

文章编号:1000-582X(2010)10-064-06

# 空间悬链线索单元的非线性有限元分析

晏致涛,刘操兰,李正良

(重庆大学 土木工程学院,重庆 400045)

**摘要:**根据弹性悬链线的理论解析解推导出适用于索结构有限元分析的空间悬链线单元,得到了两节点索单元的切线刚度矩阵和索端张力的精确表达式。采用索单元等效节点荷载的全量算法,通过 Newdon-rapson 双重迭代法实现非线性问题的求解。所提出的基于空间悬链线单元的半解析非线性有限元分析方法可充分考虑几何非线性的影响,实现对任意方向空间荷载下索的初始位形和内力分析。算例表明,该计算方法精确有效。

**关键词:**悬索;索单元;有限元;非线性;悬链线

**中图分类号:**TU311

**文献标志码:**A

## Non-linear finite element analysis based on the spatial catenary cables

YAN Zhi-tao, LIU Cao-lan, LI Zheng-Liang

(College of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, P. R. China)

**Abstract:** According to the elastic catenary theory, this paper derives the spatial catenary cable element from the exact analytical expression, which is used for finite element analysis of the structure. It deduces the precise expression of two-node cable element tangent stiffness matrix and the tension of cable end. The equivalent node load of cable element is expressed by the total load algorithm, and the non-linear equation is solved by double Newdon-rapson method. The proposed non-linear semi-analytical finite element method based on spatial catenary cable element can take full account of the impact of non-linear geometry. The initial configuration and the internal forces on any directional spatial loads can be solved. The example shows that the calculation method is accurate and effective.

**Key words:** suspended cable; cable element; finite element; nonlinear; catenary

悬索结构在力学上主要表现为高度柔性和极强的几何非线性<sup>[1-2]</sup>。在索的有限单元法分析中最开始主要采用直线型杆法<sup>[3]</sup>,忽略索的抗扭能力和抗弯能力,用不传递弯矩和扭距的许多相连直杆来模拟索。当单元足够多时,所模拟的索单元就趋近于索的真实力学性能了。由于该法不能考虑垂度引起的非线性,因此,Ernst<sup>[4]</sup>提出用修正材料的弹性模量考虑索垂度引起的非线性。为了追求高精度,一般还将索模拟成多节点的曲线索单元,如三节点二

次多项式曲线单元<sup>[5]</sup>,四节点等参索单元<sup>[6]</sup>,五节点曲线索单元等<sup>[7]</sup>。由于多节点索单元的前后处理不便,一些研究者探索将索模拟成二节点的曲线索单元<sup>[8-9]</sup>。其曲线线型一般有抛物线和悬链线 2 种<sup>[10-12]</sup>。抛物线法由于其假定的线形与实际索的线形略有不同,只是索单元的一种近似,适合于中小垂度的索分析。Z. H. Zhu<sup>[13]</sup>基于空间曲梁理论,实现了松弛应力和大垂度的索受力分析。

基于有限元理论的索单元几乎都是在悬索结构

收稿日期:2010-05-27

基金项目:国家自然科学基金资助项目(50678181,50708118);重庆市自然科学基金资助项目(CSTC,2007BB0133);重庆大学优秀青年教师基金资助项目

作者简介:晏致涛(1978-),男,重庆大学副教授,博士,主要从事结构工程研究,(E-mail)yanzhitao@cqu.edu.cn。

的初始态已经确定的基础上建立的,在已确定的初始几何上,基于总体 Lagrangian 描述建立位移函数和有限元方程,这样建立起来的有限元方程用于悬索结构荷载态的分析比较方便,但不能直接或不便于用于悬索结构初始几何及内力的确定。事实上,悬索结构设计的关键就在于其初始几何及内力的确定。而上述有限元方法依赖的索初始形态通过重力作用下的平面悬链线<sup>[14]</sup>或抛物线形确定。目前用悬链线方法进行分析时,主要采用重力作用下平面悬链线理论结果。对空间索单元的平面外刚度系数,目前文献中存在多种取值方法<sup>[15]</sup>,不恰当的取值可能使计算收敛困难或收敛缓慢。上述推导与分析思路是在平面悬链线单元的基础上增加刚度平面外刚度系数而得到。文中不依赖平面悬链线结果,直接推导了空间均布荷载作用下悬链线单元的解析解,并将其应用于空间悬链线单元的有限单元分析。该方法不需要预知索的初始形态,可以一次性精确求解在任意方向空间均布和集中荷载下索的位形及内力。

## 1 空间均布荷载作用下索的解析解

### 1.1 基本假定

- 1) 索在弹性阶段工作,符合胡克定律;
- 2) 大位移小应变变形;
- 3) 忽略索的抗弯能力。

### 1.2 索的弹性悬链线解析解

#### 1) 索段的平衡微分方程

在三维笛卡尔坐标中,任意坐标及方向的曲线索段如图 1 所示,在 3 个坐标轴方向  $e_i (i=1,2,3)$  都承受着分布荷载  $q$ 。

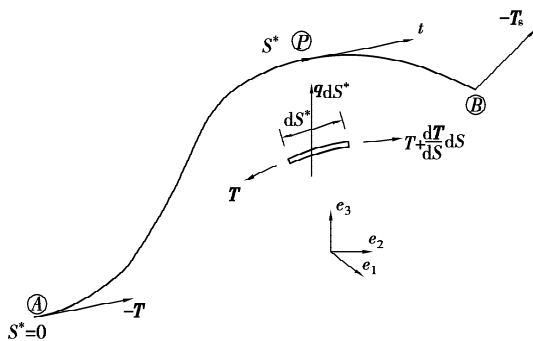


图 1 三维曲线索段

三维索段变形后微段  $dS^*$  的平衡方程为<sup>[2]</sup>

$$\frac{dT}{dS^*} + q^* = 0, \quad (1)$$

式中,  $S^*$  为 A 点到 B 点的有应力长度,  $T$  为张力矢量,用笛卡尔坐标系的分量表达式为  $T = T_i e_i$ 。矢量  $q^*$  为伸长后单位索长上的分布荷载。为了使用方便,一般采用 A 点到 B 点的无应力长度  $S$  和未伸长索上的荷载  $q$ , 有

$$q^* S^* = qS, \quad (2)$$

假设  $q_i$  是沿索长均匀分布,则有:

$$T_i = T_{0i} - q_i S (i = 1, 2, 3), \quad (3)$$

式中,  $T_{0i}$  为初始点的张力矢量。

#### 2) 物理方程

对于符合胡克定律的材料,有应变  $\gamma = T/EA$ , 这里假设  $\gamma$  为小应变,因此,有

$$\frac{dS^*}{dS} = 1 + \gamma = 1 + \frac{T}{AE}, \quad (4)$$

式中,  $T$  为索的张力合力。

#### 3) 几何协调条件

张力矢量是沿着单位切线矢量方向的,能够得到三维笛卡尔坐标系下坐标  $dx_i$  和  $dS$  的关系,

$$\frac{dx_i}{dS} = \frac{dx_i}{dS^*} \frac{dS^*}{dS} = \frac{T_i}{T} \frac{dS^*}{dS}, \quad (5)$$

联合式(3)、(4)、(5),可得:

$$x_i = x_{0i} + \frac{S}{EA} \left( T_{0i} - \frac{q_i S}{2} \right) + \frac{1}{Q^3} \left[ T_{0m} (Q^2 \delta_{im} - q_i q_m) \right. \\ \left. \ln \frac{QT - q_j T_j}{QT_0 - q_j T_{0j}} - q_i Q (T - T_0) \right] (i, m, j = 1, 2, 3), \quad (6)$$

式中,下标“0”表示索起始位置;系数  $Q$  是  $q_i$  的数值,即:  $i=1,2,3$ ;  $\delta_{im}$  是克罗内克符号,即:

$$\delta_{im} = \begin{cases} 1 & (i = m) \\ 0 & (i \neq m) \end{cases} (i, m = 1, 2, 3).$$

索伸长后的长度为

$$S^* = S \left( 1 + \frac{T}{2EA} \right) + \frac{1}{2EAQ^3} \left[ QT_{0i} q_i (T_0 - T) \right. \\ \left. + (Q^2 T_0^2 - T_{0i} q_i T_{0j} q_j) \ln \frac{QT - T_{0k} q_k + Q^2 S}{QT_0 - T_{0m} q_m} \right]. \quad (7)$$

假如两端的力都已指定,则这些力必须满足整体平衡方程,即式(3)。对于沿坐标系方向的坐标  $x_i$ ,可由在式(6)中令起始坐标  $x_{0i} = 0$  得到。

## 2 空间荷载作用的索单元

### 2.1 空间索单元的解析解

对于任意的空间荷载  $q_1, q_2$  及  $q_3$  代入式(6)可以推导出 3 个方向的索变形后长度表达式。  $T_{0j} (j=1,2,3)$  为起始点力,表示为  $-F_1, -F_2, -F_3$ ;

$T_j (j=1, 2, 3)$  为终点力, 表示为  $F_4, F_5, F_6$ 。

将式(6)展开, 有

$$\left. \begin{aligned} L_x &= \frac{-F_1 L_0 - \frac{1}{2} q_1^2 L_0}{EA} + \frac{q_1 (T_1 - T_2)}{Q^2} - \\ &\frac{1}{Q^3} [-F_1 (q_2^2 + q_3^2) + F_3 q_2 q_3 + F_2 q_1 q_2] \cdot \ln \frac{u}{v} \\ L_y &= \frac{-F_2 L_0 - \frac{1}{2} q_2^2 L_0}{EA} + \frac{q_2 (T_1 - T_2)}{Q^2} - \\ &\frac{1}{Q^3} [F_2 (q_1^2 + q_3^2) - F_3 q_1 q_3 - F_1 q_1 q_2] \cdot \ln \frac{u}{v} \\ L_z &= \frac{-F_3 L_0 - \frac{1}{2} q_3^2 L_0}{EA} + \frac{q_3 (T_1 - T_2)}{Q^2} - \\ &\frac{1}{Q^3} [F_3 (q_1^2 + q_2^2) + F_1 q_1 q_3 + F_2 q_2 q_3] \cdot \ln \frac{u}{v} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中:  $L_x, L_y$  以及  $L_z$  分别表示 3 个方向索投影长度;  $L_0$  为无应力长度;  $F_1, F_2, F_3$  分别为索两端节点力(见图 2); 其余参数意义见式(9)。

$$\left. \begin{aligned} u &= QT_2 - q_1 F_4 - q_2 F_5 - q_3 F_6 \\ v &= QT_1 + q_1 F_1 + q_2 F_2 + q_3 F_3 \\ T_1 &= \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} \\ T_2 &= \sqrt{F_4^2 + F_5^2 + F_6^2} \\ Q &= \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

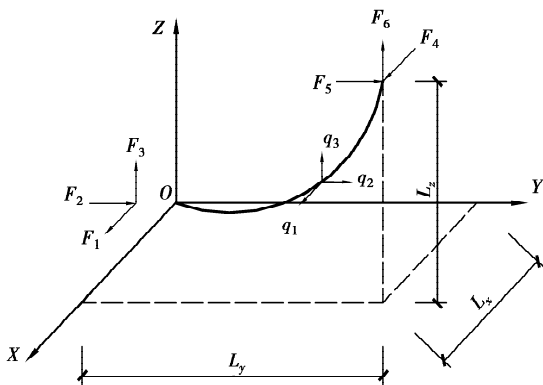


图 2 空间荷载作用下的空间索单元

对于受任意均布荷载下的单根索, 利用式(8)参考平面悬链线的迭代分析即可求得节点力。对于受有集中荷载作用的索, 必须分成多个单元, 针对每个单元, 由式(8)分别对  $F_1, F_2, F_3$  求偏导数, 可得柔度系数

$$f_{11} = \frac{\partial L_x}{\partial F_1} = -\frac{L_0}{EA} + \frac{F_1 q_1}{Q^2 T_1} + \frac{F_4 q_1}{Q^2 T_2} - \frac{q_2^2 + q_3^2}{Q^3} \ln \frac{u}{v}$$

$$\begin{aligned} &+ \left( \frac{T_2 q_1 - QF_4}{T_2 u} - \frac{T_1 q_1 + QF_1}{T_1 v} \right) \frac{w_1}{Q^3}, \\ f_{12} &= \frac{\partial L_x}{\partial F_2} = \frac{F_2 q_1}{Q^2 T_1} + \frac{F_5 q_1}{Q^2 T_2} + \frac{q_1 q_2}{Q^3} \ln \frac{u}{v} \\ &+ \left( \frac{T_2 q_2 - QF_5}{T_2 u} - \frac{T_1 q_2 + QF_2}{T_1 v} \right) \frac{w_1}{Q^3}, \\ f_{13} &= \frac{\partial L_x}{\partial F_3} = \frac{F_3 q_1}{Q^2 T_1} + \frac{F_6 q_1}{Q^2 T_2} + \frac{q_1 q_2}{Q^3} \ln \frac{u}{v} \\ &+ \left( \frac{T_2 q_3 - QF_6}{T_2 u} - \frac{T_1 q_3 + QF_3}{T_1 v} \right) \frac{w_1}{Q^3}, \\ f_{22} &= \frac{\partial L_y}{\partial F_2} = -\frac{L_0}{EA} + \frac{F_2 q_2}{Q^2 T_1} + \frac{F_5 q_2}{Q^2 T_2} - \frac{q_1^2 + q_3^2}{Q^3} \ln \frac{u}{v} \\ &+ \left( \frac{T_2 q_2 - QF_5}{T_2 u} - \frac{T_1 q_2 + QF_2}{T_1 v} \right) \frac{w_2}{Q^3}, \\ f_{23} &= \frac{\partial L_y}{\partial F_3} = \frac{F_3 q_2}{Q^2 T_1} + \frac{F_6 q_2}{Q^2 T_2} + \frac{q_2 q_3}{Q^3} \ln \frac{u}{v} \\ &+ \left( \frac{T_2 q_3 - QF_6}{T_2 u} - \frac{T_1 q_3 + QF_3}{T_1 v} \right) \frac{w_2}{Q^3}, \\ f_{33} &= \frac{\partial L_z}{\partial F_3} = -\frac{L_0}{EA} + \frac{F_3 q_3}{Q^2 T_1} + \frac{F_6 q_3}{Q^2 T_2} - \frac{q_1^2 + q_2^2}{Q^3} \ln \frac{u}{v} \\ &+ \left( \frac{T_2 q_3 - QF_6}{T_2 u} - \frac{T_1 q_3 + QF_3}{T_1 v} \right) \frac{w_3}{Q^3}, \\ f_{21} &= \frac{\partial L_y}{\partial F_1} = f_{12}; f_{31} = \frac{\partial L_z}{\partial F_1} = f_{13}, \\ f_{32} &= \frac{\partial L_z}{\partial F_2} = f_{23}, \end{aligned} \quad (10)$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= F_2 q_1 q_2 - F_1 q_2^2 + F_3 q_1 q_3 - F_1 q_3^2 \\ w_2 &= F_1 q_1 q_2 - F_2 q_1^2 + F_3 q_2 q_3 - F_2 q_3^2 \\ w_3 &= F_1 q_1 q_3 - F_3 q_1^2 + F_2 q_2 q_3 - F_3 q_2^2 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

则刚度矩阵为

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}^{-1}, \quad (12)$$

根据位移互等定理, 任意空间均布荷载作用下空间索单元的切线刚度矩阵可表示为

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{K} \\ -\mathbf{K} & \mathbf{K} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

与平面索单元一样, 空间荷载作用下索单元的切线刚度矩阵也是对称的。对于该刚度矩阵的求解, 通常是预先假定一端节点力  $F_1, F_2, F_3$ , 根据式(3)可以确定  $F_4, F_5, F_6$ , 根据式(8)求得位移的增量  $\Delta d$ , 进而确定节点力的增量, 反复迭代直至位移或者力的增量欧几里德范数足够小为止, 通常情况下, 只需要迭代几步就可快速收敛。  $F_1, F_2, F_3$  的初值可按式

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= -q_2 L_x / 2\lambda - q_3 L_x / 2\lambda \\ F_2 &= -q_2 (S - L_y \coth(\lambda)) \\ F_3 &= -q_3 (S - L_z \coth(\lambda)) \end{aligned} \right\}, \quad (14)$$

式中:  $\lambda = \sqrt{3(S^2 - L_y^2 - L_z^2)/L_z^2 - 1}$ ; 当  $L_x$  等于 0 时,  $\lambda = 1e^6$ ; 当初始无应力长度  $S$  小于弦长时,  $\lambda = 0.2$ 。

### 2.2 等效节点力

如果整根索受到空间均布荷载的作用, 利用一个单元即可得到精确解, 考虑到索的中间往往存在集中质量和集中力, 如减振器等, 事实上整根索已经不是悬链线线形, 而是分段悬链线线形, 因此, 需要将索在有集中力处分段, 将分段处的集中力和等效节点荷载叠加成总节点荷载。每个索单元两端节点处的等效节点力可以通过对式(8)的迭代求得节点力的反号而得。

$$\bar{F} = \{-F_1, -F_2, -F_3, -F_4, -F_5, -F_6\}, \quad (15)$$

总等效节点荷载为等效节点力与节点集中荷载之和。如果需要考虑温度荷载, 则可以通过对(7)式加上温度变形实现求解。

### 2.3 非线性平衡方程求解

由于上述推导均在全局笛卡尔坐标系下完成, 因此不需要进行坐标系的转换, 通过对单元的刚度矩阵以及等效结点荷载向量集总可直接得到全局坐标系下的总刚和节点力。由虚功原理可以得到非线性有限元平衡迭代方程

$$[K]^{t+\Delta t} \{\Delta d\} = {}^{t+\Delta t} \{F\}, \quad (16)$$

式中:  $[K]$  为全局坐标系下  $t + \Delta t$  时刻的切线刚度矩阵,  $\{\Delta d\}$  为  $t + \Delta t$  时段索单元的节点位移增量,  ${}^{t+\Delta t} \{F\}$  为  $t + \Delta t$  步迭代过程中的等效节点荷载向量, 通过迭代由(14)求得。索的位形可以通过对节点坐标的更新而调整。上式中刚度矩阵  $[K]$  和索节点位形有关, 等效节点荷载  ${}^{t+\Delta t} \{F\}$  和索节点位形有关。因此, 上述该方程采用双重平衡迭代法进行求解。

1) 对于任意给定空间索的位形, 迭代求解每一个单元的刚度矩阵和等效节点力;

2) 组装成全局坐标系下总刚度切线矩阵和等效节点力, 求得节点位移以及等效节点荷载向量;

3) 求解式(16), 求得  $t + \Delta t$  时段索的节点位移增量, 更新索的坐标。若位移增量的欧几里德范数足够小, 则收敛, 可得到节点位移和节点力。否则, 重复第(1)步迭代过程, 直至收敛。

上述平衡方程求解步骤在每一次迭代过程中的等效节点荷载向量和切线刚度矩阵都是基于弹性悬链线精确表达式一次求解, 没有采用 UL 列式的增

量求解递推关系, 避免了对等效节点荷载的增量求解, 减少了误差累积。计算表明, 单元数较少的情况下能够很快收敛至平衡状态; 若单元数较多, 为避免计算发散, 可对一次性求解的等效节点荷载向量乘以一个较小的系数, 这样可确保收敛, 但收敛速度会减慢。

## 3 算例分析

### 3.1 算例 1

根据上述理论, 编制程序, 首先验证一个经典的平面索的算例。如图 3 所示的各种索的形状。索的无应力长度  $L_0 = 100$  m, 温度变化  $T = 100$  °C, 材料几何特性  $EA = 3 \times 10^7$  N, 自重  $W = 1$  N/m, 线膨胀系数  $\alpha_1 = 0.65 \times 10^{-5}$ , 输入每个 J 点的位置, 用程序计算划分一个单元即可得到每个位置 J 端点处索的张力, 计算的结果与文献[13]中的完全一样。将图中索划分多个单元, 计算位形和节点力和一个单元完全一致, 计算精度与单元划分数无关, 可见求解是完全精确的。

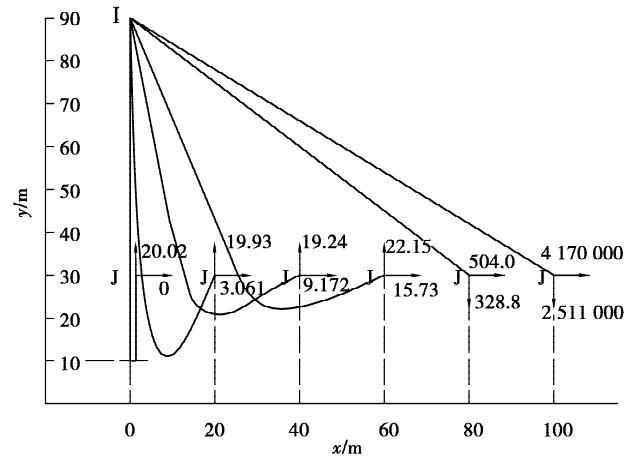


图 3 不同线形单根索的张力

### 3.2 算例 2

目前索受空间风荷载和自重荷载的算例较少, 为了说明算法的有效性, 采用商用程序 ANSYS 进行验证。计算模型同样为一根空间索, 材料特性和上例一样, 索的初始无应力长度为 100 N, 两端节点坐标分别为  $I(0, 0, 0)$  和  $J(80, 0, 0)$ 。ANSYS 采用类似于文献[3]的两节点直线索单元, 并不能直接得到悬链线的初始内力和位形。因此, ANSYS 计算结果是在确定了悬链线的位形之后施加风荷载进行求解的。

由于 ANSYS 采用了直线两节点单元逼近曲线索, 因此划分了多达 500 个单元。文中算法将单元分成 4 个单元。图 4 显示了索中点坐标的收敛情

况。索的自重荷载和风荷载均为 1 N/m。图中显示索中点的初始坐标为(5, -40, 0),在荷载作用下能快速收敛到最终位形(40.0, -18.7, -18.7)。大量分析表明,利用基于空间悬链线单元,当索的单元原长和荷载确定了以后,索单元的中间节点可以在任意位置,均可快速迭代至最终平衡位置。

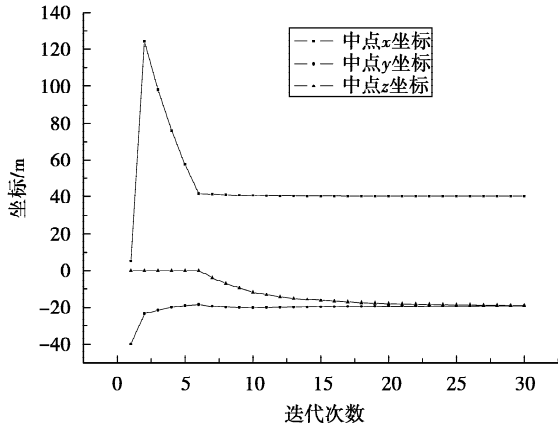


图 4 索中点坐标迭代收敛过程

图 5 表示不同风速下索中点的位形变化。其中,自重荷载为 1 N/m,风速荷载为 0.25 ~ 2.0 N/m;可见,在风荷载下,索的位形具有明显的非线性特征。图 6 表示不同风偏角下索中点的位形变化。自重荷载为 1 N/m,风速荷载为 1 N/m,风偏角为 0°~90°。可以看出不同的风偏角导致索中点位形呈非线性变化。图 7 表示不同风偏角下索两端节点力的变化。随风偏角增大,索一端节点张力增大,另一端减小,呈非线性变化。图 8 为索中间施加不同集中力下位形变化。自重荷载为 1 N/m,风速荷载为 1 N/m,集中力为 1~10 N。可以看出,集中力对索的位形也有较大影响。从上述计算结果可见,基于空间悬链线单元非线性有限元分析可以一次性实现索的张力和位形的迭代,可以求解任意方向空间荷载下索的位形和张力。由于本算例为一个

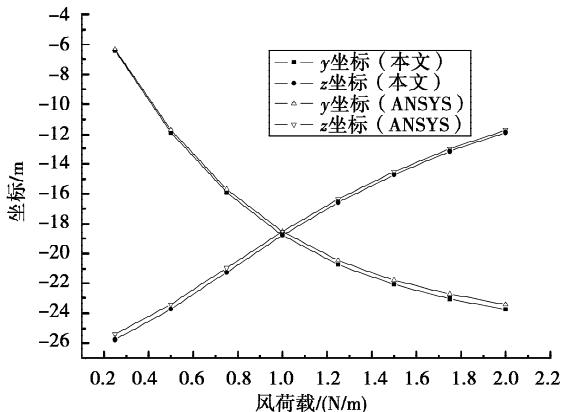


图 5 不同风荷载下索中点坐标

小垂度索,因此,计算结果和 ANSYS 计算结果比较接近。但是基于空间悬链线单元的有限元分析需要更少的单元,不需要初始位形,不局限中小垂度范围,效率更高,结果更精确,适用范围更广。

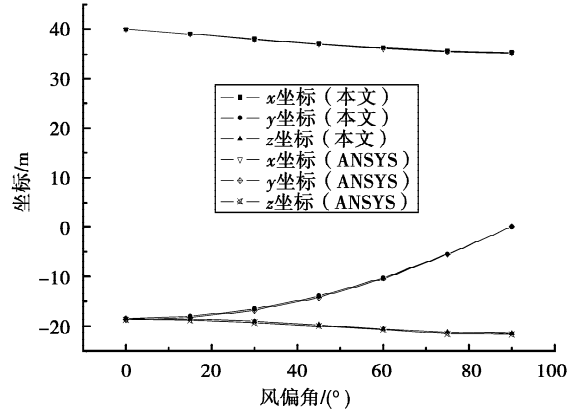


图 6 不同风偏角下索中点坐标

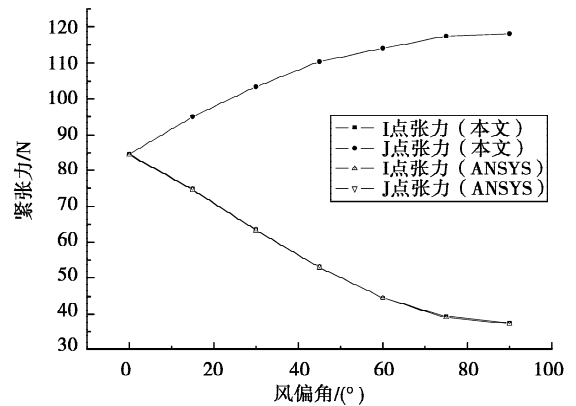


图 7 不同风偏角下索两端节点张力

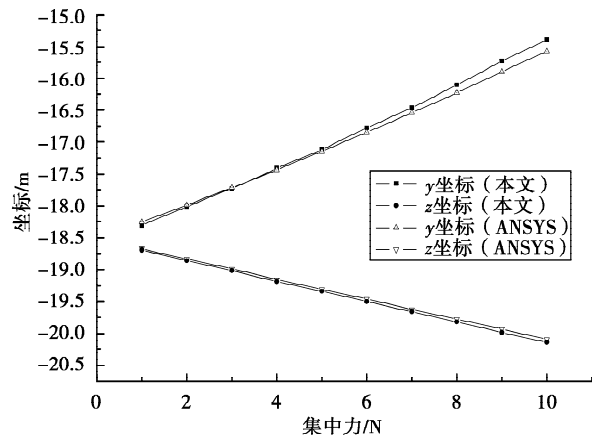


图 8 不同集中力作用下索中点坐标

### 4 结 语

与在平面悬链线线形的基础上推导平面外刚度系数不同,文中直接推导出了空间悬链线方程的精

确理论解。得到了两节点索的切线刚度矩阵和索端张力的精确表达式,该表达式可以直接用于一根索的力学求解。通过对刚度矩阵集成得到总刚之后,采用基于悬链线单元的等效节点荷载一次性求解方法,通过 Newdon - rapson 双重迭代实现多个单元非线性问题的求解。所有推导均基于全局笛卡尔坐标系下,不需要进行坐标系的转换。该方法可以在已知索原长和任意方向空间荷载工况下,对原线形为任意形状的索实现快速找形和精确力学分析。能处理大垂度和强非线性问题。

#### 参考文献:

- [ 1 ] BRAUN A L, AWRUCH A M. Aerodynamic and aeroelastic analysis of bundled cables by numerical simulation[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 284(1-2): 51-73.
- [ 2 ] MATERAZZI A L, VENANZI I. A simplified approach for the wind response analysis of cable-stayed masts[J]. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 2007, 95(9-11):1272-1288.
- [ 3 ] KNUDSON W C. Static and dynamic analysis of cable net structures [D]. Doctoral disseration. Berkely, California:University of California, 1971.
- [ 4 ] H ERNST J. Der e-modul von seilen unter beruicksichtigung des durchhanges [ J ]. *Der Bauingenieur*, 1965, 40(2): 52-55.
- [ 5 ] DESAI Y M, YU P, POPPLEWELL N, et al. Finite element modelling of transmission line galloping[J]. *Computers & Strucrum*, 1995, 57(3): 407-420.
- [ 6 ] 武建华, 苏文章. 四节点索单元的悬索结构非线性有限元分析[J]. *重庆建筑大学学报*, 2005, 27(6): 54-58.  
WU JIAN-HUA, SU WEN-ZHANG. The non-Linear finite element analysis of cable structures based on four-Node isoparametric curved element[J]. *Journal of Chongqing Jianzhu Uisversity*, 2005, 27(6): 54-58.
- [ 7 ] TANG JIAN-MIN, SHEN ZUYAN, QIAN, RUO-JUN. A nonlinear finite element method with five-node element for analysis of cable structres[J]. *Proceeding of the Lass international Symposium*, 1995 ( 2 ): 929-935.
- [ 8 ] 杨孟刚, 陈政清. 两节点曲线索元精细分析的非线性有限元法[J]. *工程力学*, 2003, 20(1):42-47.  
YANG MENG-GANG, CHEN ZHENG-QING. Nonlinear analysis of cable structuresusinga two-node curved cable element of high precision [ J ]. *Enginneering Mechanics*, 2003, 20(1):42-47.
- [ 9 ] 杨孟刚, 陈政清. 基于 UL 列式的两节点悬链线索元非线性有限元分析[J]. *土木工程学报*, 2003, 36(8): 63-68.  
YANG MENG-GANG, CHEN ZHENG-QING. The nonlinear finite element analysis for two-node curved cable element based on UL formulation [ J ]. *Enginneering Mechanics*, 2003, 36(8):63-68.
- [10] 罗喜恒, 肖汝诚, 项海帆. 基于精确解析解的索单元 [J]. *同济大学学报:自然科学版*, 2005, 33(4): 445-450 .  
LUO XI-HENG, XIAO RU-CHENG, XIANG HAI-FAN. Cable element based on exact analytical expression[J]. *Journal of Tongji University: Natural science*, 2005, 33(4): 445-450.
- [11] ANGELO LUONGO, DANIELE ZULLI, GIUSEPPE PICCARDO. On the effect of twist angle on nonlinear galloping of suspended cables [J]. *Computers and Structures*, 2009, 87(15-16): 1-12.
- [12] ANGELO LUONGO, DANIELE ZULLI, GIUSEPPE PICCARDO. Analytical and numerical approaches to nonlinear galloping of internally resonant suspended cables[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, (315): 375-393.
- [13] ZHU Z H, MEGUID S. A. Vibration analysis of a new curved beam element [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, 309(1-2): 86-95.
- [14] IRVINE H M. *Cables tructures*[M]. London: The MIT Press, 1981.
- [15] JAYARAMAN H B, KNUDSON W C. A curved element for the analysis of cable structures [J]. *Computers and Structures*, 1981, 14(3-4): 325-333.

(编辑 陈移峰)