

文章编号:1000-582X(2011)01-128-06

## 不连续问题的无网格分域算法

柳 军<sup>1</sup>, 严 波<sup>1</sup>, 姜乃斌<sup>2</sup>, 孙英学<sup>2</sup>

(1. 重庆大学 资源与环境科学学院, 重庆 400044; 2. 中国核动力研究设计院  
核反应堆系统设计技术国家级重点实验室, 四川 成都 610041)

**摘 要:**提出一种无网格方法中采用分域的思想处理材料和位移不连续问题的方法。该方法将求解域沿不连续面进行分域, 通过使用两种转换矩阵使子域交界面上的位移连续性得到满足; 采用分块矩阵法计算转换后的刚度矩阵, 所得刚度矩阵仍具有稀疏、带状性。可采用与有限元耦合的方式施加本质边界条件。编制了该算法的计算程序, 通过对材料不连续悬臂梁弯曲问题的分析和单边裂纹板裂纹张开位移的计算, 验证了该算法的正确性和有效性。

**关键词:**不连续问题; 无网格法; 分域算法; 转换矩阵

中图分类号: O346.1

文献标志码: A

### A domain decomposition algorithm in meshless method for discontinuous problem

LIU Jun<sup>1</sup>, YAN Bo<sup>1</sup>, JIANG Nai-bin<sup>2</sup>, SUN Ying-xue<sup>2</sup>

(1. College of Resource and Environmental Science, Chongqing University, Chongqing 400044, P. R. China;  
2. National Key Laboratory of Science and Technology on Reactor System Design Technology,  
Nuclear Power Institute of China, Chengdu, Sichuan 610041, P. R. China)

**Abstract:** A domain decomposition algorithm for material and displacement discontinuity problems in meshless method is presented. The domain is decomposed into sub-domains along the discontinuous interface. The continuity of the displacements on the interface is satisfied through the introduction of two transformation matrixes. The partitioned-matrix method is proposed to calculate the transferred stiffness matrix, which is sparse and bandy. By means of coupling meshless method and finite element method, the essential boundary condition can be imposed directly. The computer program based on the presented method is developed and two numerical examples, a beam consisted with two kinds of materials and an edge-cracked plate under uniform tension, are employed to demonstrate the correctness and efficiency of the method.

**Key words:** discontinuous problem; meshless method; domain decomposition; transformation matrix

无网格方法由于具有明显的优点而备受关注<sup>[1-3]</sup>。该类方法在模拟裂纹扩展、移动边界和大变形等问题<sup>[4,5]</sup>中无需网格重构, 且相对于有限元法具有较高的精度和收敛速度。尽管如此, 无网格方法

也有其局限性<sup>[3]</sup>, 其中一个突出的不足之处就是在处理材料和位移不连续性问题时较困难。

在处理不连续问题时, 常规有限元方法通常把不连续面作为单元的交界面, 因而在处理裂纹扩展

收稿日期: 2010-07-28

基金项目: 核反应堆系统设计技术国家级重点实验室基金资助(ZDS-A-0908)

作者简介: 柳军(1980-), 男, 重庆大学博士研究生, 主要从事计算力学和工程力学方面的研究。

严波(联系人), 重庆大学教授, 博士生导师, (E-mail) boyan@cqu.edu.cn。

等位移不连续问题时需不断修正网格。MacKinnon 等<sup>[6]</sup>提出了一种修正的有限单元法,该方法允许相边界穿过单元,无需网格重构。该方法的不足之处在于当不连续面与单元相交时,不连续面在单元中被简化为平面,且当不连续面与单元的一个角相交时,计算刚度矩阵将变得复杂。Belyschko 等<sup>[7-9]</sup>基于单位分解理论提出了扩展有限元法(XFEM),该方法是通过基于结点的富集自由度构造非连续位移场,不连续面可以穿过单元且仍可保持为曲面。但该方法需在不连续面两端细分单元,单元刚度矩阵的计算变得复杂,特别在三维问题中该问题更加突出。采用无网格方法处理不连续问题具有其优势,Cordes 等<sup>[10]</sup>采用 Lagrange 乘子法处理材料不连续问题,但该方法所得的总体刚度矩阵非正定,且会增加未知量的数目。Krongauz 等<sup>[11]</sup>采用一种特殊的附加形状函数处理材料不连续问题,该方法实现复杂且不稳定。Cai 等<sup>[12]</sup>采用一种转换矩阵使本质边界和材料不连续面上的无网格节点位移转换成真实位移,从而可以直接施加本质边界条件和处理材料不连续问题,但没有证明该方法能否通过分片试验。对于位移不连续问题,目前无网格方法中已经提出了一些处理场函数不连续性的近似方法,如可视性准则、衍射法和透射法等<sup>[10,13-14]</sup>,但这些方法涉及到比较复杂的几何处理,在三维问题中这一问题更加突出。

笔者在 Cai 等<sup>[12]</sup>和 Xiao 等<sup>[15]</sup>工作的基础上,提出一种分域算法,可以有效处理无网格方法中的材料和位移不连续问题。

### 1 移动最小二乘近似

Belytschko 等<sup>[16]</sup>提出了移动最小二乘(MLS)近似,该方法使用空间  $\Omega$  上的一系列点  $(x_i), i=1, 2, \dots, n$  来拟合该空间上未知的函数  $u(x)$ ,近似的表示为

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x) a_j(x) = p^T(x) a(x), \quad (1)$$

式中:  $u^h(x)$  表示函数  $u(x)$  的近似值,  $p_j(x)$  称为基函数,  $m$  为基函数的项数,  $a_j(x)$  为相应的系数,它是空间坐标  $x$  的函数。在每个节点  $x_i (i=1, 2, \dots, n)$  处定义一个权函数  $w_i(x) = w(x - x_i)$ , 权函数  $w_i(x)$  具有紧支、非负、单调递减和连续可导性,权函数的种类有高斯权函数、样条型权函数以及指数型权函数。区域  $\Omega_i$  称为权函数  $w_i(x)$  的支撑域,也称为节点  $x_i$  的支撑域或节点  $x_i$  的影响域。

式(1)中的系数矩阵  $a(x)$  可以通过使得以下离散范数取极小值得到

$$J(x) = (Pa(x) - \hat{u})^T W(x) (Pa(x) - \hat{u}). \quad (2)$$

即使得对函数的局部近似误差最小,其中

$$P = \begin{bmatrix} p_1(x_1) & p_2(x_1) & \dots & p_m(x_1) \\ p_1(x_2) & p_2(x_2) & \dots & p_m(x_2) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ p_1(x_n) & p_2(x_n) & \dots & p_m(x_n) \end{bmatrix},$$

$$W(x) = \begin{bmatrix} w(x-x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w(x-x_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & w(x-x_n) \end{bmatrix},$$

$$\bar{u} = [\bar{u}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \dots \quad \bar{u}_n]^T. \quad (3)$$

要使式(2)取驻值,需满足以下线性关系式

$$\frac{\partial J}{\partial a} = A(x)a(x) - B(x)\hat{u} = 0, \quad (4)$$

式中:矩阵  $A(x)$  和  $B(x)$  分别为

$$A(x) = P^T W(x) P, \quad B(x) = P^T W(x). \quad (5)$$

由此可得

$$a(x) = A^{-1}(x) B(x) \hat{u}.$$

将上式代入式(1)得

$$u^h(x) = \Phi^T(x) \hat{u} = \sum_{i=1}^n \Phi_i(x) \hat{u}_i, \quad \forall x \in \Omega \quad (6)$$

上式中

$$\Phi^T(x) = P^T(x) A^{-1}(x) B(x). \quad (7)$$

$\Phi_i(x)$  即为节点  $i$  对应的移动最小二乘形函数。它具有局部、光滑和单位分解性,但不具有  $\delta$  函数的性质,因此由基于 MLS 近似的无网格方法所得节点位移并非真实位移,一般称为名义位移。

### 2 不连续问题的分域算法

如图 1 所示,求解问题域包含不同的材料,也可

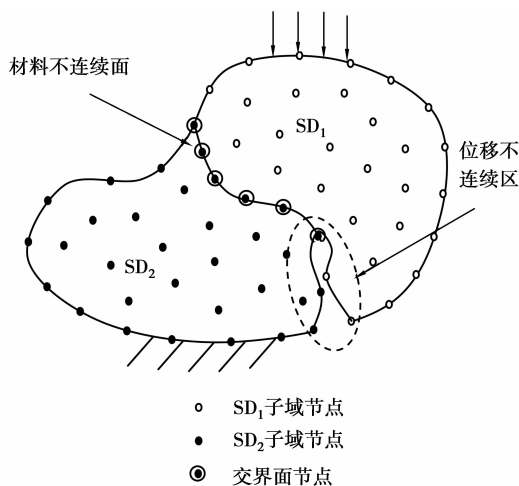


图 1 子域划分及节点设置

以含有如裂纹导致的位移不连续区域。现在沿不连续面将区域分解成两子域  $SD_1$  和  $SD_2$ , 在子域交界面上设置  $m$  个节点, 除这些交界面节点外, 在  $SD_1$  子域和  $SD_2$  子域中分别还有  $n$  个和  $k$  个无网格节点。子域  $SD_1$  的  $m$  个处于交界面上的节点的真实位移可通过它们形函数影响域内的该子域节点插值得

$$\begin{aligned} u_1 &= \Phi_1^1 \hat{u}_1 + \Phi_2^1 \hat{u}_2 + \cdots + \Phi_m^1 \hat{u}_m + \Phi_{m+1}^1 \hat{u}_{m+1} + \\ &\quad \Phi_{m+2}^1 \hat{u}_{m+2} + \cdots + \Phi_{m+n}^1 \hat{u}_{m+n}, \\ u_2 &= \Phi_1^2 \hat{u}_1 + \Phi_2^2 \hat{u}_2 + \cdots + \Phi_m^2 \hat{u}_m + \Phi_{m+1}^2 \hat{u}_{m+1} + \\ &\quad \Phi_{m+2}^2 \hat{u}_{m+2} + \cdots + \Phi_{m+n}^2 \hat{u}_{m+n}, \\ &\quad \vdots \\ u_m &= \Phi_1^m \hat{u}_1 + \Phi_2^m \hat{u}_2 + \cdots + \Phi_m^m \hat{u}_m + \Phi_{m+1}^m \hat{u}_{m+1} + \\ &\quad \Phi_{m+2}^m \hat{u}_{m+2} + \cdots + \Phi_{m+n}^m \hat{u}_{m+n}, \end{aligned} \quad (8)$$

式中:  $u_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) 是交界面节点的真实位移值,  $\Phi_j^i$  ( $i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, m+n$ ) 是第  $j$  个交界面节点的形函在第  $i$  个节点处的取值。

式(8)可以用矩阵形式表达如下

$$u_m = [\Phi_1, \Phi_2] \begin{Bmatrix} \hat{u}_m \\ \hat{u}_n^1 \end{Bmatrix}, \quad (9)$$

式中:  $u_m$  表示交界面上节点真实位移组成的列向量;  $\Phi_1$  是交界面上节点形函组成的  $m \times m$  阶矩阵;  $\Phi_2$  为其余形函组成的  $m \times n$  阶矩阵;  $\hat{u}_m$  为交界面上节点名义位移组成的列向量;  $\hat{u}_n^1$  为其余非交界面上的节点名义位移组成的列向量。由式(9)可将交界面上节点的名义位移表示成

$$\hat{u}_m = \Phi_1^{-1} (u_m - \Phi_2 \hat{u}_n) = [D_1 \quad D_2] \begin{Bmatrix} u_m \\ \hat{u}_n^1 \end{Bmatrix}, \quad (10)$$

式中:  $D_1 = \Phi_1^{-1}$ ,  $D_2 = \Phi_1^{-1} \Phi_2$ , 进一步可将  $SD_1$  子域中所有节点的名义位移  $\hat{u}$  用下式表示

$$\hat{u} = \begin{Bmatrix} \hat{u}_m \\ \hat{u}_n^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_m \\ \hat{u}_n^1 \end{Bmatrix} = C u_c, \quad (11)$$

式中:  $I$  为单位对角阵;  $C$  为转换矩阵, 具有稀疏性和块状性。

将式(11)代入弹性力学控制方程的等效积分形式, 经过推导可得子域  $SD_1$  相应的 EFG 平衡方程可写为

$$C^T K^1 C u_c = C^T b^1 + C^T \bar{t}^1, \quad (12)$$

式中:  $K^1$ 、 $b^1$  和  $\bar{t}^1$  分别为转换前的初始刚度矩阵、体积力列向量和外载荷列向量。

现在子域  $SD_2$  中设置  $k$  个无网格节点(不包括交界面上的  $m$  个节点), 则  $SD_2$  子域共有  $m+k$  个节点, 这些节点的名义位移可表示为

$$\hat{u}^2 = [\hat{u}_1^2, \hat{u}_2^2, \dots, \hat{u}_{m+k-1}^2, \hat{u}_{m+k}^2]^T, \quad (13)$$

式中:  $\hat{u}_i^2$  表示子域  $SD_2$  的第  $i$  个节点名义位移。

子域  $SD_1$  中交界面节点的真实位移又可由子域  $SD_2$  中  $m+k$  个节点名义位移通过 MLS 插值得到, 故  $u_c$  可表示为

$$u_c = T \begin{bmatrix} \hat{u}^2 \\ \hat{u}_n^1 \end{bmatrix} = T \hat{u}. \quad (14)$$

转换矩阵  $T$  把子域  $SD_2$  中的节点与子域  $SD_1$  中的节点联系在一起, 其为

$$T = \begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (15)$$

式中:  $\Phi$  为子域  $SD_2$  的  $m \times k$  阶插值系数矩阵,  $I$  为  $n \times n$  单位对角阵。

将式(14)代入子域  $SD_1$  的平衡方程式(12), 可得转换后的子域  $SD_1$  平衡方程

$$(CT)^T K^1 CT \hat{u} = (CT)^T b^1 + (CT)^T \bar{t}^1. \quad (16)$$

上式可简写为

$$\tilde{u}^1 \tilde{q}^1 = \tilde{f}^1, \quad (17)$$

式中:

$$\tilde{k}^1 = (CT)^T K^1 CT, \tilde{f}^1 = (CT)^T b^1 + (CT)^T \bar{t}^1, \quad (18)$$

$$\tilde{u}^1 = [\hat{u}_1^2, \hat{u}_2^2, \dots, \hat{u}_{m+k-1}^2, \hat{u}_{m+k}^2, \hat{u}_1^1, \hat{u}_2^1, \dots, \hat{u}_{n-1}^1, \hat{u}_n^1]^T. \quad (19)$$

对子域  $SD_2$  采用以上类似的推导过程, 可得到其相应的平衡方程

$$K^2 \hat{q}^2 = \hat{f}^2, \quad (20)$$

式中: 刚度矩阵  $\tilde{K}^2$  和载荷向量  $\tilde{f}^2$  与子域  $SD_1$  的类似。相应的位移向量表示为

$$\hat{q}^2 = [\hat{u}_1^2, \hat{u}_2^2, \dots, \hat{u}_{m+n-1}^2, \hat{u}_{m+n}^2, \hat{u}_1^2, \hat{u}_2^2, \dots, \hat{u}_{k-1}^2, \hat{u}_k^2]^T. \quad (21)$$

对式(17)和式(20)按节点总体编号进行组集, 即可得到系统平衡方程

$$K q = f, \quad (22)$$

式中:  $q$  为所有无网格方法的名义节点位移列向量, 表示为

$$q = [\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_{m+n+k-1}, \hat{u}_{m+n+k}]^T. \quad (23)$$

在系统平衡方程组(22)中施加本质边界条件并求解即可得到各节点的名义位移。考虑到转换矩阵  $C$  和  $T$  具有稀疏性, 采用分块矩阵法计算刚度矩阵, 提高计算速度。本质边界条件的施加可以使用现有的各种方法, 如 Lagrange 乘子法、罚参数法等。这里采用与有限元耦合的方式施加本质边界条件。

## 3 数值算例

### 3.1 算例 1: 材料不连续杆弯曲问题

如图 2(a) 所示的材料不连续悬臂梁,  $L =$

8.0 m,  $h=1.0$  m, 左端固定, 右端自由, 在自由端面上作用有沿厚度均匀分布载荷  $q=1.0$  N/m; 2 种材料的弹性模量分别为  $E_1=1.0 \times 10^6$  Pa 和  $E_2=0.9 \times 10^6$  Pa; 泊松比分别为  $\nu_1=0.28$  和  $\nu_2=0.33$ 。

采用笔者方法求解此问题时, 悬臂梁数值离散模型如图 2(b) 所示。为了便于施加本质边界条件, 在材料 2 的左端即固定端附近区域采用 80 个 4 节点四边形有限单元离散。其余区域沿材料不连续面分割成两个 EFG 子域, 无网格区域均匀布置总共 612 个节点。基函数选用线性基, 刚度矩阵的计算采用有限元背景网格积分。为比较, 采用 ABAQUS 计算此问题, 使用 512 个 8 节点 2 次单元, 共 1 681 个节点进行模型离散。

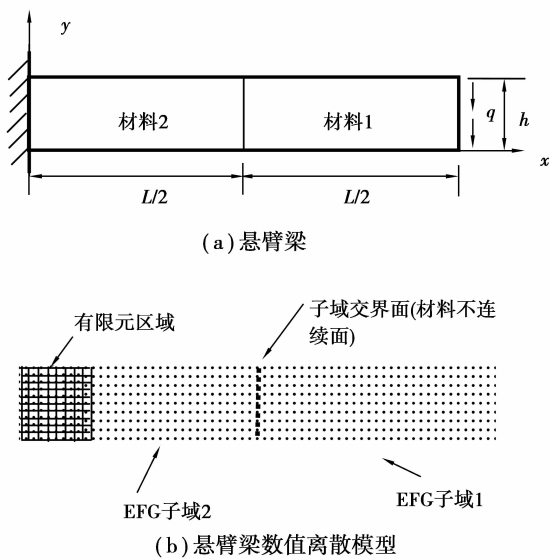


图 2 材料不连续悬臂梁弯曲问题

图 3 为悬臂梁中心轴挠度计算结果, 可见, 笔者方法所得结果与 ABAQUS 结果一致, 即使在不连续面上计算所得的挠曲线结果也很光滑。图 4 为  $x=5$  m 截面上的弯曲正应力结果, 可见两种方法所得结果一致。图 5 为  $x=5$  m 截面上的弯曲剪应力结果, 除梁的上下表面外, 由两种方法所得的结果基本一致。可见, 该方法在处理材料不连续问题中具有很高的计算精度。

### 3.2 算例 2: 单边裂纹板裂纹张开位移的计算

单边裂纹板如图 6(a) 示  $L=8.0$  m,  $W=4.0$  m,  $a=2.0$  m, 板两端受拉应力  $\sigma=1.0$  Pa 作用, 弹性模量  $E=1.0 \times 10^6$  Pa, 泊松比  $\nu=0.28$ 。

采用笔者方法计算时, 单边裂纹板数值模型区域划分如图 6(b) 所示, 在远离裂纹的两端分别采用 66 个 4 节点四边形有限单元离散, 在靠近裂纹区域

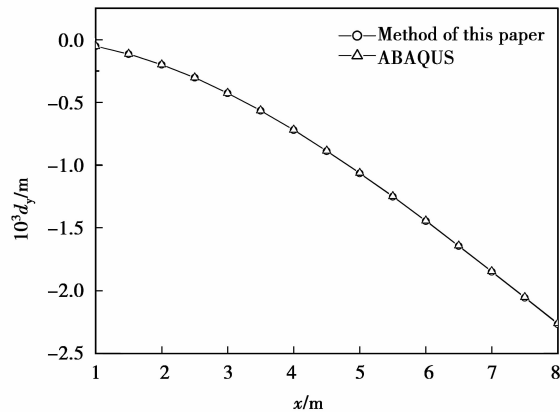


图 3 悬臂梁中心轴挠度

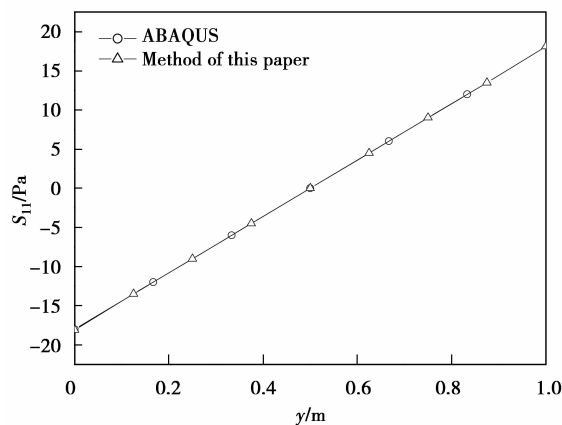


图 4  $x=5$  m 截面上的弯曲正应力

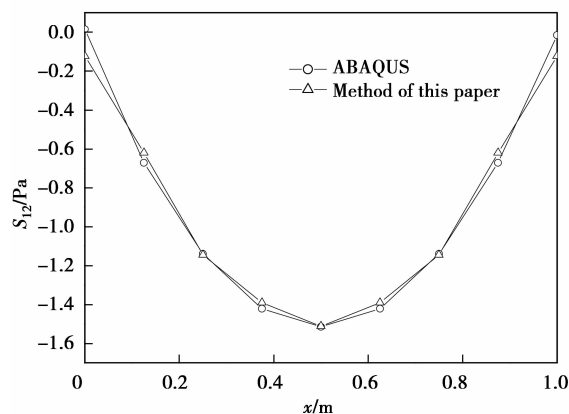
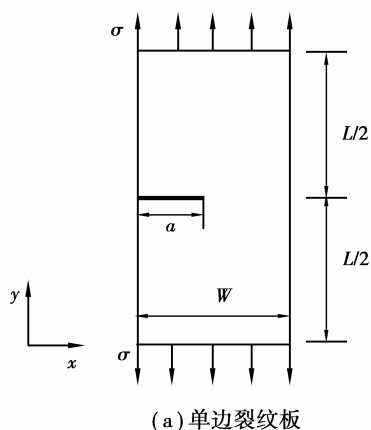


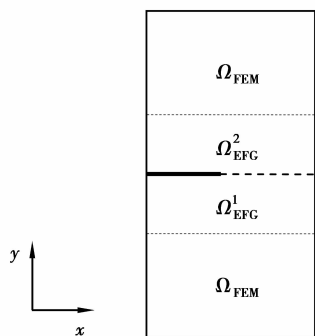
图 5  $x=5$  m 截面上的弯曲剪应力

沿裂纹线切线方向将 EFG 区域分割成两个子区域, 无网格区域均匀布置总共 881 个节点。考虑到结构的对称性, 在采用 ABAQUS 计算时, 只取裂纹线以上二分之一部分进行离散, 采用 2 880 个 8 节点 2 次单元, 共 8 865 个节点。

裂纹线上各节点的张开位移计算结果见图 7。



(a) 单边裂纹板



(b) 数值模型区域划分

图6 单边裂纹板拉伸问题

由图可见,由该方法所得的张开位移结果与由ABAQUS所得结果接近,特别是采用二次基的时候,效果更好。

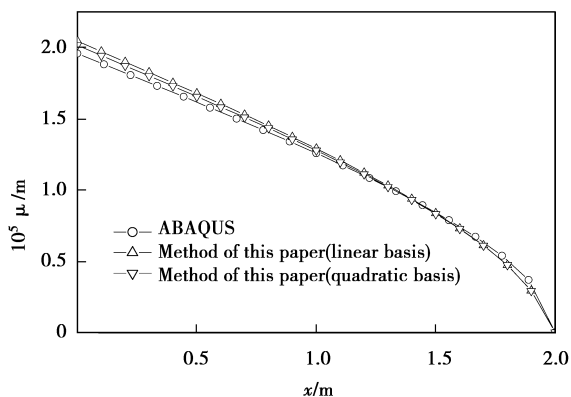


图7 裂纹线张开位移

以上算例表明,笔者方法能有效处理无网格方法中的不连续问题,该方法可以进一步用于诸如裂纹扩展问题的数值模拟。

## 4 结 语

基于分域算法的思想,提出一种利用转换矩阵处理无网格方法中的材料和位移不连续问题。由转换矩阵所得的刚度矩阵具有稀疏性和带状性,采用分块矩阵法提高了刚度矩阵的计算速度;通过与有限元法耦合,使该方法可直接施加本质边界条件和提高计算效率。数值算例表明,笔者所提方法在处理材料和位移不连续问题时均能获得高的计算精度。该方法可以进一步用于裂纹扩展问题的数值模拟研究。

### 参考文献:

- [1] 顾元通,丁桦. 无网格法及其最新进展[J]. 力学进展, 2005,35(3):323-337.  
GU YUAN-TONG, DING HUA. Recent developments of meshless method [J]. Advances in Mechanics, 2005, 35(3): 323-337.
- [2] HU D A, LONG S Y, LIU K Y, et al. A modified meshless local Petrov-Galerkin method to elasticity problems in computer modeling and simulation [J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2006, 30(5):399-404.
- [3] GU Y T, ZHANG L C. Coupling of the meshfree and finite element methods for determination of the crack tip fields[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2008, 75(5): 986-1004.
- [4] GAO L T, LIU K X, LIU Y. Applications of MLPG method in dynamic fracture problems [J]. Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2006, 12(3): 181-196.
- [5] LIU W K, JUN S. Multiple scale reproducing kernel particle methods for large deformation problems [J]. International Journal of Numerical Methods in Engineering, 1998, 41(7):1339-1362.
- [6] MACKINNON R J, CAREY G F. Treatment of material discontinuities in finite element computations [J]. International Journal of Numerical Methods in Engineering, 1987, 24(2): 393-417.
- [7] BELYTSCHKO T, GRACIE R. XFEM applications to dislocations and interfaces[J]. International Journal of Plasticity, 2007, 23(10): 1721-1738.
- [8] OSWALD J, GRACIE R, KHARE R, et al. An extended finite element method for dislocations in complex geometries: thin films and nanotubes [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2009, 198(21/26): 1872-1886.

- [9] GRACIE R, OSWALD J, BELYTSCHKO T. A new extended finite element method for dislocations; core enrichment and nonlinear formulation[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2008, 56(1): 200-214.
- [10] CORDES L W, MORAN B. Treatment of material discontinuity in the Element-free Galerkin method[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1996, 139: 75-89.
- [11] KRONGAUZ Y, BELYTSCHKO T. EFG approximation with discontinuous derivatives [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1998, 41: 1215-1233.
- [12] CAI Y C, ZHU H H. Direct imposition essential boundary conditions and treatment of material discontinuities in the EFG method[J]. *Computational Mechanics*, 2004, 34(4): 330-338.
- [13] BELYTSCHKO T, LU Y Y, GU L. Element-free Galerkin methods[J]. *International Numerical Methods in Engineering*, 1994, 37: 229-256.
- [14] ORGAN D, FLEMING M, TERRY T, et al. Continuous meshless approximation for nonconvex bodies by diffraction and transparency[J]. *Computational Mechanics*, 1996, 18: 75-89.
- [15] XIAO Q Z, DHANASEKAR M. Coupling of FE and EFG using collocation approach [J]. *Advances in Engineering Software*, 2002, 33(7/10): 507-515.
- [16] RABCZUK T, BELYTSCHKO T. A three-dimensional large deformation meshfree method for arbitrary evolving cracks[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2007, 196(29/30): 2777-2799.

(编辑 郑洁)

~~~~~

(上接第 109 页)

- [11] 王新民, 卢央泽, 张钦礼. 煤矸石似膏体胶结充填采场数值模拟优化研究[J]. *地下空间与工程学报*, 2008, 4(2): 346-350.
- WANG XIN-MIN, LU YANG-ZE, ZHANG QING-LI. Simulating and optimizing the configuration parameter of stope in plaster-like filling [J]. *Chinese Journal of Underground Space and Engineering*, 2008, 4(2): 346-350.
- [12] ZHANG QIN-LI, HU GUAN-YU, WANG XIN-MIN. Hydraulic calculation of gravity transportation pipeline system for backfill slurry [J]. *Journal of Central South University of Technology*, 2008, 15(5): 645-649.
- [13] 王新民, 肖卫国, 王小卫, 等. 金川全尾砂膏体充填料浆流变特性研究[J]. *矿冶工程*, 2002, 22(3): 13-16.
- WANG XIN-MIN, XIAO WEI-GUO, WANG XIAO-WEI, et al. Study on rheological properties of full tailing paste filling slurry of Jinchuan mine[J]. *Mining and Metallurgical Engineering*, 2002, 22(3): 13-16.
- [14] WANG XIN-MIN, LI JIAN-XIONG. Rheological properties of tailing paste slurry[J]. *Journal of Central South University of Technology*, 2004, 11(1): 75-80.
- [15] ZHANG QIN-LI, HU GUAN-YU, WANG XIN-MIN. Hydraulic calculation of gravity transportation pipeline system for backfill slurry[J]. *Journal of Central South University of Technology*, 2008, 15(5): 645-649.

(编辑 郑洁)