

文章编号:1000-582X(2010)04-001-08

## 汽车主动悬架 $H_2/H_\infty$ 多目标控制 线性矩阵不等式方法

李以农<sup>1,2</sup>, 郑玲<sup>1</sup>, 罗铭刚<sup>1</sup>, 米林<sup>2</sup>

(1. 重庆大学机械传动国家重点实验室, 重庆 400044;

2. 重庆理工大学汽车零部件制造及检测技术教育部重点实验室, 重庆 400050)

**摘要:**采用七自由度整车模型,以实现较好的平顺性和操纵稳定性为目标,选取路面垂直速度扰动到输出平顺性评价信号传递函数的  $H_2$  范数为平顺性指标,路面垂直速度扰动到输出操纵稳定性评价信号传递函数的  $H_\infty$  范数为操纵稳定性指标,设计了基于 LMI(linear matrix inequality 线性矩阵不等式)算法的主动悬架  $H_2/H_\infty$  多目标输出反馈控制器。研究表明,该控制器能在有效改善汽车的平顺性的同时不过分降低操纵稳定性,较好地解决了平顺性与操纵稳定性指标之间的矛盾。

**关键词:**汽车悬架;平顺性;操纵性;线性矩阵不等式;多目标优化

**中图分类号:** O231.2;U463

**文献标志码:** A

## Multi-objective and $H_2/H_\infty$ control of vehicle active suspension based on LMI

LI Yi-nong<sup>1,2</sup>, ZHENG Ling<sup>1</sup>, LUO Ming-gang<sup>1</sup>, MI Lin<sup>2</sup>

(1. State Key Laboratory of Mechanical Transmission, Chongqing University,  
Chongqing 400044, P. R. China;

2. Ministry of Education Key Laboratory of Manufacture and Test Techniques for Automobile Parts,  
Chongqing Institute of Technology, Chongqing 400050, P. R. China)

**Abstract:** A multi-objective and mixed  $H_2/H_\infty$  controller based on LMI (linear matrix inequality) is developed to balance ride comfort and handling stability performance of vehicle. The multi-objective optimal control law is devised for an active suspension system of seven degree-of-freedom full-car model. Norm  $H_2$  of the transfer function from road profile velocity disturbance to output evaluating signal is selected as the evaluating index of ride comfort performance, and norm  $H_\infty$  of the transfer function from road profile velocity disturbance to output evaluating signal is selected as the evaluating index of handling stability performance. The results from the simulation demonstrate that the controller obtains a good performance of ride comfort with the less expense of the handling stability.

**Key words:** vehicle suspensions; riding qualities; handling stability; linear matrix inequality; multiobjective optimization

收稿日期:2009-12-20

基金项目:国家自然科学基金资助项目(50875270);教育部重点实验室开放基金资助项目(2009KLMT05);重庆市科技项目(CSTC,2008BA6025;CSTC,2008AC6097)

作者简介:李以农(1961-),男,重庆大学教授,博士生导师,主要从事汽车系统动力学与控制、振动噪声控制等研究,  
(Tel)023-65106094;(E-mail)ynli@cqu.edu.cn。

汽车悬架系统的结构形式和控制规律是保证乘坐舒适性、操纵稳定性和安全性的重要因素。如何同时提高这 3 项性能指标,或者在提高某一重要指标的同时又不过分降低其他指标,是研究汽车主动悬架系统控制律的关键。国内外众多学者对主动悬架进行了研究,已有许多基于汽车主动悬架系统的控制方法,如最优控制、预测控制、滑模控制、可靠控制等<sup>[1-4]</sup>。这些方法大多是针对单一目标,多数只强调平顺性,而对汽车的操纵稳定性却考虑的不多。当实际运行工况发生变化时,设计的控制器不能满足给定的性能指标要求。事实上,汽车轮胎与路面的相互作用对汽车机动过程中的稳定性、停车距离以及减小对路面的损坏都有很大的影响。另一方面,许多文献都集中在 1/4 模型和 1/2 模型的控制律的研究上,采用整车模型进行这方面研究的文献还不多<sup>[5-7]</sup>。文献[8]采用四自由度半车模型,基于线性矩阵不等式(linear matrix inequality, LMI)方法设计了汽车主动悬架多通道多目标  $H_2/H_\infty$  混合控制器,通过仿真获得了较好的操纵稳定性和行驶平顺性。文献[9]采用整车模型设计了  $H_\infty$  控制器,采用降阶方法对车辆的乘坐舒适性进行了分析。文献[10]采用线性变参数方法(LPV)来改善悬架系统控制的鲁棒性。若要对车辆的各种性能进行比较全面的分析研究,如考虑车辆的俯仰、侧倾,除必须借助于整车模型外,还需对乘坐舒适性、操纵稳定性和安全性三项性能指标进行综合考虑。而  $H_\infty$  控制器虽然在系统出现不确定性时具有较好的鲁棒稳定性和干扰抑制能力,但这是以牺牲系统的其他性能为代价的,基于 LMI 的  $H_2/H_\infty$  控制方法较好地解决了这一不足,因此文中基于七自由度整车模型,采用多目标控制的基于 LMI 的  $H_2/H_\infty$  控制方法设计了整车模型主动悬架控制器,综合考虑平顺性和操纵稳定性指标,通过计算机仿真对所设计的控制器的控制性能进行了分析研究。

## 1 整车模型

七自由度线性整车模型(忽略发动机、座椅、乘客等因素的影响)如图 1 所示<sup>[11]</sup>。图中各符号意义如下:

$M_s, I_\theta, I_\varphi$ —车身质量、车身侧倾转动惯量和俯仰转动惯量;

$m_{t1}, m_{t2}, m_{t3}, m_{t4}$ —非悬挂质量(分别为左前、右前、左后、右后,下同);

$k_{s1}, k_{s2}, k_{s3}, k_{s4}$ —悬挂刚度;

$k_{t1}, k_{t2}, k_{t3}, k_{t4}$ —轮胎刚度;

$c_{s1}, c_{s2}, c_{s3}, c_{s4}$ —阻尼器阻力系数;

$u_1, u_2, u_3, u_4$ —作用于悬架的控制力;

$x_{t1}, x_{t2}, x_{t3}, x_{t4}$ —非悬挂质量位移;

$x_{s1}, x_{s2}, x_{s3}, x_{s4}$ —车身与悬架连接处的位移;

$x_c, \theta, \varphi$ —车身的垂直位移、侧倾角、俯仰角;

$l_{xf}, l_{xr}$ —前后车轴至车身质心的距离;

$l_{yjf}, l_{yjr}$ —前后车轴轮距的  $\frac{1}{2}$ 。

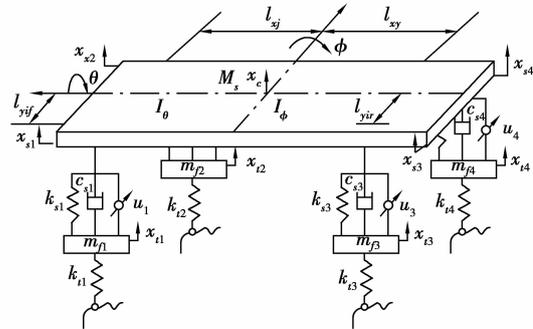


图 1 七自由度线性整车模型

令轮胎位置向量  $\mathbf{x}_t = [x_{t1} \ x_{t2} \ x_{t3} \ x_{t4}]^T$ 、车身运动向量  $\mathbf{X}_c = [x_c \ \theta \ \varphi]^T$ 、主动悬架控制力向量  $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4]^T$ 、车身与悬架的 4 个连接点处的位置向量  $\mathbf{x}_s = [x_{s1} \ x_{s2} \ x_{s3} \ x_{s4}]^T$ 、悬架动挠度向量  $\mathbf{x}_q = [x_{q1} \ x_{q2} \ x_{q3} \ x_{q4}]^T$ , 易知,  $\mathbf{x}_q = \mathbf{x}_s - \mathbf{x}_t$ 。

根据悬架的特点和几何关系可以得出:

$$\mathbf{x}_s = \mathbf{H}\mathbf{X}_c, \quad (1)$$

$$\text{式中, } \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & l_{yjf} & l_{xf} \\ 1 & -l_{yjf} & l_{xf} \\ 1 & l_{yjr} & -l_{xr} \\ 1 & -l_{yjr} & -l_{xr} \end{bmatrix}。$$

根据牛顿第二定律,系统总的运动方程可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_b \ddot{\mathbf{X}}_c &= -\mathbf{H}^T \mathbf{K}_s (\mathbf{H}\mathbf{X}_c - \mathbf{x}_t) - \\ &\quad \mathbf{H}^T \mathbf{C}_s (\mathbf{H}\dot{\mathbf{X}}_c - \dot{\mathbf{x}}_t) + \mathbf{H}^T \mathbf{u}, \\ \mathbf{M}_t \ddot{\mathbf{x}}_t &= \mathbf{K}_s (\mathbf{H}\mathbf{X}_c - \mathbf{x}_t) + \mathbf{C}_s (\mathbf{H}\dot{\mathbf{X}}_c - \dot{\mathbf{x}}_t) - \\ &\quad \mathbf{u} - \mathbf{K}_t (\mathbf{x}_t - \mathbf{w}). \end{aligned} \quad (2)$$

式中  $\mathbf{M}_b = \text{diag}(M_s, I_\theta, I_\varphi)$ ,

$\mathbf{K}_s = \text{diag}(k_{s1}, k_{s2}, k_{s3}, k_{s4})$ ,

$\mathbf{C}_s = \text{diag}(c_{s1}, c_{s2}, c_{s3}, c_{s4})$ ,

$\mathbf{M}_t = \text{diag}(m_{t1}, m_{t2}, m_{t3}, m_{t4})$ ,

$\mathbf{K}_t = \text{diag}(k_{t1}, k_{t2}, k_{t3}, k_{t4})$ 。

令  $\hat{\mathbf{x}} = [\mathbf{X}_c \ \mathbf{x}_t]^T$ , 则上述运动微分方程可以表示为

$$M \ddot{\hat{x}} + D \dot{\hat{x}} + K \hat{x} = E_1 \omega + E_2 u. \quad (3)$$

式中

$$M = \begin{bmatrix} M_b & \\ & M_t \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} H^T K_s H & -H^T K_s \\ -K_s H & K_s + K_t \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} H^T C_s H & -H^T C_s \\ -C_s H & C_s \end{bmatrix}, E_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ K_t \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} H^T \\ -I \end{bmatrix}$$

选取状态向量  $\tilde{x} = [\hat{x} \quad \dot{\hat{x}}]^T$ , 则(3)式的状态空间形式为:

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A} \tilde{x} + \tilde{B}_1 \omega + \tilde{B}_2 u. \quad (4)$$

式中

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}E_1 \end{bmatrix}, \tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}E_2 \end{bmatrix}.$$

由于任何非奇异线性变换不会改变系统的动态特性,可将上面状态方程中的地面垂直位移扰动  $\omega$  转化为地面垂直速度扰动  $\dot{\omega}$ 。

定理 1<sup>[12]</sup>: 如果式(3)中的系数矩阵  $K$  是可逆的,则对于适当维数的任意非奇异矩阵  $L$  存在状态变换  $x = L \left[ \tilde{x} + \begin{bmatrix} K^{-1}E_1 \\ 0 \end{bmatrix} \omega \right]$  将式(4)变换为:

$$\dot{x} = Ax + B_1 \dot{\omega} + B_2 u. \quad (5)$$

式中  $A = L \tilde{A} L^{-1}$ ,  $B_1 = -L \begin{bmatrix} K^{-1}E_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $B_2 = L \tilde{B}_2$ 。

用  $\dot{\omega}$  代替  $\omega$  是由于  $\dot{\omega}$  比  $\omega$  含有更多的路面扰动信息,更能反映实际路面轮廓变化的白噪声特性<sup>[13]</sup>。

在上式中选择  $X_C, x_t, \dot{X}_C, \dot{x}_t$  作为状态变量,并将悬架扰动度  $x_{st}$  作为状态变量的一部分,用向量  $\psi \in R^{3 \times 1}$  代替向量  $x_{st} \in R^{4 \times 1}$  可以减少系统状态变量的个数。

在这里可以使用一个假想的刚性结构来连接汽车的四个车轮,加在四个轮子上的约束使它们刚性的一起运动,这个假想的刚性车轮结构具有垂向、侧倾和俯仰三个方向的运动,运动向量可表示为:  $X_w = [x_{cw} \quad \theta_w \quad \varphi_w]^T$ 。

车身的垂向、侧倾、俯仰运动与假想车轮结构的垂向、侧倾、俯仰运动之间的关系为

$$\psi = X_C - X_w. \quad (6)$$

由于实际中的车轮是相互独立地运动,考虑到任何运动可以分解为刚性运动与非刚性运动,分别用  $x_{t_{rigid}}, x_{t_{nonrigid}}$  表示刚性运动部分和非刚性运动部

分,则实际的车轮运动向量可以写为:

$$x_t = x_{t_{rigid}} + x_{t_{nonrigid}}. \quad (7)$$

其中,  $x_{t_{rigid}} = H X_w$ 。

易知

$$x_{st} = H \psi - x_{t_{nonrigid}}. \quad (8)$$

由于  $H$  不是方阵,可以利用广义逆矩阵得出

$$x_t = H H^+ x_t + (I - H H^+) x_t. \quad (9)$$

通过比较(7)式和(9)式,可以得出

$$X_w = H^+ x_t, x_{t_{nonrigid}} = (I - H H^+) x_t. \quad (10)$$

从(8)式和(10)式可以得出

$$x_{st} = H(X_C - H^+ x_t) + (H H^+ - I) x_t = H \psi + (H H^+ - I) x_t. \quad (11)$$

考虑到  $H^+ H H^+ = H^+$ 。

从式(11)可以得出

$$H^+ (x_{st} - H \psi) = 0.$$

显然,向量  $\psi \in R^{3 \times 1}$  与向量  $x_{st} \in R^{4 \times 1}$  线性相关。

现在,又将  $\psi$  作为新状态向量的一部分,则总的状态向量可以定义为

$$x = \begin{bmatrix} \psi \\ x_t \\ \dot{X}_C \\ \dot{x}_t \end{bmatrix} - N \omega \in R^{14}, \begin{bmatrix} \psi \\ x_t \\ \dot{X}_C \\ \dot{x}_t \end{bmatrix} = L \tilde{x}. \quad (12)$$

式中

$$L = \begin{bmatrix} I & -H^+ & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} I & -H^+ \\ 0 & I \end{bmatrix} K^{-1} E_1.$$

## 2 控制器设计

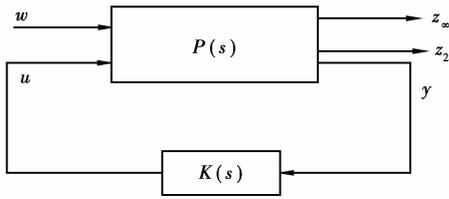
### 2.1 基于 LMI 的 $H_2/H_\infty$ 控制问题描述

对于图 2 所示的多目标输出反馈控制线性时不变系统,可用状态空间形式描述为:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 \omega + B_2 u, \\ z_\infty &= C_1 x + D_{11} \omega + D_{12} u, \\ z_2 &= C_2 x + D_{21} \omega + D_{22} u, \\ y &= C_y x + D_{y1} \omega + D_{y2} u. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

其中  $z \in R^m$  表示被控输出信号,  $y \in R^q$  是测量信号,  $\omega \in R^p$  表示外部输入信号,包括干扰、噪声、参考输入等,  $u \in R^r$  是控制信号,  $P(s)$  表示广义被控对象,包括实际被控对象和加权函数,  $K(s)$  表示所有设计的控制器。

基于 LMI 的  $H_2/H_\infty$  控制问题就是设计一个具有以下状态空间实现的  $H_2/H_\infty$  输出反馈控制律  $u = K(s)y$ 。

图 2  $H_2/H_\infty$  控制框图

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_K x_c + B_K y, \\ u &= C_K x_c + D_K y. \end{aligned} \quad (14)$$

其中:  $x_c \in R^{n_K}$  是控制器的状态向量  $A_K$ 、 $B_K$ 、 $C_K$ 、 $D_K$  是待确定的控制器参数矩阵。

将以上控制器应用到系统后得到闭环系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi} &= A_d \xi + B_d w, \\ z_\infty &= C_{\infty d} \xi + D_{\infty d} w, \\ z_2 &= C_{2d} \xi + D_{2d} w. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式中

$$\begin{aligned} \xi &= \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} A + B_2 D_K C_y & B_2 C_K \\ B_K C_y & A_K \end{bmatrix}, \\ B_d &= \begin{bmatrix} B_1 + B_2 D_K D_{y1} \\ B_K D_{y1} \end{bmatrix}, \\ C_{\infty d} &= [C_1 + D_{12} D_K C_y \quad D_{12} C_K], \\ D_{\infty d} &= D_{11} + D_{12} D_K D_y, \\ C_{2d} &= [C_2 + D_{22} D_K C_y \quad D_{22} C_K], \\ D_{\infty d} &= D_{21} + D_{22} D_K D_y. \end{aligned}$$

分别用  $T_\infty(s)$ 、 $T_2(s)$  表示从  $w$  到  $z_\infty$  和从  $w$  到  $z_2$  的闭环传递函数。则基于 LMI 的  $H_2/H_\infty$  控制的目标就是设计一个线性时不变控制器  $K(s)$ , 使闭环系统满足:

$$1) \| T_\infty(s) \|_\infty < \gamma_0,$$

$$2) \| T_2(s) \|_2 < \nu_0;$$

3) 闭环系统极点位于某个给定的 LMI 区域  $D$  且使得性能指标  $\alpha \| T_\infty(s) \|_\infty + \beta \| T_2(s) \|_2^2$  最小化。

根据线性矩阵不等式理论<sup>[14]</sup>, 形如式(13)的闭环系统是渐进稳定且  $T_\infty(s)$  的  $H_\infty$  范数小于一个给定的目标值  $\gamma_0$  的充要条件是存在一个对称正定矩阵  $P=P^T > 0$ , 使得

$$\begin{bmatrix} A_d P + P A_d^T & B_d & P C_{\infty d}^T \\ B_d^T & -I & D_{\infty d}^T \\ C_{\infty d} P & D_{\infty d} & -\gamma_0^2 I \end{bmatrix} < 0. \quad (16)$$

$T_2(s)$  的  $H_2$  范数小于一个给定的目标值  $\nu_0$  的充要条件是存在一个对称正定矩阵  $Q=Q^T > 0$ ,

使得

$$\begin{bmatrix} A_d Q + Q A_d^T & B_d \\ B_d^T & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (17)$$

$$\text{tr}[C_{2d} Q C_{2d}^T] < \nu_0^2.$$

应用  $H_\infty$  控制理论和  $H_2$  控制理论寻找满足上述任一条件的控制器是可以实现的, 但应用现有的理论, 寻找一个控制器同时满足上述两个条件是无法实现的。为了得到系统的  $H_2/H_\infty$  控制律, 引入 Lyapunov 矩阵  $X=P=Q$ , 使得上述问题简化。至此可以应用线性矩阵不等式理论求解上述问题。由于在这里引进了约束条件  $X=P=Q$ , 得到的结果具有一定的保守性, 如何估计由于约束条件所带来的保守性的大小, 目前还没有有效的方法。

## 2.2 整车模型的 $H_2/H_\infty$ 控制器设计

通常来说, 汽车的平顺性与操纵稳定性是一对矛盾, 平顺性要求车身的垂直加速度、侧倾加速度以及俯仰加速度对于典型的路面输入信号尽可能地小。另一方面, 操纵稳定性(或称为轮胎接地性)要求轮胎受力要尽可能地保持在一个常量水平, 也就是说轮胎要较好地跟踪路面轮廓变化, 因此, 要尽可能地获得变化不大的轮胎变形。整车模型的  $H_2/H_\infty$  控制器设计的目的就是在两者之间进行合理地折衷。

平顺性要求降低车身在几乎整个频率范围内的加速度水平, 对于四分之一模型, 存在一个不变点, 在这个不变点不管是主动悬架还是半主动悬架, 都不能降低其频率响应的值<sup>[15]</sup>。  $H_\infty$  控制是通过抑制传递函数幅频特性的最大幅值来减小输入信号对描述系统品质的评价信号的影响, 悬架特性的不变点成为  $H_\infty$  控制方法控制悬架的最主要的障碍, 将  $H_\infty$  范数作为平顺性指标是不可行的, 许多文献都赞同用均方根值或性能指标向量的  $H_2$  范数作为平顺性指标<sup>[13]</sup>。在文中选择平顺性指标为: 变量  $\ddot{X}_C$  的  $H_2$  范数。则

$$z_2 = \ddot{X}_C = [\ddot{x}_c \quad \ddot{\theta} \quad \ddot{\varphi}]^T. \quad (18)$$

另一方面, 操纵稳定性的控制目标是降低轮胎的动载, 可通过构造一个能反映轮胎动载变化的函数, 并使其对应的传递函数的频率响应值在整个频率范围内尽量保持在一个正常水平上来实现。因此可以选择操纵稳定性指标为: 轮胎变形变化率  $\dot{x}_{ul}$  的  $H_\infty$  范数。则

$$z_\infty = \dot{x}_{ul} = \dot{x}_l - \dot{w}. \quad (19)$$

在实际控制系统中可选用相对位移传感器来量

测动挠度  $x_s$ ,但是由于悬挂质量使得  $x_s$ 中包含悬架变形的静态位移,为了消除静态位移的影响,本文选用  $\dot{x}_s$ 作为输出变量,即

$$y = \dot{x}_s. \quad (20)$$

可以采用软件或硬件的方法从  $x_s$ 获得  $\dot{x}_s$ 。

至此,可以结合(5)式所示的整车模型、(13)式所示的  $H_2/H_\infty$ 控制状态空间形式和(18)、(19)和(20)式所示的性能指标函数及输出函数建立整车模型的闭环控制系统模型。由于篇幅有限,不在此列出模型的各系数矩阵的表达式。

### 3 仿真及结果分析

针对某车型进行了仿真研究,该车型整车振动模型参数如表 1 所示。表 2 为由七自由度整车模型的闭环控制系统(主动悬架系统)和开环控制系统(被动悬架系统)计算得到的相关传递函数的  $H_2/H_\infty$ 范数。

表 1 某车型七自由度全车振动模型参数

$M/\text{kg}$	$I_\varphi/(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	$I_\theta/(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	$l_y/\text{m}$
745.2	768.8	375.2	2.348 0
$m_{t1}, m_{t2}/\text{kg}$	$m_{t3}, m_{t4}/\text{kg}$	$c_{s1}, c_{s2}, c_{s3}, c_{s4}/(\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1})$	$l_{ytr}/\text{m}$
25.35	34.40	714	0.649 0
$l_{yf}/\text{m}$	$l_{xf}/\text{m}$	$l_{xr}/\text{m}$	$k_{s1}, k_{s2}/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$
0.628 0	1.116 1	1.231 9	30 000
$k_{s3}, k_{s4}/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$		$k_{t1}, k_{t2}, k_{t3}, k_{t4}/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	
32 500		181 000	

表 2 传递函数的  $H_2$  范数和  $H_\infty$  范数

指标	被动悬架	主动悬架
$\ T_2(s)\ _2$	77.505 9	25.959 5
垂直: $\ T_{21}(s)\ _2$	38.945 2	17.785 2
侧倾: $\ T_{22}(s)\ _2$	52.747 7	4.416 1
俯仰: $\ T_{23}(s)\ _2$	41.329 4	18.386 9
$\ T_\infty(s)\ _\infty$	3.358 1	6.203 3
前轮: $\ T_{\infty 1}(s)\ _\infty$	2.945 4	4.877 4
后轮: $\ T_{\infty 3}(s)\ _\infty$	3.299 5	4.947 8

为得到基于传感器量测信号  $y$ 、且使得性能指标  $\alpha \|T_\infty(s)\|_\infty^2 + \beta \|T_2(s)\|_2^2$  最小化的主动控制力  $u$ ,取  $\alpha=1, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{14}=10^{-7}, 10^{-6}, 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 1/20, 1/10, 1, 5, 10, 20, 30, 40$ 。

为方便比较平顺性和操纵稳定性指标,做如下归一化处理

$$\tilde{T}_2(s) = \text{diag}\left(\frac{1}{38.95}, \frac{1}{52.75}, \frac{1}{41.33}\right) T_2(s),$$

$$\tilde{T}_\infty(s) = \text{diag}\left(\frac{1}{2.95}, \frac{1}{2.95}, \frac{1}{3.30}, \frac{1}{3.30}\right) T_\infty(s).$$

$\tilde{T}_2(s), \tilde{T}_\infty(s)$ 表示归一化后的闭环传递函数。上式中的对角矩阵中的各对角线元素为表 2 中被动悬架传递函数的  $H_2$  范数和  $H_\infty$  范数的倒数。

通过计算得到传递函数  $\tilde{T}_\infty(s), \tilde{T}_2(s)$ 的  $H_2$  范数、 $H_\infty$  范数与  $\beta$  的关系如图 3 所示。车身垂直、侧倾、俯仰加速度和前后轮胎动变形变化率归一化后的闭环传递函数的  $H_2$  范数和  $H_\infty$  范数与  $\beta$  的关系如图 4 所示。

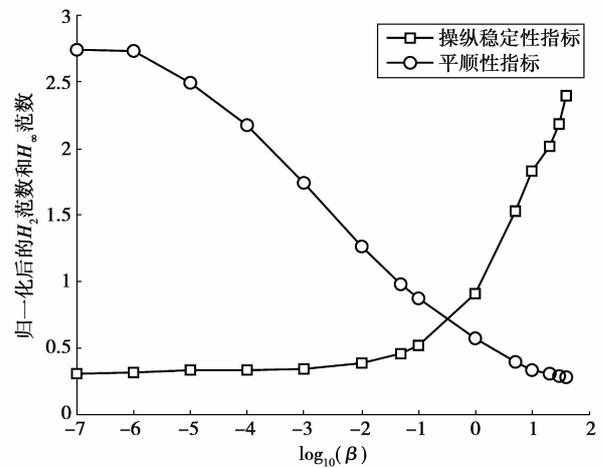


图 3 平顺性和操纵稳定性指标与  $\beta$  关系图

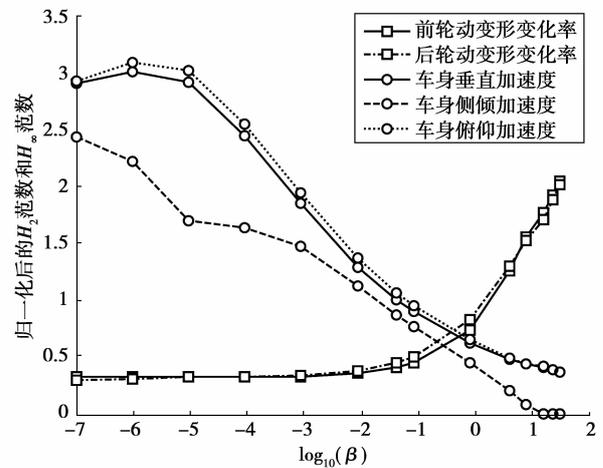


图 4 各项性能指标与  $\beta$  关系图

从图 3 和图 4 中可以看出,随着  $\beta$  的增大,  $H_2$  范数减小,即平顺性提高,  $H_\infty$  范数增加,即操纵稳定

性降低。平顺性的提高是以牺牲操纵稳定性为代价的,反之亦然。

根据图(3)和图(4)得出的各项性能指标与  $\beta$  的关系,可以选择能在平顺性与操纵稳定性之间进行合理折衷的最佳的  $\beta$  值,选择  $\beta$  的原则为:1)能显著提高汽车的平顺性;2)在提高汽车的平顺性同时不过分降低操纵稳定性,有关理论认为<sup>[16]</sup>,只要路面输入满足正态分布,当轮胎动载均方根值不大于轮胎静载的 1/3 时,轮胎就有 99.7% 以上的时间不离地,可以以此作为衡量操纵稳定性是否满足要求的标准;3)对悬架动挠度的影响保持在允许的范围内。按照这 3 条原则,经过反复仿真计算可得到一个最佳的  $\beta$  值,在本例中选择  $\beta=0.05$ 。计算得到此时的闭环系统中的相关传递函数的  $H_2$  范数和  $H_\infty$  范数如表 2 第三列所示。

$\beta=0.05$  时的车身三个方向的加速度和轮胎动变形变化率的频率响应分别如图 5-8 所示。从图中可以看出,在整个频率范围内,主动悬架车身三个方向加速度频率响应峰值都比被动悬架有很大降低,平顺性提高。与四分之一模型一样,车身垂直加速度和车身俯仰加速度都存在一个不变点。而车身侧倾加速度不存在这一不变点。从图 8 可以看出,主动悬架的轮胎动变形变化率频率响应峰值在整个频率范围内都比被动悬架有所升高,操纵稳定性降低,是否能满足操纵稳定性要求,还需对动载均方根值进行分析。

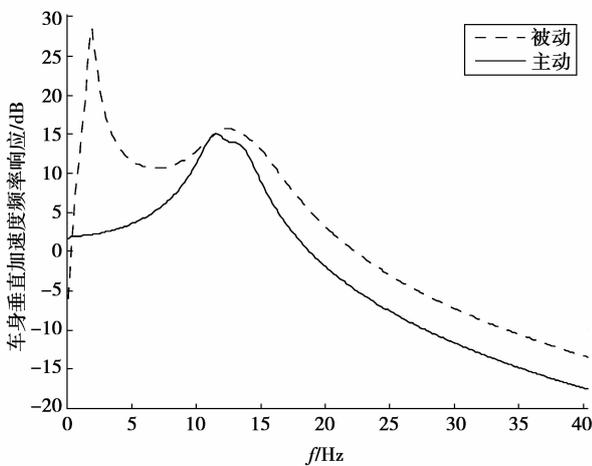


图 5 车身垂直加速度频率响应 ( $\beta=0.05$ )

为了检验  $\alpha=1, \beta=0.05$  时控制器的时域控制效果,在 Matlab/Simulink 环境下选择 B 级路面进行了仿真计算。路面不平度系数  $G_q(n_0) = 64 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{m}^{-1}$ ,取车速  $u=60 \text{ km/h}$ ,参考空间频率

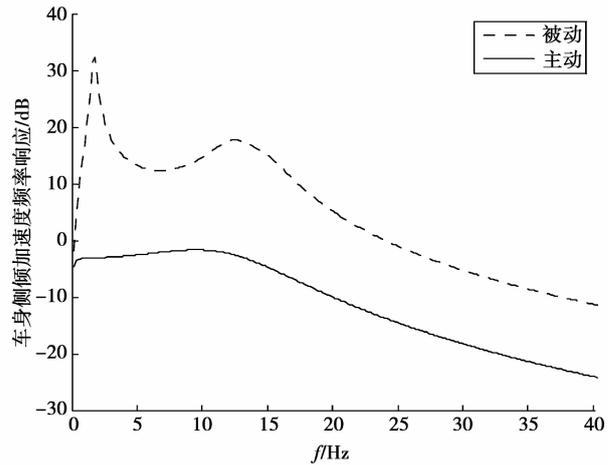


图 6 车身侧倾加速度频率响应 ( $\beta=0.05$ )

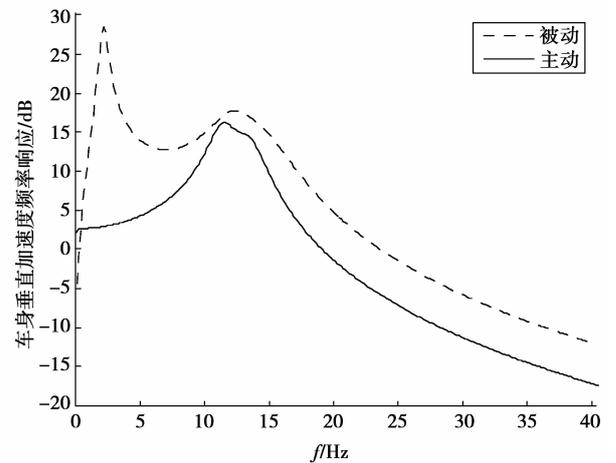


图 7 车身俯仰加速度频率响应 ( $\beta=0.05$ )

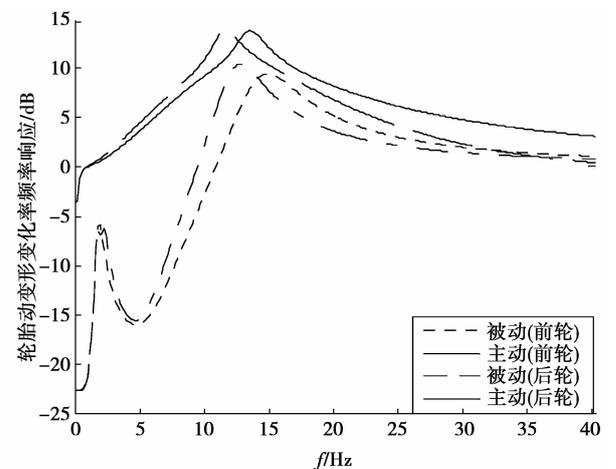


图 8 轮胎动变形变化率频率响应 ( $\beta=0.05$ )

$n_0=0.1 \text{ m}^{-1}$ ,速度谱密度为一白噪声  $\dot{G}_q(f) = (2\pi f)^2 G_q(f) = 4\pi^2 G_q(n_0) n_0^2 u$ ,采样时间  $0.04 \text{ s}$ 。后轮路面输入延时为  $\tau(\tau=\text{轴距}/\text{车速})$ 。为了反映

车身侧倾加速度,左右轮分别选用不同的白噪声种子。

图 9~11 分别为车身垂直、侧倾、俯仰加速度时域响应波形图。可以看出,主动悬架的车身垂直加速度、侧倾加速度和俯仰加速度都比被动悬架有明显改善,控制效果明显。从时域响应得出的均方根值及主动悬架均方根值的降幅见表 3,可以看出,均方根值分别降低了 30.5%,85.5%,59.5%。图 12、图 13 分别为前后轮的轮胎动变形变化率的时域响应波形图,主动悬架的幅值比被动悬架有所升高。轮胎动变形变化率均方根值分别提高了 10.5%,8.5%。主动悬架前后轮胎动载均方根值分别为 38.13 N 和 25.71 N,远远小于前后轮胎静载(分别为 2164 N 和 2072 N)的 1/3,满足操纵稳定性要求。在本例中选择  $\beta=0.05$ ,偏重于提高平顺性,如果要提高操纵稳定性,可适当增大  $\beta$  的取值。

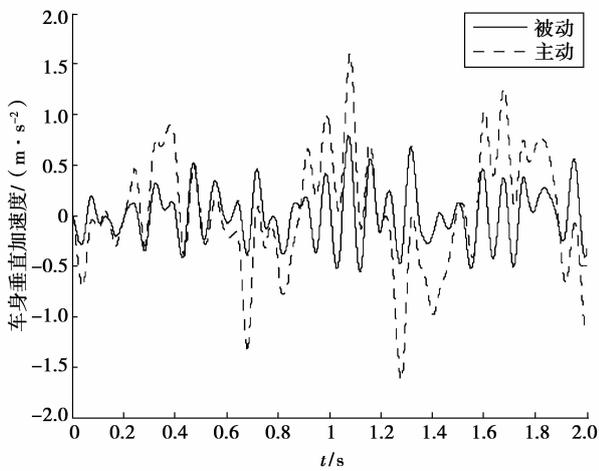


图 9 车身垂直加速度时域波形

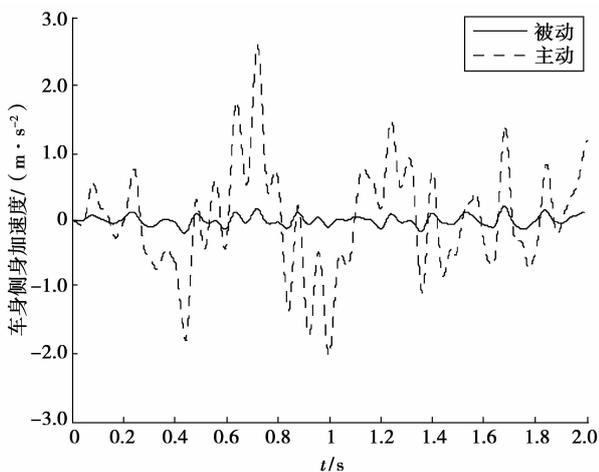


图 10 车身侧倾加速度时域波形

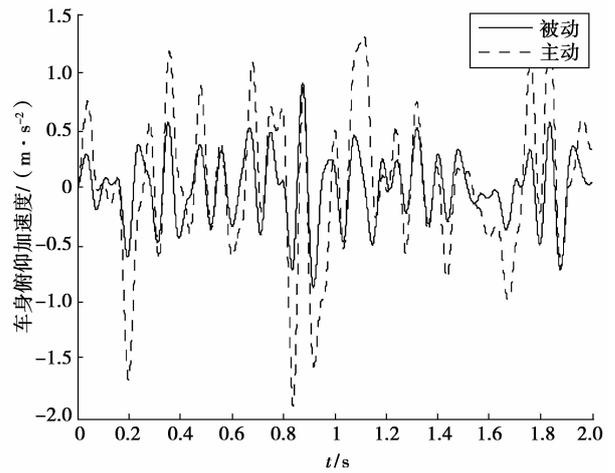


图 11 车身俯仰加速度时域波形

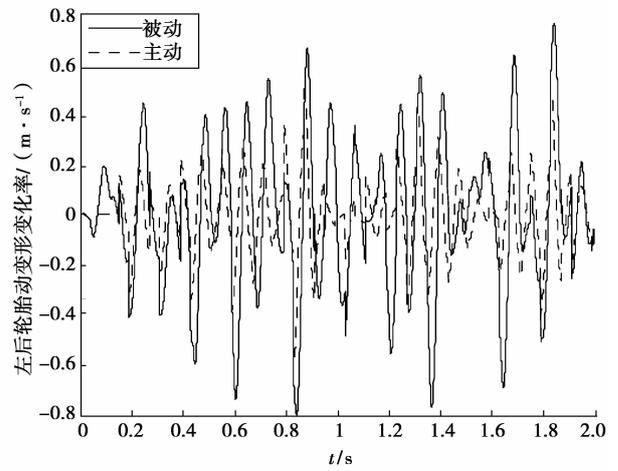


图 12 左前轮胎动变形变化率时域波形

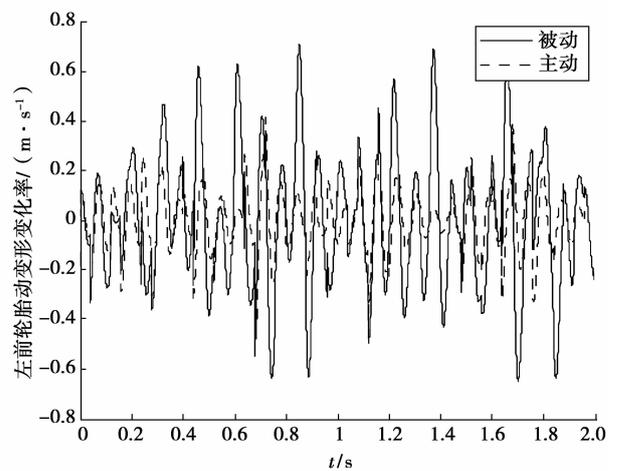


图 13 左后轮胎动变形变化率时域波形

表3 均方根值表

指标	被动悬架	主动悬架	降幅/%
垂直加速度/( $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ )	0.078 5	0.054 6	30.5
侧倾加速度/( $\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$ )	0.104 2	0.015 2	85.5
俯仰加速度/( $\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$ )	0.147 4	0.059 6	59.5
前轮胎动变形变化率 /( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ )	0.122 8	0.135 7	-10.5
后轮胎动变形变化率 /( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ )	0.120 0	0.130 3	-8.5
前轮胎动载/N	34.13	38.13	-11.3
后轮胎动载/N	23.46	25.71	-9.6

## 4 结 论

1) 以实现较好的平顺性和操纵稳定性为目标, 设计了一个基于 LMI 算法的七自由度整车模型主动悬架  $H_2/H_\infty$  多目标输出反馈控制器。仿真结果表明: 该控制器控制效果明显。

2) 通过选择较为合理的平顺性与操纵稳定性性能指标变量, 解决了在设计控制系统时如何在平顺性与操纵稳定性之间进行合理折衷的问题, 克服了其他控制方法在解决该问题时的缺陷。

3) 验证了在建立的七自由度整车模型中, 车身垂直加速度和俯仰加速度频率响应中存在悬架特性的不变点, 但在车身侧倾加速度频率响应中却没有出现。

### 参考文献:

- [1] MARZBANRAD J, AHMADI G, ZOHOOR H, et al. Stochastic optimal preview control of a vehicle suspension [J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, 275 (3/5): 973-990.
- [2] CHAMSEDDINE A, RAHARIJAONAT, NOURAH. Sliding mode control applied to active suspension using nonlinear full vehicle and actuator dynamics [C] // Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision & Control, December 13-15, 2006, San Diego, CA, USA. [s.l.]: IEEE, 2006: 3597-3602.
- [3] JAMES L, KAM Y S. Design of non-fragile controller for active vehicle suspensions [J]. Journal of Vibration and Control, 2005, 11(2): 225 - 243
- [4] 孙建民, 柳贡民. 基于 LMS 自适应滤波的汽车主动悬架研究[J]. 振动与冲击, 2004, 23 (4): 139 -143.  
SUN JIAN-MIN, LIU GONG-MIN. Study on automobile active suspension based on LMS adaptive filter [J]. Journal of Vibration and Shock, 2004, 23(4): 139 -143.
- [5] 宋刚, 林家浩, 吴志刚. 考虑参数不确定性的主动悬架鲁棒  $H_2/H_\infty$  混合控制[J]. 动力学与控制学报, 2008, 6(2): 156-164.
- SONG GANG, LIN JIA-HAO, WU ZHI-GANG. Robust  $H_2/H_\infty$  control of active vehicle suspension subjected to parameter uncertainties [J]. Journal of Dynamics and Control, 2008, 6(2): 156-164.
- [6] 张志勇, 文桂林, 钟志华. 车辆主动悬架的混合  $H_2/H_\infty$  最优保性能控制[J]. 汽车工程, 2007, 29(7): 606-610.  
ZHANG ZHI-YONG, WEN GUI-LIN, ZHONG ZHI-HUA. Mixed  $H_2/H_\infty$  optimal performance control for vehicle active suspension [J]. Automotive Engineering, 2007, 29(7): 606-610.
- [7] 吴忠强, 陈金钉, 王志君, 等. 基于 T-S 模型的主动悬架保性能控制研究 [J]. 汽车工程, 2007, 29 (11): 975-979.  
WU ZHONG-QIANG, CHEN JIN-DING, WANG ZHI-JUN, et al. A study on guaranteed cost control for active suspension based on T-S model [J]. Automotive Engineering, 2007, 29(11): 975-979.
- [8] 于树友, 陈虹. 基于滚动优化的  $H_\infty$ /广义  $H_2$  主动悬架控制[J]. 吉林大学学报, 2007, 37(5): 1164-1169.  
YU SHU-YOU, CHEN HONG.  $H_\infty$ /generalized  $H_2$  control of active suspension based on moving horizon strategy [J]. Journal of Jilin University, 2007, 37(5): 1164-1169.
- [9] 方敏, 汪洪波, 陈无畏. 汽车主动悬架系统  $H_\infty$  控制器的降阶[J]. 控制理论与应用, 2007, 24(7): 553-560.  
FANC MIN, WANG HONG-BO, CHEN WU-WEI. Order-reduction of H-infinity controller for the active suspension system of vehicle [J]. Control Theory & Applications, 2007, 24(7): 553-560.
- [10] ZIN A, SENAME O, GASPARD P, et al. Robust LPV/ $H_\infty$  control for active suspensions with performance adaptation in view of the global chassis control [J]. Vehicle System Dynamics, 2008, 46(10): 889-912.
- [11] 罗铭刚. 基于 LMI 的半主动悬架多目标输出反馈控制研究[D]. 重庆: 重庆大学, 2007.
- [12] LU J B, DE POYSTER M. Multi-objective optimal suspension control to achieve integrated ride and handling performance [J]. IEEE Transactions on Control System Technology, 2002, 10(6): 807-821.
- [13] HROVAT D. Survey of advanced suspension developments and related optimal control applications [J]. Automatica, 1997, 33(10): 1781-1817.
- [14] 俞立. 鲁棒控制—线性矩阵不等式处理方法 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.
- [15] 周云山, 于秀敏. 汽车电控系统理论与设计 [M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1999.
- [16] BARAK P. On a ride control algorithm for heave, pitch and roll motions of a motor vehicle [D]. Detroit, MI, USA: Wayne State University, 1985.

(编辑 张小强)