文章编号:1000-582X(2010)01-0109-04

均布荷载下受有预加张力圆薄膜的轴对称变形

何晓婷,吴建梁,郑周练,陈山林
(重庆大学 土木工程学院,重庆 400045)

摘　要:针对受有预加张力的弹性圆薄膜结构,利用 Föppl-von Kármán 薄膜理论建立基本方程,推广了 Hencky 变换,得到了均布荷载作用下受有预加张力弹性圆薄膜轴对称大变形的一般解。给出了圆薄膜中心挠度,径向和环向薄膜内力的幂级数形式计算公式。研究表明:当预加张力相对于荷载很小的情况下,解答趋近于 Hencky 理论结果;当预加张力相对于荷载很大的情况下,解答趋近于线性理论结果。研究结果可用于薄膜预张力测量技术的理论分析。

关键词:薄膜;预张力;荷载;挠度;应力
中图分类号:O344.3　　文献标志码:A

Axisymmetrical deformation of prestressed circular membrane under uniformly distributed loads

HE Xiao-ting, *WU Jian-liang*, *ZHENG Zhou-lian*, *CHEN Shan-lin*
(College of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, P. R. China)

Abstract: With establishing the fundamental equation of prestressed circular membrane under Föppl-von Kármán membrane theory, Hencky transform is extended and the general solution of axisymmetrical deformation of prestressed circular membrane under uniformly distributed loads is obtained. The central deflection, the radial and circumferential stresses of the membrane are given in the form of power series. And it is found that the solution approaches to the results from Hencky theory when the prestressing is far less than the loads; and the solution approaches to the results based on linear theory when the prestressing is far greater than the loads.

Key words: membranes; prestressing; loads; deflection; stresses

膜结构广泛应用于土木、机械和电子等工程领域,特别是张力膜结构[1]。由于膜材的物理特性,荷载作用下膜结构通常呈现出大变形的特点;由于其不能抵抗压缩,所以膜结构易受皱缩的影响,产生不稳定[2-4]。这些因素对膜结构的力学分析、设计以及施工造成了困难,因而对膜结构施加预张力并进行有效检测[5],可在一定程度上改善这些问题。

在张力膜结构的分析与设计过程中,掌握膜结构的力学特性至关重要。*Plaut* 回顾了在径向、横向以及扭转荷载作用下圆薄膜和环膜的非皱缩轴对称大变形问题,总结了薄膜的非线性计算理论[6]。在这些非线性理论中,基于 Föppl-von Kármán 理论的应用较为广泛。该理论以大挠度小转角为基本假设,通过忽略 Kármán 方程中的抗弯刚度,使薄板大

收稿日期:2009-02-25
基金项目:重庆市建委科技计划资助项目(城科字 2008 第(73)号);重庆市教育委员会科学技术研究资助项目(KJ08A12)
作者简介:何晓婷(1971-),女,重庆大学副教授,博士,主要从事双模量弹性结构和柔性结构方向的研究,(Tel) 023-65120898;(E-mail)xiaotinghe@163.com。

挠度问题过渡为薄膜问题[7]。除去众多的数值解，寻求以初等函数表示的精确解成为学者们的关注焦点[8]。该问题的经典解答首先是由 Hencky 得到的圆薄膜在全膜受均布荷载下的幂级数解[9]；其后，Alekseev得到了圆环薄膜在其中部相联的刚性圆板上受垂直的中心集中荷载所产生变形的解，解答当$\nu=1/3$时是精确的[10]；钱伟长等给出了圆薄膜中心部分受均布荷载产生的对称弯曲变形的解，其极限给出圆薄膜在中心集中荷载下的解，是继 Hencky 圆薄膜解以后，第三种有关圆薄膜的解[11]。陈山林等得到了集中力作用下圆薄膜大变形问题的简单精确解[12]，其解的存在唯一性由郝际平等用现代不动点理论加以讨论[13]。以上解答都没有考虑预张力。顾瓈琳研究了在均布荷载作用下的受有预张力的弹性薄膜大挠度问题，给出了中心和边缘处弹性特征的一系列图表[14]。基于该文献并没有给出在均布荷载作用下受有预张力的弹性薄膜大挠度问题的一般解，而且其表达式可用于薄膜预张力测量技术的理论分析，本文的研究工作是有价值的。

1 基本方程和边界条件

设轴对称圆薄膜面内任一点 r 处的径向位移为 u，垂直挠度为 w，径向应变为 ε_r 和环向应变为 ε_t（均从薄膜施加预张力后算起），因此，圆薄膜大挠度问题的几何方程可表示为

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}+\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right)^2,\\ \varepsilon_t &= \frac{u}{r},\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

考虑预张力的弹性方程[14]为

$$\left.\begin{aligned}N_r &= \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_r+\nu\varepsilon_t)+N_0=\\ &\frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}+\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right)^2+\nu\frac{u}{r}\right]+N_0,\\ N_t &= \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_t+\nu\varepsilon_r)+N_0=\\ &\frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{u}{r}+\nu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}+\frac{1}{2}\nu\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right)^2\right]+N_0,\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

式中：N_r 和 N_t 分别为单位长度的径向和环向薄膜力，N_0 为单位长度的预张力，h 为薄膜厚度，E 为杨氏弹性模量，ν 为泊松比。设薄膜所受的均布荷载为 q，基于小转角假设，面外的整体平衡方程为[7,9]

$$N_r\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}=-\frac{1}{2}qr,\tag{3}$$

考虑单元体的平衡，面内平衡方程为

$$N_t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rN_r),\tag{4}$$

由式(2)并结合式(4)，可得

$$u=\frac{r}{Eh}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rN_r)-\nu N_r-N_0(1-\nu)\right],\tag{5}$$

将式(5)代入式(2)，有

$$r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2N_r)\right]+\frac{Eh}{2}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right)^2=0,\tag{6}$$

于是，受有预张力的圆薄膜均布荷载下的基本方程为

$$\left.\begin{aligned}&N_r\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}=-\frac{1}{2}qr,\\ &r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2N_r)\right]+\frac{Eh}{2}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right)^2=0,\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

设薄膜半径为 a，具有预张力的圆薄膜其固定夹紧的边界条件是

$$r=a\ \text{时},w=0,u=0,\tag{8}$$

以及 $r=0$ 时，N_r 为有限值。

2 求解

引入下列无量纲参数

$$\left.\begin{aligned}&x=\frac{r^2}{a^2},\quad y=[3(1-\nu^2)]^{1/2}\frac{w}{h},\quad \varphi=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\\ &S_r=\frac{-6(1-\nu^2)a^2}{Eh^3}N_r,\\ &S_0=\frac{-6(1-\nu^2)a^2}{Eh^3}N_0,\\ &Q=\frac{[3(1-\nu^2)]^{3/2}a^4}{2Eh^4}q,\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

基本方程(7)无量纲化为

$$\left.\begin{aligned}&S_r\varphi=Q,\\ &\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(xS_r)=\varphi^2,\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

消去 φ，并令 $z=xS_r$，则得

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}=\frac{(Qx)^2}{z^2},\tag{11}$$

相应的边界条件为

$$\text{当}\ x=1\ \text{时},2z'-(1+\nu)z=S_0(1-\nu),\tag{12}$$

设方程(11)的某一特解为 $z_1(x)$，则有变换

$$z(x)=a^kz_1(x_1),x_1=ax+b,\tag{13}$$

将式(13)代入式(11)中，有

$$a^{4+3k}\frac{\mathrm{d}^2z_1}{\mathrm{d}{x_1}^2}=\frac{(x_1Q-bQ)^2}{{z_1}^2},\tag{14}$$

若 $k=-4/3$ 且 $b=0$，则式(14)恒成立。变换(13)给出的函数 $z(x)$ 是方程(11)的解。再引入变换

$$f(y)=Q^{2/3}z,\quad y=Qx,\tag{15}$$

将式(15)代入式(11)，得

$$\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}y^2}=\frac{y^2}{f^2},\tag{16}$$

式(16)的解为已知[9,15]

$$f(y)=-y+0.5y^2+0.1666667y^3+0.0902778y^4+0.0590278y^5+0.0428240y^6+0.0332065y^7+0.0269718y^8+0.0226708y^9+0.0195637y^{10}+0.0172384y^{11}+\cdots, \quad (17)$$

回到原变量,得

$$z(x)=Q^{-2/3}f(Qx), \quad (18)$$

这只是方程(11)的一个特解。由式(13),方程(11)的一般解为

$$z(x)=a^{-4/3}Q^{-2/3}f(aQx)。 \quad (19)$$

令 $a_1=aQ$ 为新的积分常数,一般解(19)化为

$$z(x)=a_1^{-4/3}Q^{2/3}f(a_1x), \quad (20)$$

将式(20)代入式(12)可得确定 a_1 的条件

$$2a_1f'_y(a_1)-(1+\nu)f(a_1)-a_1^{4/3}Q^{-2/3}S_0(1-\nu)=0。 \quad (21)$$

3　积分常数

表 1 给出了按式(21)确定的积分常数 a_1 值。

结果 $Q^{-2/3}S_0=0$ 时,相当于无预张力的情形,文献[7]中积分常数的 a_1 值在表 2 中列出。

表 1　积分常数 a_1

$Q^{-2/3}S_0$	$\nu=0.250$	$\nu=0.275$	$\nu=0.300$	$\nu=0.325$	$\nu=0.350$
0	0.405 340 1	0.397 808 9	0.390 049 8	0.382 051 8	0.373 803 4
−0.5	0.297 059 8	0.291 704 7	0.286 195 1	0.280 523 5	0.274 681 5
−1.0	0.199 540 6	0.196 428 6	0.193 216 0	0.189 897 2	0.186 466 1
−1.5	0.125 616 9	0.124 112 5	0.122 548 1	0.120 919 8	0.119 223 5
−2.0	0.077 227 8	0.076 576 2	0.075 893 0	0.075 176 0	0.074 422 4
−2.5	0.048 107 5	0.047 832 1	0.047 541 4	0.047 234 1	0.046 908 8
−3.0	0.030 972 7	0.030 852 3	0.030 724 8	0.030 589 3	0.030 445 1
−3.5	0.020 730 2	0.020 674 5	0.020 615 3	0.020 552 1	0.020 484 7
−4.0	0.014 405 5	0.014 378 0	0.014 348 7	0.014 317 4	0.014 283 9
−4.5	0.010 353 2	0.010 338 8	0.010 323 3	0.010 306 8	0.010 289 1

表 2　比较积分常数 a_1

a_1	$\nu=0.250$	$\nu=0.275$	$\nu=0.300$	$\nu=0.325$	$\nu=0.350$
文献[7]结果	0.405 000 0	0.397 000 0	0.390 000 0	0.382 000 0	0.374 000 0
此文结果	0.405 340 1	0.397 808 9	0.390 049 8	0.382 051 8	0.373 803 4

可以看出,两者很相近,只是当 $\nu=0.275$ 时笔者与文献[7]的结果稍有差异。

4　弹性特征

现在考虑弹性特征,由 $z=xS_r$ 得

$$S_r=\frac{z(x)}{x}=a_1^{-1/3}Q^{2/3}\frac{f(a_1x)}{a_1x}, \quad (22)$$

由式(10),有

$$\varphi=a_1^{4/3}Q^{1/3}xf^{-1}(a_1x), \quad (23)$$

令 $m=a_1x$,对式(23)积分一次,可得中心处挠度

$$y_0=-Q^{1/3}a_1^{-2/3}\int_0^{a_1}mf^{-1}(m)\mathrm{d}m, \quad (24)$$

其中,

$$f^{-1}(m)m=-1-0.5m-0.4166667m^2-0.3819444m^3-0.3645833m^4-0.3559028m^5-0.3524099m^6-0.3523997m^7-0.3549347m^8-0.3594569m^9-0.3656161m^{10}-\cdots, \quad (25)$$

可得

$$w(a_1)=-a_1^{-2/3}\int_0^{a_1}mf^{-1}(m)\mathrm{d}m=a_1^{1/3}+0.25a_1^{4/3}+0.1388889a_1^{7/3}+0.0954861a_1^{10/3}+0.0729167a_1^{13/3}+0.0593171a_1^{16/3}+0.0503443a_1^{19/3}+0.0440500a_1^{22/3}+0.0394372a_1^{25/3}+0.0359457a_1^{28/3}+0.0332378a_1^{31/3}+\cdots, \quad (26)$$

由式(22),可得径向薄膜力为

$$N_r=\frac{Eh^3}{6(1-\nu^2)a^2}Q^{2/3}a_1^{-1/3}\frac{f(m)}{-m}, \quad (27)$$

此处记

$$g(m)=\frac{f(m)}{-m}=1.0-0.5m-0.1666667m^2-0.0902778m^3-0.0590278m^4-0.0428240m^5-0.0332065m^6-0.0269718m^7-0.0226708m^8-0.0195637m^9-0.0172384m^{10}, \quad (28)$$

由式(4),有

$$N_t = \frac{Eh^3}{6(1-\nu^2)a^2}Q^{2/3}a_1^{-1/3}\left[\frac{f(m)}{m} - 2f'_m(m)\right], \tag{29}$$

此处记

$$h(m) = \left[\frac{f(m)}{m} - 2f'_m(m)\right] = 1.0 - 1.5m - 0.8333335m^2 - 0.6319446m^3 - 0.5312502m^4 - 0.4710640m^5 - 0.4316845m^6 - 0.4045770m^7 - 0.3854036m^8 - 0.3717103m^9 - 0.3620064m^{10}, \tag{30}$$

在薄膜中心处,即当 $x=0$ 时,有

$$N_r(0) = N_t(0) = \frac{Eh^3}{6(1-\nu^2)a^2}Q^{2/3}a_1^{-1/3}, \tag{31}$$

此时 N_r 和 N_t 均为最大且有限。通过计算可知,在 $m \leqslant 0.47011164$ 时,N_r 和 N_t 均为正值。由表 1 可知 $a_1 \leqslant 0.47011164$,故得到的一般解是无褶皱解,满足稳定条件。

5 结 论

基于 Föppl-von Kármán 非线性薄膜计算理论,求解了在均布荷载作用下受有预加张力的弹性薄膜大挠度问题,推广了 Hencky 变换,给出了圆薄膜中心挠度,径向和环向薄膜内力的幂级数形式计算公式。通过对解的分析可以得到如下结论:1) 当预加张力相对于荷载很小的情况下,解答趋近于 Hencky 理论结果;2) 当预加张力相对于荷载很大的情况下,解答趋近于线性理论结果;3) 在荷载不变的情况下,对薄膜施加预张力可减小挠度,同时避免薄膜产生皱缩,增加其稳定性。笔者工作可用于薄膜预张力测量技术的理论分析。

参考文献:

[1] RUGGIERO E J, INMAN D J. Gossamer spacecraft: recent trends in design, analysis, experimentation, and control[J]. Journal of Spacecraft Rockets. 2006, 43(1):10-24.

[2] WEINTSCHKE H J. Stable and unstable axisymmetric solution for membranes of revolution [J]. ASME Journal of Applied Mechanics Review. 1989, 42 (11): 289-294.

[3] COMAN C D, HAUGHTON D M. Localized wrinkling instabilities in radially stretched annular thin films [J]. Acta Mechanics. 2006, 185(3/4): 179-200.

[4] COMAN C D, BASSOM A P. On the wrinkling of a pre-stressed annular thin film in tension [J]. Journal of Mechanics and Physics of Solids, 2007, 55 (8): 1601-1617.

[5] ZHENG Z L, LIU C J, HE X T, et al. Free vibration analysis of rectangular orthotropic membranes in large deflection [J]. Mathematical Problems in Engineering, 2009: 1-9.

[6] PLAUT R H. Linearly elastic annular and circular membranes under radial, transverse, and torsional loading, part I: large unwrinkled axisymmetric deformations [J]. Acta Mechanics, 2008, 202(2): 79-99.

[7] 钱伟长. 弹性圆薄板大挠度问题[M]. 北京: 科学出版社, 1954.

[8] 邹定祺, 陈山林, 王玳瑜. 预张力圆板大挠度问题的幂级数解[J]. 重庆建筑工程学院学报, 1985, 6(3): 38-52.
ZOU DING-QI, CHEN SHAN-LIN, WANG DAI-YU. Power series solution for large deflection problem of pretension circular plate [J]. Journal of Chongqing Jianzhu University, 1985, 6(3):38-52.

[9] HENCKY H. über den spannungszustand in kreisrunden Platten mit verschwindender Biegungssteifigkeit [J]. Zeitschrift Für Mathematik und Physik, 1915, 63: 311-317.

[10] ALEKSEEV S A. Elastic annular membranes with a stiff centre under the concentrated force[J]. Engineering Corpus. 1951, 10: 71-80.

[11] CHIEN W Z, WANG Z Z, XU Y G, et al. The symmetrical deformation of circular membrane under the action of uniformly distributed loads in its central portion [J]. Applied Mathematics and Mechanics:English Edition,1981, 2(6): 653-688.

[12] CHEN S L, ZHENG Z L. Large deformation of circular membrane under the concentrated force [J]. Applied Mathematics and Mechanics: English Edition, 2003, 24 (1): 28-31.

[13] HAO J P, YAN X L. Exact solution of large deformation basic equations of circular membrane under central force [J]. Applied Mathematics and Mechanics:English Edition,2006, 27(10): 1333-1337.

[14] 顾瑗琳. 在均布载荷作用下受有预加张力的弹性圆薄膜大挠度问题[J]. 物理学报,1956, 12(4): 319-338.
KU CHIU-LIN. On the large deflection of elastic circular membrane with initial tension under uniformly distributed load [J]. Journal of Physics, 1956, 12(4): 319-338.

[15] 曾又林. 关于圆薄膜的 Hencky 解[J]. 上海力学, 1995, 16 (2): 164-165.
ZENG YOU-LIN. On the Hencky's solution of circular membrane[J]. Shanghai Journal of Mechanics, 1995, 16 (2): 164-165.

(编辑 赵 静)