

文章编号:1000-582X(2010)08-075-05

# 多齿小模数摆线齿轮弦顶距快速测量方法

李朝阳<sup>1,2</sup>, 陈兵奎<sup>1</sup>, 刘景亚<sup>1</sup>

(1. 重庆大学 机械传动国家重点实验室, 重庆 400044;

2. 哈尔滨工业大学 机器人技术与系统国家重点实验室, 黑龙江 哈尔滨 150080)

**摘要:**根据摆线齿轮自身的几何特性提出了一种适合于小模数、齿数多的摆线齿轮的快速检测方法—弦顶法,给出了摆线齿轮理论齿廓以及移距、等距、转角修形等情况下弦顶距的计算公式,编制了计算程序,开发了摆线齿轮弦顶法快速测量软件,并给出了计算和测量实例。

**关键词:**测量;摆线齿轮;弦顶法;弦顶距;

**中图分类号:** TH113.2+1

**文献标志码:** A

## String-top fast measurement method of the more teeth and small modulus cycloidal gears

LI Chao-yang<sup>1,2</sup>, CHEN Bing-kui<sup>1</sup>, LIU Jing-ya<sup>1</sup>

(1. State Key Laboratory of Mechanical Transmission, Chongqing University, Chongqing 400044, P. R. China;

2. State Key Laboratory of Robotics and System, Harbin Institute of Technology, Haerbin 150080, Heilongjiang, P. R. China)

**Abstract:** According to the self-geometric characteristics of the cycloidal gear, string-top method, one kind of fast measurement method which fits to the cycloidal gears that own the characters of small modulus and more teeth, is put forward. The calculating formulas of the distance between the sting and the top of the cycloidal gears' theoretical tooth surface are given, furthermore, the distance of the modified profile of the cycloidal gears under the conditions that moving distance, equal distance and rotating angle are also discussed. The calculating program is written, sting-top method of the cycloidal gear's fast measurement software is developed, calculation and measurement example is given.

**Key words:** measurement; cycloidal gears; sting-top method; distance between the sting and the top

摆线齿轮是摆线泵和摆线针轮减速器的关键零部件,其制造精度的高低将直接决定泵和减速器的运动平稳性、效率和寿命,因此,对其齿廓形状的检测是摆线齿轮零件加工的关键。摆线齿轮测量的方法大致分两类:一是测量齿廓上个别点或者某项参数的特殊点,此类方法包括齿顶根距测量、齿厚测

量、棒料法等,简单易行,但其仅能测量齿廓上个别点,难以准确反映整个齿轮的误差情况,测量精度低;另一类是能反映整个齿轮全貌的全误差测量法,国外摆线齿轮生产厂家主要采用测量仪器为电脑式全程误差测量仪,而国内多采用三坐标测量机或工具显微镜来测量,此类测量方法基本能反映齿廓全

收稿日期:2010-03-01

基金项目:国家科技支撑计划项目(2006BAF01B08);机器人技术与系统国家重点实验室开放研究项目(SKLRs-2009-MS-08)

作者简介:李朝阳(1977-),男,重庆大学博士研究生,主要研究方向为精密传动及控制,(E-mail)li\_zhaoyang77@cqu.edu.cn。  
陈兵奎(通讯作者),男,重庆大学教授,博士生导师,(Tel)02365106247;(E-mail)bkchen@cqu.edu.cn。

貌的误差,有利于检查齿轮精度<sup>[1-3]</sup>。此外,国内研究者也做了其他检测方法的研究。天津大学的李真<sup>[4,5]</sup>等讨论了极坐标测量法和啮合测量法以全面地评定摆线齿轮的各项误差,此方法需加工与测量现场分离。大连铁道学院的关天民<sup>[6,7]</sup>等提出了公法线法,该方法突破了顶根距测法的局限性,测量方法简单,不需专用测量工具即可直接测量,可以检验齿廓的周节误差,也可以直接测出齿廓曲线的法向间隙,但对于齿数多模数小的摆线齿轮的测量,该方法具有局限性。目前现场检测摆线齿轮尺寸误差非常困难,而对于小模数、齿数多的摆线齿轮的检测更无有效快捷的放法<sup>[8-10]</sup>。因此,开展方便、快捷、能直接进行摆线齿轮尺寸误差检测的工艺研究对于控制摆线齿轮的加工精度、促进该行业的快速发展具有重要意义。

笔者提出的弦顶距测量方法及研究成果将突破上述各种检测方法的局限,尤其适合小模数、齿数较多的摆线齿轮的快速检测。

### 1 理想齿廓弦顶距的计算方法

摆线齿轮为平面齿轮,垂直于轴向的任一截面的理论齿廓通常为摆线的等距线<sup>[11-13]</sup>,如图所示,根据摆线齿轮齿廓几何特征可知,对于奇数齿的摆线齿轮齿廓,任意一齿顶偏转 180° 对应位置为一齿根,齿顶与对应齿根连线为齿廓一对称轴;对于偶数齿的摆线齿轮齿廓,任意两对应齿顶或齿根连线均为齿廓的对称轴<sup>[14-16]</sup>。

提出的弦顶法是以摆线齿轮齿廓的几何特征作为测量依据来控制摆线齿轮加工尺寸及及评定外形尺寸公差的一种方法。在弦顶法中,对于奇数齿摆线齿轮将其一齿顶到对应齿廓外公切线的距离作为测量依据;对于偶数齿摆线齿轮将相位 180° 的两齿廓的外公切线间的距离作为测量依据,如图 1 所示。

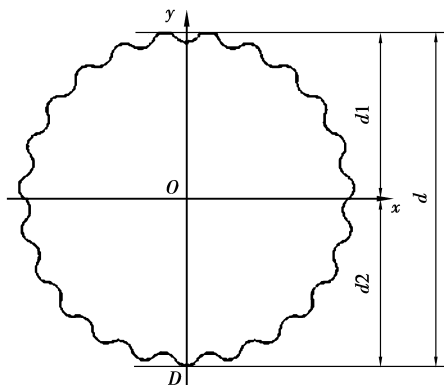


图 1 奇数齿摆线齿轮弦顶距

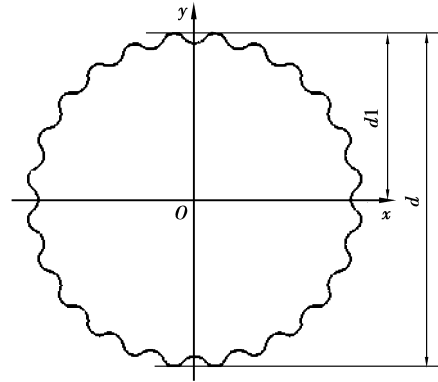


图 2 偶数齿摆线齿轮弦顶距

摆线齿轮理论齿廓方程为:

$$\left. \begin{aligned} x &= R_z \left( \sin\varphi - \frac{K_1}{Z_b} \sin\left(\frac{Z_b\varphi}{Z_b - Z_g}\right) \right) + r_{rz} \cos\gamma, \\ y &= R_z \left( \cos\varphi - \frac{K_1}{Z_b} \cos\left(\frac{Z_b\varphi}{Z_b - Z_g}\right) \right) - r_{rz} \sin\gamma. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sin\gamma &= \frac{\cos\bar{\omega} - K_1 \cos\left(\frac{Z_b\bar{\omega}}{Z_b - Z_g}\right)}{\sqrt{1 + K_1^2 - 2K_1 \cos\left(\frac{Z_g\bar{\omega}}{Z_b - Z_g}\right)}}, \\ \cos\gamma &= \frac{-\sin\bar{\omega} + K_1 \sin\left(\frac{Z_b\bar{\omega}}{Z_b - Z_g}\right)}{\sqrt{1 + K_1^2 - 2K_1 \cos\left(\frac{Z_g\bar{\omega}}{Z_b - Z_g}\right)}}. \end{aligned}$$

式子中,  $R_z$  为针齿分布圆半径;  $Z_b$  为针齿数;  $Z_g$  为摆线齿轮齿数;  $r_{rz}$  为针齿套半径;  $K_1$  为短幅系数,  $K_1 = e \cdot Z_b / R_z$ , 其中  $e$  为偏心率;  $\varphi$  为一角度参数, 范围取  $[0, 2\pi]$  即表达一从坐标  $(0, R_z - r_z)$  开始的完整摆线齿轮齿廓。

在  $\varphi$  角为  $\left[-\frac{\pi}{Z_g}, \frac{\pi}{Z_g}\right]$  确定的一齿内, 根据对称性, 其外公切线平行于 X 轴, 显然有  $\frac{\partial y}{\partial \varphi} = 0$ 。

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \phi} &= R_z \left[ \sin\phi + \frac{K_1}{Z_b - Z_g} \sin\left(\frac{Z_b\phi}{Z_b - Z_g}\right) \right] \\ &\quad - \frac{r_{rz} \left[ -\sin\phi + K_1 \frac{Z_b}{Z_b - Z_g} \sin\left(\frac{Z_b\phi}{Z_b - Z_g}\right) \right]}{\sqrt{1 - K_1 - 2K_1 \cos\left(\frac{Z_g\phi}{Z_b - Z_g}\right)}} \\ &\quad + \frac{r_{rz} K_1 Z_g \left[ \cos\phi - K_1 \cos\left(\frac{Z_b\phi}{Z_b - Z_g}\right) \right] \sin\left(\frac{Z_g\phi}{Z_b - Z_g}\right)}{\left[ 1 + K_1 - 2K_1 \cos\left(\frac{Z_g\phi}{Z_b - Z_g}\right) \right]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (2)$$

由(2)式可以求出外公切点参数  $\varphi_1$ ,故,此齿的外公切线方程为

$$y = R_z \left( \cos\varphi_1 - \frac{K_1}{Z_b} \cos\left(\frac{Z_b\varphi_1}{Z_b - Z_g}\right) \right) - r_{rz} \sin\gamma_1. \quad (3)$$

从而, X 轴到此外公切线的距离  $d_1$  为

$$d_1 = R_z \left( \cos\varphi_1 - \frac{K_1}{Z_b} \cos\left(\frac{Z_b\varphi_1}{Z_b - Z_g}\right) \right) - r_{rz} \sin\gamma_1. \quad (4)$$

假设任意一齿顶顶点为 D, D 点坐标已知为  $(x_D, y_D)$ ,

$$\left. \begin{aligned} x_D &= R_z \left( \sin\varphi_D - \frac{K_1}{Z_b} \sin\left(\frac{Z_b\varphi_D}{Z_b - Z_g}\right) \right) + r_{rz} \cos\gamma_D, \\ y_D &= R_z \left( \cos\varphi_D - \frac{K_1}{Z_b} \cos\left(\frac{Z_b\varphi_D}{Z_b - Z_g}\right) \right) - r_{rz} \sin\gamma_D. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中:  $\varphi_D = \pi + \frac{2n\pi}{Z_b - 1}, n = 0, 1, 2, \dots, Z_b - 2$ .

所以,摆线齿轮中心到齿顶的距离为

$$d_2 = \sqrt{x_D^2 + y_D^2}. \quad (6)$$

对于奇数齿摆线齿轮,弦顶距为

$$d = d_1 + d_2. \quad (7)$$

对于偶数齿摆线齿轮,弦顶距为

$$d = 2d_1. \quad (8)$$

## 2 摆线齿轮齿廓修形情况下弦顶距的计算方法

在摆线类减速机和摆线泵的实际应用当中,摆线齿轮通常需要通过对其齿廓修形以获得理想的传动效果,常用的修形方式有移距修形、等距修形和转角修形三种方式或其组合,下面分别讨论三种修形情况下摆线齿轮弦顶距的计算方法。

### 2.1 移距修形和等距修形

#### 1) 移距修形

摆线齿轮加工中的移距修形是指加工摆线齿轮时,偏心距  $a$ ,砂轮圆弧半径  $r_{rz}$ (相当于针齿半径)及传动比等均等同于标准齿形,仅将工作台中心移动一个微小距离  $\Delta R_z$ (称负移距),使针齿中心圆半径由标准的  $R_z$  缩小为  $R_z + \Delta R_z$ (负移距时,  $\Delta R_z$  应以负值带入),从而使磨出的齿形小于标准齿形,与标准针轮啮合时产生啮合间隙。

根据定义,修形后的齿廓方程为:

$$\left. \begin{aligned} x_{yj} &= (R_z + \Delta R_z) \left( \sin\varphi - \frac{K'_1}{Z_b} \sin\left(\frac{Z_b\varphi}{Z_b - Z_g}\right) \right) + \\ &\quad r_{rz} \left( -\sin\varphi + K'_1 \sin\left(\frac{Z_b\varphi}{Z_b - Z_g}\right) \right) \\ &\quad \sqrt{1 + K'^2_1 - 2K'_1 \cos\left(\frac{Z_b\varphi}{Z_b - Z_g}\right)}, \\ y_{yj} &= (R_z + \Delta R_z) \left( \cos\varphi - \frac{K'_1}{Z_b} \cos\left(\frac{Z_b\varphi}{Z_b - Z_g}\right) \right) - \\ &\quad r_{rz} \left( \cos\varphi - K'_1 \cos\left(\frac{Z_b\varphi}{Z_b - Z_g}\right) \right) \\ &\quad \sqrt{1 + K'^2_1 - 2K'_1 \cos\left(\frac{Z_b\varphi}{Z_b - Z_g}\right)}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

其中:  $K_1 = e \cdot Z_b / (R_z + \Delta R_z)$ 。

#### 2) 等距修形

摆线齿轮加工中的等距修形时指加工摆线齿轮时,机床的调整等同于标准齿形的加工,将砂轮圆弧半径由标准的  $r_{rz}$  增为  $r_{rz} + \Delta r_{rz}$ ,从而使磨出的轮齿小于标准齿形,与标准针轮啮合产生啮合间隙。

根据定义,修形后的齿廓方程为:

$$\left. \begin{aligned} x_{dj} &= R_z \left( \sin\varphi - \frac{K_1}{Z_b} \sin\left(\frac{Z_b\varphi}{Z_b - Z_g}\right) \right) + \\ &\quad (r_{rz} + \Delta r_{rz}) \cos\gamma, \\ y_{dj} &= R_z \left( \cos\varphi - \frac{K_1}{Z_b} \cos\left(\frac{Z_b\varphi}{Z_b - Z_g}\right) \right) - \\ &\quad (r_{rz} + \Delta r_{rz}) \sin\gamma. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

对于移距修形和等距修形,齿廓仍为对称齿廓,按照理论齿廓弦顶距计算方法可分别求得修形后奇数齿和偶数齿摆线齿轮弦顶距。

### 2.2 转角修形法

加工摆线齿轮时,机床的调整与加工标准齿形一样,只是在第一次磨出标准齿形后,让摆线齿轮转动一个微小的角度  $\delta$ ,改变摆线齿轮的初始位置,并按原来方法进行第二次磨削,这样使摆线齿轮的整个齿厚减薄,而齿槽稍有增大。为获得对称齿形,通常需将摆线齿轮沿顺时针和逆时针分别偏转一个微小的角度  $\delta$ 。

此时,摆线齿轮齿廓为组合曲线。任意齿谷左侧齿廓为摆线齿轮顺时针偏转时磨出部分,齿谷右侧齿廓为摆线齿轮逆时针偏转时磨出部分,齿廓方程分别为:

齿谷左侧

$$\begin{pmatrix} x_L \\ y_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\delta & -\sin\delta \\ \sin\delta & \cos\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

齿谷右侧

$$\begin{pmatrix} x_R \\ y_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\delta & \sin\delta \\ -\sin\delta & \cos\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

联立齿廓方程可以求出任一齿顶 D 点坐标  $(x_D, y_D)$ , 从而求得摆线齿轮中心至修形后齿顶的距离  $d_1$ , 按照理论齿廓弦顶距计算方法可分别求得转角修形后奇数齿和偶数齿摆线齿轮弦顶距。

由于转角修形不能产生径向间隙, 故常与移距修形或等距修形组合使用, 计算其弦顶距时, 只需将公式中标准齿廓方程代为移距修形或等距修形后的齿廓方程即可。

### 2.3 测量结果精度分析

弦顶距为摆线齿轮自身的一种几何特性, 由上述分析可知, 可以以此为测量依据来控制摆线齿轮的外形尺寸及公差, 以获得符合图纸精度要求的合格零件。在现场测量过程中, 由于弦顶距的测量为直接测量, 避免了间接测量辅助量具产生的累积误差, 因此, 该方法采用的测量量具的精度既为摆线齿轮外形尺寸的测量精度。

## 3 计算实例及软件开发

为方便应用, 编制了弦顶法的计算程序, 并用 VC++ 软件开发了摆线齿轮快速测量弦顶法应用软件。



图 3 快速测量软件主界面

下面给出一计算实例: 取针齿分布圆半径  $R_c = 100$ ; 针齿数  $Z_b = 24$ ; 针齿套半径  $r_{rz} = 9$  为; 短幅系数  $K_1 = 0.72$ 。

理论齿廓时标准弦顶距为: 187.191 2。移距修形取  $\Delta R_c = -0.02$  时弦顶距为: 187.151 4。等距修形取  $\Delta r_{rz} = 0.02$  时弦顶距为: 187.151 2。转角修形取  $\delta = 0.1^\circ$  时弦顶距为: 187.167 1。移距转角修形取  $\Delta R_c = -0.02, \delta = 0.1^\circ$  时弦顶距为: 187.127 3。等距转角修形取  $\Delta r_{rz} = 0.02, \delta = 0.1^\circ$  时弦顶距为: 187.127 1。

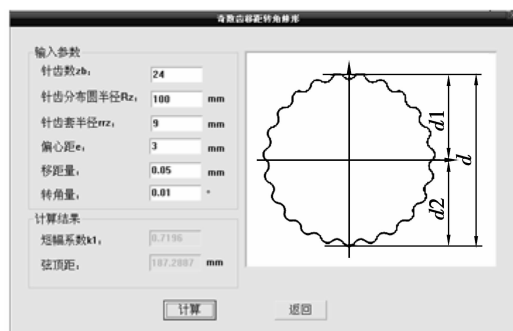


图 4 计算实例

该摆线轮理论齿顶圆直径为  $\Phi 188$ , 图纸要求尺寸为  $\Phi 188_{-0.046}^0$ 。为保证啮合间隙及良好的润滑和传动效率, 采用移距转角修形, 取  $\Delta R_c = -0.02, \delta = 0.1^\circ$ , 此时标准弦顶距为: 187.127 3, 加工时用外径千分尺测量以控制摆线齿轮弦顶距尺寸在 187.08 至 187.13 之间。加工完毕后检测发现尺寸符合图纸要求, 精度良好, 与配对啮合副安装后测试, 效果良好。

在生产实践中, 笔者所在课题组应用弦顶法通过控制弦顶距来控制摆线齿轮加工的外形尺寸及公差, 方便快捷。

## 4 结 论

- 1) 弦顶距是摆线齿轮自身的一种几何特性, 可以用作评定摆线齿轮的外形尺寸及控制摆线齿轮的加工精度。
- 2) 提出的弦顶法适合模数小、齿数多的摆线齿轮外形尺寸的快速检测。
- 3) 开发的弦顶法快速测量软件使用方便, 有效的解决了模数小、齿数多的摆线齿轮快速检测的难题, 促进了行业的发展。

### 参考文献:

- [1] 王幼君, 侯力, 樊庆文. 摆线齿形误差检测分析[J]. 四川联合大学学报: 工程科学版, 1999, 3(4): 130-134. WANG YOU JUN, HOU LI, FAN QING-WEN. Analysis measure method for cycloid tooth error[J]. Journal of Sichuan Union University: Engineering Science Edition, 1999, 3(4): 130-134.
- [2] DING J J, JIANG Z D, LI B, et al. Study on the composite measuring method for small module gears[J]. Key Engineering Materials, 2008, 381/382(7): 83-86.
- [3] MUSURACA J V. Pinion gear depth measurement tool. US: 7401415 [P]. 2008-07-22.
- [4] 李真, 庄葆华, 吴迈, 等. 摆线齿轮误差与测量技术[J].

- 机械传动,1997年,21(1):38-41.
- LI ZHEN, ZHUANG BAO-HUA, WU MAI, et al. Cycloidal gear error and measurement technology [J]. Mechanical Transmission, 1997,21(4):38-41.
- [5] 李真,庄葆华,吴迈,等.摆线齿轮误差测量仪[J].工具技术,1996,30(5):39-42.
- LI ZHEN, ZHUANG BAO-HUA, WU MAI, et al. Cycloidal gear error measurement apparatus [J]. Tool Engineering,1996,30(5):39-42.
- [6] 关天民,李力行,何卫东,等.摆线轮检测的公法线法[J].大连铁道学院学报,1992,13(1):67-72.
- GUAN TIAN-MIN, LI LI-XING, HE WEI-DONG, et al. Measuring methods for cycloidal gears[J]. Journal of Dalian Institute of Railway Technology, 1992,13(1):67-72.
- [7] 齿轮研究室.一种通用的摆线轮检测方法[J].大连铁道学院学报,1992(3):87-90.
- GEAR RESEARCH DIVISION. A measuring method of cycloidal gear in common use[J]. Journal of Dalian Institute of Railway Technology, 1992(3):87-90.
- [8] 石照耀,张万年,林家春.小模数齿轮测量:现状与趋势[J].北京工业大学学报,2008,34(2):113-119
- SHI ZHAO-YAO, ZHANG WAN-NIAN, LIN JIA-CHUN. Present status and trends of measurement of fine pitch gears [J]. Journal of Beijing University of Technology, 2008,34(2):113-119.
- [9] 冯刚,谢华馄,丁华,等.微小齿轮测量技术的现状与发展[J].工具技术,2007,41(4):3-6.
- FENG GANG, XIE HUN-KUN, DING HUA, et al. Present state and development of measuring technology for fine-pitch gear[J]. Tool Engineering, 2007,42(4):3-6.
- [10] 石照耀,费业泰,谢华馄.齿轮测量技术100年回顾与展望[J].中国工程科学,2003,5(9):13-17.
- SHI ZHAO-YAO, FEI YE-TAI, XIE HUAN-HUN. 100 years of gear measurement technology review & prospect[J]. Engineering Science, 2003,5(9):13-17.
- [11] CHEN B K, FANG T T, LI C Y. Gear Geometry of Cycloid Drives [J]. Science in China Series E-Technological Sciences,2008,51(5):598-610.
- [12] LITVIN F L, FENG P H. Computerized design and generation of cycloidal gearings [J]. Mechanism and Machine Theory, 1996,31(7):891-911.
- [13] LAI T S. Geometric design of roller drives with cylindrical meshing elements [J]. Mechanism and Machine Theory, 2005,40(1):55-67.
- [14] LAI T S. Design and machining of the epicycloid planet gear of cycloid drives [J]. International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2006,28(7/8):665-670.
- [15] XIE M, CHEN B K, LI C Y. Dynamics analysis of cycloid reducer[J]. Machine Design & Research, 2008,24:156-158.
- [16] BOSTEIBER D W, KINGSTON L. Design and performance of the cycloid speed reducer[J]. Machine Design, 1956,28(7):65-69.

(编辑 张小强)