^[16],图 3 为刚过临界点时的表面温度波动的数值模拟结果,与数值计算结果相比,临界波数相同,但线性稳定性分析得到的临界 Ma_c 数偏低。产生这种偏差的主要原因是,一方面,在线性稳定性分析对方程进行线性化处理时,舍去了所有非线性项,另一方面,在 $r-z$ 面上,三维数值模拟与线性稳定性分析采用了不同的网格。

表 2 网格的收敛性检验

网格数	Ma_c	m_c	说明
$100^\circ \times 20^\circ$	1 068	10	线性稳定性分析
$150^\circ \times 30^\circ$	1 035	11	线性稳定性分析
$200^\circ \times 40^\circ$	1 031	11	线性稳定性分析
$123^\circ \times 80^\circ \times 20^\circ$	1 079	11	三维数值模拟

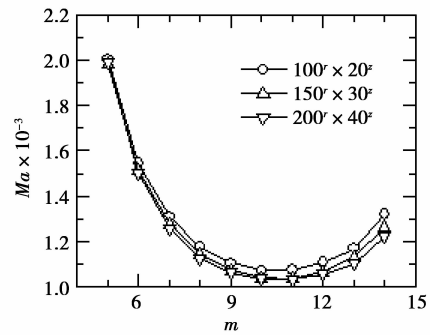


图 2 网格数对边际 Ma 数的影响

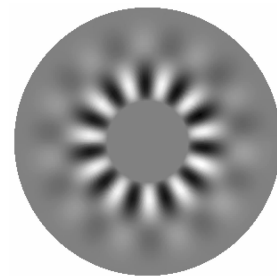


图 3 三维数值模拟表面温度波动 ($Ma = 1106$)

3.2 液池深宽比 ϵ 的影响

图 4 给出了不同深宽比时的边际稳定性曲线,由图可见,当波数较小时,轴对称稳态流动转化为三维振荡流动的边际 Ma 数较大,随着波数的增加,对应的边际 Ma 数逐渐减小,当达到某一临界波数 m_c 时,边际 Ma 数达最小值,此 Ma 数称为临界 Ma_c 数,当波数超过临界值时,随着波数的增加,边际 Ma 数逐渐增大。

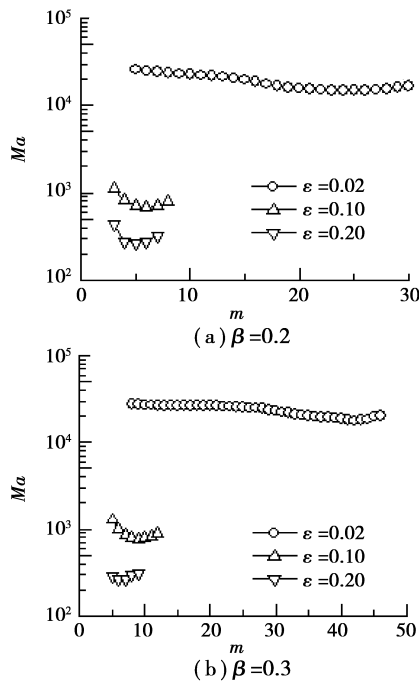


图 4 不同深宽比时的边际稳定性曲线 (a) $\beta=0.2$, (b) $\beta=0.3$.

图 5 给出了不同液池深宽比 ϵ 所对应的临界 Ma_c 数和临界波数 m_c 的变化规律,可以看出,随着 ϵ 的增加,临界 Ma_c 数逐渐减小,即在相同条件下,液池深宽比的增加更容易使流动失稳、从轴对称流动转变为振荡的三维流动,这一变化规律与 Kamotani^[17] 的实验结果相同。

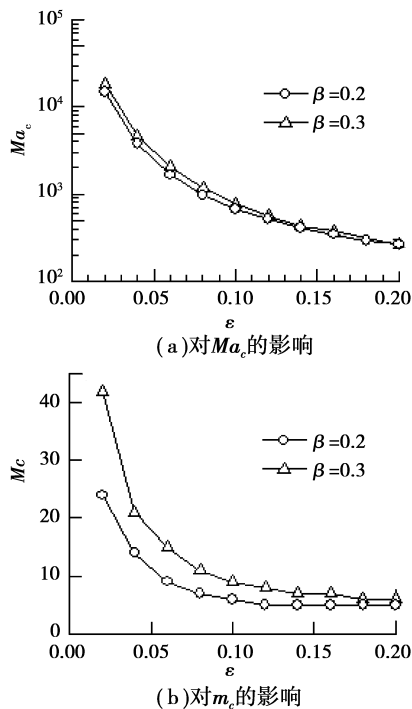


图 5 液池深宽比对 Ma_c 和 m_c 的影响

随着液池深宽比 ϵ 的增加,环形液池周向临界波数 m_c 逐渐减小,当 $\epsilon > 0.12$ 时,临界波数 m_c 基本不变,这一规律与 Li^[18] 等采用三维直接数值模拟得到的结果基本相同。

3.3 液池半径比 β 的影响

图 6 给出了深宽比 $\epsilon=0.86$ 时、不同半径比时的边际稳定性曲线,显然,其变化规律与不同深宽比时相同,即也存在一临界波数 m_c , 此处 的最小 边际 Ma 数称为临界 Ma_c 数。

图 7 给出了不同液池半径比 β 所对应的临界 Ma_c 数和临界波数 m_c 的变化规律,可以看出,随着 β 的增加,临界 Ma_c 数逐渐减小,但减小的程度很小,例如,当 β 从 0.1 增大到 0.3 时,临界 Ma_c 数降低约 16%,即在相同条件下,半径比的增大会使流动更易失稳,但影响不大,相反,随着 β 的增加,临界波数 m_c 会有一个较大的增加。

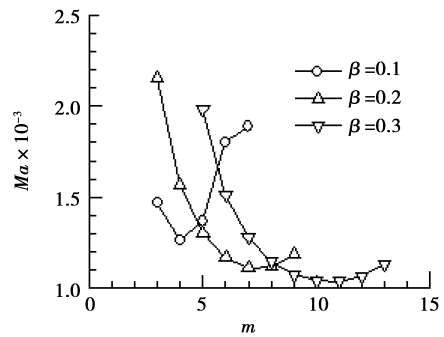


图 6 不同液池半径比时的边际稳定性曲线

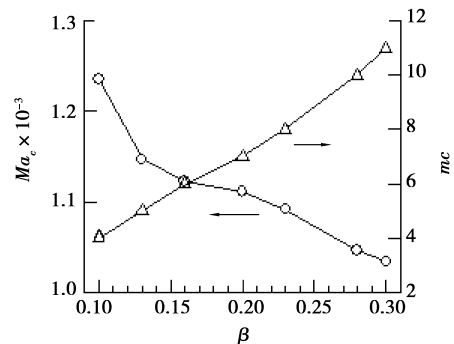


图 7 液池半径比对临界参数的影响

4 结 论

通过线性稳定性分析,得到了环形液池内低 Prandtl 数流体热毛细对流失稳的临界条件,结果表明:

- 1) 随着液池深宽比的增加,临界 Marangoni 数

和临界波数都会逐渐减小,当深宽比大于 0.12 后,临界波数基本不变。

2)随着半径比的增加,临界 Marangoni 逐渐减小,但减小的幅度不大,而临界波数却有一个较大的增加。

参考文献:

- [1] HU WR, IMAISHI N. Thermocapillary flow in an annular liquid layer painted on a moving fiber [J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2000, 43(24): 4457-4466.
- [2] SHIH T, MEGARIDIS C M. Thermocapillary flow effects on connective droplet evaporation [J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 1996, 39(2): 247-257.
- [3] CHANG C E, WILCOX W R. Analysis of surface tension driven flow in floating zone melting [J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 1976, 19 (2):355-366.
- [4] SMITH M K, DAVIS S H. Instabilities of dynamic thermocapillary liquid layers. Part 1. Convective instabilities [J]. Journal of Fluid Mechanics, 1983, 132: 119-144.
- [5] ISHAK H, WARTONO S. On oscillatory Marangoni convection in a rotating fluid layer subject to a uniform heat flux from below [J]. International Communications in Heat and Transfer, 2007, 34(2): 225-230.
- [6] ALEXANDER A N, ILYAB S, LEONID M B. Stability of thermocapillary flows with inclined temperature gradient [J]. Journal of Fluid Mech, 2001, 442(1): 141-155.
- [7] LIU QS, HU WR. Theoretical investigations of convective in multi-layer fluids for the SJ-5 space fluid experiment mission [C/OL]// 49th Int. Astronautical Congress, IAF-98-J408, Helbournl, 1998.
- [8] KATS V, NEPOMNYASHCHY A A. Linear stability of a tri-layer fluid system driven by the thermocapillary effect [J]. Elsevier Science Ltd, 1996, 40.
- [9] ERMAKOV M K, ERMAKOVA M S. Linear stability analysis of thermocapillary convection in liquid bridges with highly deformed free surface [J]. Journal of Crystal Growth, 2004, 266(1-3): 160-166.
- [10] SUGURU SHIRATORI, HENDRIK C KUHLMANN, TAKETOSHI HIBIYA. Linear stability of thermocapillary flow in partially confined half-zones [J]. Physics of Fluids, 2007, 19: 44-103.
- [11] XU B, AI X, LI B Q. Stabilities of combined radiation and Rayleigh-Benard-Marangoni convection in an open vertical cylinder [J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2007, 50(15): 3035-3046.
- [12] LI MW, ZENG DL, ZHU TX. Instability of the Marangoni convection in a liquid bridge with liquid encapsulation under microgravity condition [J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2002, 45(1): 157-164.
- [13] GUO WEI-DONG, RANGA NARAYANA. Onset of Rayleigh-Marangoni convection in a cylindrical annulus heated from below [J]. Journal of Colloid and Interface Science, 2007, 314(2): 727-732.
- [14] HOYAS S, HERRERO H, MANCHO A M. Thermocapillary and thermogravitatory waves in a convection problem [J]. Theoretical and Computational Fluid Dynamics, 2004, 18(5): 309-321.
- [15] 石万元,李友荣. 环形液层内热毛细对流的线性稳定性分析[J]. 工程热物理学报, 2008, 29(7): 1218-1220. SHI WAN-YUAN, LI YOU-RONG ERMAKOV M K. Linear stability analysis of thermocapillary convection in the annular pools [J]. Journal of Engineering Thermophysics, 2008, 29(7): 1218-1220.
- [16] 李友荣,唐经文,黄旭方,等. 环形浅液池内热毛细对流的热力学特性 [J]. 工程热物理学报, 2006, 27(2): 193-195. LI YOU-RONG, TANG JING-WEN, HUANG XU-FANG, et al. Thermodynamic characteristics of thermocapillary convection in a shallow annular pool [J]. Journal of Engineering Thermophysics, 2006, 27(2): 193-195.
- [17] KAMOTANI Y. Thermocapillary flow under microgravity-experimental results [J]. Advances Space Research, 1999, 24(10): 1357-1366.
- [18] LI YOU-RONG, IMAISHI N, AZAMI T, et al. Three-dimensional oscillatory flow in a thin annular pool of silicon melt [J]. Journal of Crystal Growth, 2004, 260(1-2): 28-42.

(编辑 陈移峰)