文章编号:1000-582X(2011)02-130-06

用渐近变分法对复合材料层合板简化数值建模及仿真

钟轶峰[1a,b],余文斌[2]

(1. 重庆大学 a. 土木工程学院;b. 山地城镇建设与新技术教育部重点实验室,重庆 400045;
2. 美国犹他州立大学 机械与航空工程系,美国 84322-4130)

摘　要:为有效分析三维复合材料层合板非线性、单向耦合弹性问题,基于渐近变分方法构建单斜对称的复合材料层合板的简化模型。推导了基于旋转张量分解概念的复合材料层合板能量表达式;利用渐近变分法将三维层合板严格拆分为二维板分析和沿法线方向的一维非线性分析;进行了降维后近似能量推导及 reissner 形式转换;提供了三维场重构关系以得到沿厚度方向的准确应力分布。通过对一具有四层复合层合板的柱形弯曲算例表明:基于该理论和重构过程开发的渐近变分程序 VAPAS 重构生成的三维应力场精确性较古典层合理论更好,与三维有限元精确解相一致。

关键词:渐近变分法;层合板;三维重构;reissner 模型

中图分类号:TB330.1　　　　**文献标志码:**A

Simplified numerical modeling and simulation of composite laminated plates by the variational asymptotic method

ZHONG Yi-feng[1a,b], *YU Wen-bin*[2]

(1a. College of Civil Engineering; b. Key Laboratory of New Technology for Construction of Cities in Mountain Area, Ministry of Education, Chongqing Universiy, Chongqing 400045, P. R. China;
2. Department of Mechanics and Aerospace Engineering, Utah State University, 84322-4130 U. S.)

Abstract: This paper develops a simplified model for composite laminated plates by the variational asymptotic method (VAM) in order to efficiently analyze the nonlinear, one-way couples problem. It deduced the 3D energy expressions based on the decomposition of rotation tensor (DRT). The 3D laminated plate model is decomposed into a 2D plate analysis and a non-linear 1D analysis along the normal direction. The approximate energy after dimensionality reduction was deduced and converted to a form of reissner model. The 3D field recovery relations are provided to obtain accurate stress distribution through the thickness direction. The cylindrical bending example of 4-layer composite plate shows that the 3D stress fields recovered by this theory have better accuracy than those by the classic laminated theory (CLT), which indicates the validity of this model.

Key words: variational asymptotic method; laminated plates; three-dimensional field recovers; reissner model

收稿日期:2010-09-19

基金项目:重庆市自然科学基金资助项目(CSTC,2007BB6119);重庆大学高层次人才科研基金资助项目(0903005104203);中央高校基本科研业务费(CDJZR10200017)

作者简介:钟轶峰(1975-),男,重庆大学博士,主要从事复合材料力学、结构力学研究,(E-mail)zhongjy58@sina.com。

近 20 年来，复合材料由于其优良的工程属性和制造技术在航天航空、机械、土木等领域的应用不断增加。复合材料结构很多是厚度尺寸比其它 2 个方向尺寸小得多的平板铺层结构，复合材料铺层设计的灵活性为结构的应力计算、变形分析以及强度预测带来额外的复杂性。基于 Kirchhoff 薄板假设、由三维弹性理论推导出的古典层合理论是最简单的复合板分析理论，但若计入板厚，其精度较三维有限元精确解下降很多。Noor[1-3]、Ramesh[4]、Touratier[5]、Icardi[6]、Cho[7] 和 Kim[8-9] 利用板厚相对基准面上的变形很小的特点，将板的厚度坐标从偏微分方程的独立变量中去掉，用精确的二维模型代替三维模型以对古典模型不足之处进行改进，但大部分研究都是基于特定的动力学假设（如沿厚度方向的位移分布假设等），无法较好地反映层合板三维效应和铺层之间的相互作用。

随着近年来计算硬件和软件的发展，可使用三维有限元软件 ANSYS 或 NASTRAN 对这类复合层合板进行三维计算和分析，如王跃进等[10] 以 ABAQUS 有限元软件为平台，对三维复合层合板渐近损伤进行非线性分析；Apalak[11] 的分析模型中对复合材料层合板采用 ANSYS 软件中的八节点三维层状体单元进行应力求解。但仍有必要对这种结构进行简化分析，首先，许多工程问题目前无法用三维有限元分析处理，如实际的转子叶片由 200 多层非常薄的复合层构成，若使用三维有限元模型，每一铺层至少需要一个单元进行模拟，该叶片模型很容易超过 10^9 个自由度，由 4 个转子叶片构成的旋翼气弹性三维有限元分析目前无法在计算机完成；对整个结构进行有限元分析的起始准备工作，包括材料种类的选择、层合和夹层结构的设计以及层合板铺设方式设计中，有限元软件的实用性不大，当在层合板结构的不同层的级别上对复合材料行为（应力、应变分布）进行细节研究时，有限元软件提供的后处理能力尤其有限。尽管三维有限元在连续介质力学框架内能提供很好的准确性，但计算太费时，且耗费大量的计算机资源，难以在规定的设计和分析时间内完成预定目标，因此迫切需要一种高效、快速的专业复合材料层合板分析方法和程序，以缩短设计时间，降低计算成本。

文中以三维复合材料层合板的各向异性、弹性问题为研究对象，利用旋转张量分解概念（DRT）[12-13] 和渐近变分法[14-15]（VAM）对复合材料层合板进行高仿真模拟和三维场精确重构研究，建立一种简单的、便于工程应用的复合材料层合板简化模型，解决复合材料层合板各向异性、非均匀性带来结构复杂性的关键技术问题，为今后复合层合板进一步研究与应用提供新的思路和理论依据。

1　理论基础

1.1　三维复合层合板能量表达式

复合材料层合板变形前基准面上任意一点位置可由图 1 所示的笛卡尔坐标系 x_i 表示，式中 x_α 是基准面上相互正交的坐标，x_3 是法向坐标（拉丁字母下标 i,j,k 代表 1，2，3；希腊字母下标 α 代表 1，2，下同）。引入 1 组沿 x_i 方向的单位向量 b_i，板上任一点的位置可由固定点 O 到 x_α 确定点的位置向量 $\hat{r}$ 描述为

$$\hat{r}(x_1,x_2,x_3)=r(x_1,x_2)+x_3b_3, \tag{1}$$

当定义板的中间层为其基准面时

$$\langle \hat{r}(x_1,x_2,x_3)\rangle = r(x_1,x_2), \tag{2}$$

式中尖括号表示沿板厚度的积分，下同。

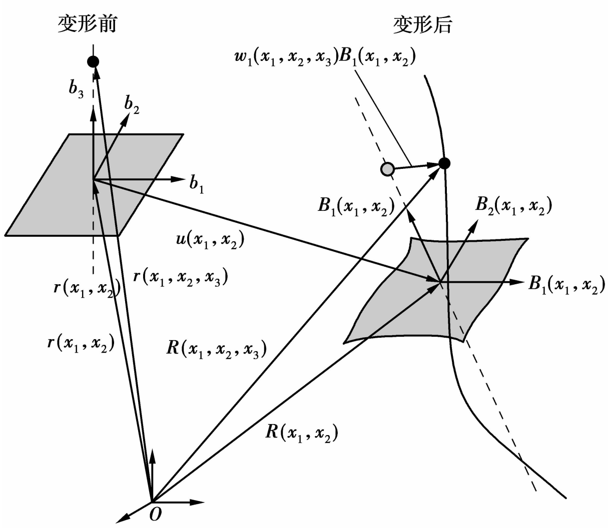


图 1　复合材料层合板变形前、后坐标系

板变形后，位置向量 $\hat{r}$ 转换为变形后的位置向量 $\hat{R}$，后者可通过引入与板变形有关的另一组单位向量 B_i 唯一确定。B_i 仅是为方便表达向量和张量引入的工具，其方向不必与变形面相切。B_i 和 b_i 之间的关系由方向余弦函数矩阵 $\boldsymbol{C}(x_1,x_2)$ 确定为

$$B_i = C_{ij}b_j\ C_{ij} = B_i \cdot b_j, \tag{3}$$

变形板上任一点的位置向量 $\hat{R}$ 可表示为

$$\hat{R}(x_1,x_2,x_3)=R(x_1,x_2)+x_3B_3(x_1,x_2)+w_i(x_1,x_2,x_3)B_i(x_1,x_2), \tag{4}$$

式中 w_i 是翘曲分量，在这里视为未知的三维函数求解，以考虑包括翘曲变形在内的所有变形。

翘曲的引入使式(4)有 6 次冗余，需 6 个约束来求解方程，与式(2)类似，可定义 $\hat{R}$ 在变形板的中间

层，这样，翘曲函数必须满足3个约束：

$$\langle w_i(x_1,x_2,x_3)\rangle = 0, \tag{5}$$

将 B_3 设为与板变形面垂直可确定其它2个约束。

基于旋转张量分解理论[12-14]，由局部小旋转的条件，Jauman-Biot-Cauchy 应变分量可表示为

$$\Gamma_{ij} = 1/2(F_{ij}+F_{ji})-\delta_{ij}, \tag{6}$$

式中，F_{ij} 是变形梯度张量的混合基分量。

$$F_{ij} = B_i \cdot G_k g^k \cdot b_j, \tag{7}$$

式中，$G_k=\partial\hat{R}/\partial x_i$ 为变形状态的协变基，可由广义二维应变定义得到

$$R_{,\alpha} = B_\alpha + \varepsilon_{\alpha\beta}B_\beta, \tag{8}$$

$$B_{i,\alpha} = (-K_{\alpha\beta}B_\beta\times B_3 + K_{\alpha3}B_3)\times B_i, \tag{9}$$

式中：$\varepsilon_{\alpha\beta}$ 为 ε 阶二维广义应变；$K_{\alpha j}$ 为变形曲面的曲率；$(\ )_{,\alpha}=\partial(\ )/\partial x_\alpha$，下同。

假设应变很小，忽略一维广义应变和翘曲的乘积项，层合板三维应变场可表示为

$$\Gamma = \Gamma_h w + \Gamma_\varepsilon \varepsilon + \Gamma_{l_\alpha} w_{,\alpha}, \tag{10}$$

式中：

$$\Gamma = [\Gamma_{11}\quad 2\Gamma_{12}\quad 2\Gamma_{22}\quad 2\Gamma_{13}\quad 2\Gamma_{23}\quad \Gamma_{33}]^{\mathrm{T}}, \tag{11}$$

$$w = [w_1\quad w_2\quad w_3]^{\mathrm{T}}, \tag{12}$$

$$\varepsilon = [\varepsilon_{11}\quad 2\varepsilon_{12}\quad \varepsilon_{22}\quad K_{11}\quad K_{12}+K_{21}\quad K_{22}]^{\mathrm{T}}, \tag{13}$$

算子 Γ_h，Γ_ε，Γ_{l_α} 可参阅文献[14]。

板每单位面积上的应变能可表示为

$$U = 1/2\langle \Gamma^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\Gamma\rangle, \tag{14}$$

式中 $\boldsymbol{D}$ 是 6×6 阶对称材料参数阵。

通过引入板变形后的拉格朗日虚拟位移和旋转变量，可得到载荷产生的虚功为

$$\delta\hat{R} = \delta\bar{q}_{Bi}B_i + x_3\delta\bar{\psi}_{Bi}\times B_3 + \delta w_i B_i + \delta\bar{\psi}_{Bi}B_i\times w_j B_j, \tag{15}$$

式中虚拟位移为

$$\delta\bar{q}_{Bi} = \delta u\cdot B_i, \tag{16}$$

虚拟旋转为

$$\delta B_i = (-\delta\bar{\psi}_{B\beta}B_\beta\times B_3 + \delta\bar{\psi}_{B3}B_3)\times B_i。 \tag{17}$$

由于应变和翘曲变形很小，可安全地忽略虚拟旋转中翘曲与荷载的乘积项，得到荷载 $\tau_i B_i$，$\beta_i B_i$，$\varphi_i B_i$（分别作用在顶面、底面和厚度方向）产生虚拟位移所做的虚功为

$$\begin{aligned}\delta\overline{W} = &(\tau_i+\beta_i+\langle\varphi_i\rangle)\delta\bar{q}_{Bi}\\ &+\delta\bar{\psi}_{B\alpha}[h/2(\tau_\alpha-\beta_\alpha)+\langle x_3\varphi_\alpha\rangle]\\ &+\delta(\tau_i w_i^{+}+\beta_i w_i^{-}+\langle\varphi_i w_i\rangle),\end{aligned} \tag{18}$$

式中 $(\ )^{+}=(\ )|_{x3=h/2}$，$(\ )^{-}=(\ )|_{x3=-h/2}$，下同。

根据虚功原理，复合层合板变形后的能量问题完整的表述为

$$\delta U - \delta\overline{W} = 0, \tag{19}$$

能量的泛函为

$$\prod = U + W, \tag{20}$$

在式(5)约束下的总能量中，w 是建模中唯一需确定的未知量，可由对总能量最小化求得。

$$\delta\prod = 0。 \tag{21}$$

式(20)仅是原三维板弹性问题的另一表达形式。若直接进行求解，将会遇到与原三维板弹性问题相同的困难。若板由多层复合层构成，该计算过程将变得十分繁琐。文中借助渐近变分法渐近计算三维翘曲函数，可使计算得到简化。为考虑任何横截面形状和各向异性材料，首先应用有限元方法将三维翘曲场离散为

$$w(x_1,x_2,x_3) = S(x_3)V(x_1,x_2), \tag{22}$$

式中：$S(x_3)$ 表示单元形函数，V 是横断面节点翘曲位移。将式(22)代入(19)中，可得到离散形式的总能量为

$$\begin{aligned}2\prod = &V^{\mathrm{T}}EV + 2V^{\mathrm{T}}(D_{h\varepsilon}\varepsilon + D_{hl_1}V_{,1} + D_{hl_2}V_{,2})\\ &+\varepsilon^{\mathrm{T}}D_{\varepsilon\varepsilon}\varepsilon + V_{,1}^{\mathrm{T}}D_{l_1l_1}V_{,1} + V_{,2}^{\mathrm{T}}D_{l_2l_2}V_{,2}\\ &+2(V_{,1}^{\mathrm{T}}D_{l_1\varepsilon}\varepsilon + V_{,2}^{\mathrm{T}}D_{l_2\varepsilon}\varepsilon + V_{,1}^{\mathrm{T}}D_{l_1l_2}V_2) + 2V^{\mathrm{T}}L,\end{aligned} \tag{23}$$

式中，$L=-S^{+\mathrm{T}}\tau-S^{-\mathrm{T}}\beta-\langle S^{\mathrm{T}}\varphi\rangle$ 为荷载相关项。

新引入的与几何形状和材料属性有关的变量包括：

$$\begin{aligned}&E = \langle[\Gamma_h S]^{\mathrm{T}}D[\Gamma_h S]\rangle,\ D_{h\varepsilon} = \langle[\Gamma_h S]^{\mathrm{T}}D\Gamma_\varepsilon\rangle,\\ &D_{hl_1} = \langle[\Gamma_h S]^{\mathrm{T}}D[\Gamma_{l_1}S]\rangle,\ D_{hl_2} = \langle[\Gamma_h S]^{\mathrm{T}}D[\Gamma_{l_2}S]\rangle,\\ &D_{\varepsilon\varepsilon} = \langle\Gamma_\varepsilon^{\mathrm{T}}D\Gamma_\varepsilon\rangle,\ D_{l_1l_1} = \langle[\Gamma_{l_1}S]^{\mathrm{T}}D[\Gamma_{l_1}S]\rangle,\\ &D_{l_1l_2} = \langle[\Gamma_{l_1}S]^{\mathrm{T}}D[\Gamma_{l_2}S]\rangle,\ D_{l_2l_2} = \langle[\Gamma_{l_2}S]^{\mathrm{T}}D[\Gamma_{l_2}S]\rangle,\\ &D_{l_1\varepsilon} = \langle[\Gamma_{l_1}S]^{\mathrm{T}}D\Gamma_\varepsilon\rangle,\ D_{l_2\varepsilon} = \langle[\Gamma_{l_2}S]^{\mathrm{T}}D\Gamma_\varepsilon\rangle,\end{aligned} \tag{24}$$

式(5)的离散形式为

$$V^{\mathrm{T}}H\boldsymbol{\psi} = 0, \tag{25}$$

式中：$H=\langle S^{\mathrm{T}}S\rangle$；$\boldsymbol{\psi}$ 是 E 的正交化核心矩阵，$\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}H\boldsymbol{\psi}=1$。这样三维翘曲函数的求解问题转化为在式(25)约束下式(23)最小化。

1.2 降维后的近似能量公式推导

众所周知，弹性体的形态完全由其能量所确定。渐近变分法(VAM)是一种有效的数学工具，可用2维能量尽可能准确地再现3维能量。对复合层合板结构，可选择 h/l 和广义二维应变的阶数 n 作为渐近变分计算所需的小参数。式(10)的第一项是 $\|V\|/h$ 的阶数，最后二项是 $\|V\|/l$ 的阶数，很明显比第一项阶数高，利用该特征可避免求解未知函数的导数。各分量的阶数为

$$\varepsilon_{\alpha\beta} \sim h_{\kappa\alpha\beta} \sim n, f_3 \sim \mu(h/l)^2 n,$$
$$f_\alpha \sim \mu(h/l)n, m_\alpha \sim \mu h(h/l)n, \tag{26}$$

式中 μ 为材料项的阶数。

应用 VAM，首先需根据泛函的不同阶数找到主导项。由于总能量中只有翘曲是变化的，只需找到仅含有翘曲的主导项或翘曲与其它量乘积项(如广义应变和荷载)的主导项。

对式(23) 零阶近似后泛函的主导项为

$$2\prod\nolimits_0^* = V^{\mathrm{T}}EV + 2V^{\mathrm{T}}D_{h\varepsilon}\varepsilon, \tag{27}$$

借助拉格朗日乘子 Λ 通过对变量的常规计算可得到式(25)约束下式(27)的欧拉-拉格朗日方程为

$$EV + D_{h\varepsilon}\varepsilon = H\boldsymbol{\psi}\Lambda, \tag{28}$$

考虑内核矩阵 $\boldsymbol{\psi}$ 的属性，拉格朗日乘子 Λ 为

$$\Lambda = \boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}D_{h\varepsilon}\varepsilon, \tag{29}$$

将式(29)代回式(28)，可得

$$EV = (H\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}} - I)D_{h\varepsilon}\varepsilon。 \tag{30}$$

由于式(30)右边与 V 的零空间 E 正交，存在唯一解与零空间 E 线性独立，可选择任何约束以获得 V 的解为

$$V = V^* + \boldsymbol{\psi}\lambda, \tag{31}$$

式中：V^* 为线性体系解，λ 可由式(25)确定为

$$\lambda = -\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}HV^*, \tag{32}$$

式(32)代入式(31)，则式(25)约束下式(23)的最小化解为

$$V = (I - \boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}H)V^* = \hat{V}_0\varepsilon = V_0, \tag{33}$$

将式(33)代入式(27)得到渐近修正到 μn^2 阶的总能量泛函为

$$2\prod\nolimits_0 = \varepsilon^{\mathrm{T}}(\hat{V}_0^{\mathrm{T}}D_{h\varepsilon} + D_{\varepsilon\varepsilon})\varepsilon。 \tag{34}$$

这一近似能量与古典分层板理论得出的结果相吻合，但并未建立在 Kirchhoff 动力学假设基础上，且尽管能量形式相同，但由 VAM 推导出的横向法线方向应变并不为零。

注意到零阶近似得到的翘曲是 n 阶，根据 VAM 原理，为接受零阶近似结果，必须检查下一阶近似是否高于此阶近似。为得到一阶近似翘曲，对零阶近似翘曲进行如下摄动

$$V = V_0 + V_1。 \tag{35}$$

将式(35)代入式(10)及(23)，可得到一阶近似为主导项的总能量泛函为

$$2\prod\nolimits_1^* = V_1^{\mathrm{T}}EV_1 + 2V_1^{\mathrm{T}}D_1\varepsilon_{,1} + 2V_2^{\mathrm{T}}D_2\varepsilon_{,2} + 2V_1{}^{\mathrm{T}}L, \tag{36}$$

式中 $D_1 = (D_{hl_1} - D_{hl_1}^{\mathrm{T}})\hat{V}_0 - D_{l_1\varepsilon}$，$D_2 = (D_{hl_2} - D_{hl_2}^{T})\hat{V}_0 - D_{l_2\varepsilon}$。

由式(23)可知荷载的阶数与不同的翘曲函数的阶数有关。同零阶近似一样，可求解一阶翘曲场为

$$V_1 = V_{11}\varepsilon_{,1} + V_{12}\varepsilon_{,2} + V_{1L}。 \tag{37}$$

得到渐近修正到 $\mu(h/l)^2 n$ 阶的总能量泛函

$$2\prod\nolimits_1^* = \varepsilon^{\mathrm{T}}A\varepsilon + \varepsilon_{,1}{}^{\mathrm{T}}B\varepsilon_{,1} + 2\varepsilon_{,1}{}^{\mathrm{T}}C\varepsilon_{,2} + \varepsilon_{,2}{}^{\mathrm{T}}D\varepsilon_{,2} + 2\varepsilon^{\mathrm{T}}F + P, \tag{38}$$

式中：

$$A = \hat{V}_0^{\mathrm{T}}D_{h\varepsilon} + D_{\varepsilon\varepsilon},\quad B = \hat{V}_0^{\mathrm{T}}D_{l_1l_1}\hat{V}_0 + V_{11}^{\mathrm{T}}D_1$$
$$C = \hat{V}_0^{\mathrm{T}}D_{l_1l_2}\hat{V}_0 + 1/2(V_{11}^{\mathrm{T}}D_2 + D_1^{\mathrm{T}}V_{12}),$$
$$D = \hat{V}_0^{\mathrm{T}}D_{l_2l_2}\hat{V}_0 + V_{12}^{\mathrm{T}}D_2$$
$$F = \hat{V}_0^{\mathrm{T}}L - 1/2(D_1^{\mathrm{T}}V_{1L,1} + V_{11}^{\mathrm{T}}L_{,1} + D_2^{\mathrm{T}}V_{1L,2} + V_{12}^{\mathrm{T}}L_{,2}),$$
$$P = V_{1L}^{\mathrm{T}}L。 \tag{39}$$

1.3　将近似能量转换为 Reissner 模型形式

经二次渐近修正近似能量可直接使用，因包含广义应变量的导数，涉及到更复杂、超过必要的边界条件。为得到实用的能量方程，可将近似能量转换为工程常用的 Reissner 模型形式。

在 Reissner 模型中有 2 个增加的横向剪切应变自由度 $\gamma = [2\gamma_{13}\quad 2\gamma_{23}]^{\mathrm{T}}$，将其纳入横向法向旋转中。可将古典应变量表示为 Reissner 模型的应变量形式为

$$\varepsilon = R - D_\alpha\gamma_{,\alpha}, \tag{40}$$

式中：

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$
$$D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$
$$R = [\varepsilon_{11}^*\quad 2\varepsilon_{12}^*\quad \varepsilon_{22}^*\quad K_{11}^*\quad K_{12}^* + K_{21}^*\quad K_{22}^*]^{\mathrm{T}}。 \tag{41}$$

将式(40)代入式(38)，可得到 Reissner 模型应变表示的修正到二阶的总能量泛函为

$$2\prod\nolimits_R = R^{\mathrm{T}}AR - 2R^{\mathrm{T}}AD_\alpha\gamma_{,\alpha} + R_{,1}^{\mathrm{T}}BR_{,1} + 2R_{,1}^{\mathrm{T}}CR_{,2} + R_{,2}^{\mathrm{T}}DR_{,2} + 2R^{\mathrm{T}}F + P。 \tag{42}$$

1.4　三维场重构关系推导

经渐近修正的 Reissner 形式近似能量尽可能接近总能，可使用该模型进行静动态、屈曲和气弹性分析，但降维模型的可靠性取决于其对原结构三维场预测的准确性，因此需提供重构关系以完善降维模型。文中通过二维变量和 x_3 来重构三维位移、应变和应力场。

对二阶渐近修正的近似能量，可基于渐近修正的严格定义，由式(1)、(3)、(4)可得一阶渐近修正的三维变形为

$$\boldsymbol{U}_{3d} = u_{2d} + x_3\begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_{31} \\ \boldsymbol{C}_{32} \\ \boldsymbol{C}_{33} - 1 \end{bmatrix} + SV_0 + S\overline{V}_1。 \tag{43}$$

式中：$\boldsymbol{U}_{3d}$ 是三维变形的列阵，u_{2d} 是板的变形。$\boldsymbol{C}_{ij}$ 是由式(3)得到的全局旋转张量分量。

从式(10)得到一阶渐近修正的三维重构应变场

$$\Gamma = \Gamma_h S(V_0 + \bar{V}_1) + \Gamma_\varepsilon \varepsilon + \Gamma_{l1} S V_{0,1} + \Gamma_{l_2} S V_{0,2}。\tag{44}$$

然后，可使用三维本构关系得到三维应力 σ_{ij}。

2 算 例

基于前述理论和重构关系开发了渐近变分法板/壳计算机分析程序(VAPAS)对一具有 4 层复合材料层合板柱形弯曲问题进行分析。重构的三维应力分布与三维有限元精确解和古典层合理论解(CLT)进行比较以验证该理论和程序的有效性、准确性。

2.1 模型参数

复合材料工程弹性常数列于表 1 中。

表 1 复合材料工程弹性常数

E_1/GPa	E_2/GPa	G_{12}/GPa	G_{22}/GPa	ν_{12}	ν_{22}
172.4	6.9	3.45	1.38	0.25	0.25

复合材料层合板构型(如图 2)：板长 L=10 cm，板厚 h=2.5 cm，厚长比 h/L=0.25；各层的倾角由底至顶分别是[0.5°/90.5°/90.5°/0.5°]，此类型板的属性和性能非常接近于具有柔性核心的夹心板模型。x_1 为纤维方向，x_2 为层合板面内垂直纤维方向的方向，x_3 为层合板铺层叠加的厚度方向。板两端简支，承受正弦变化荷载：

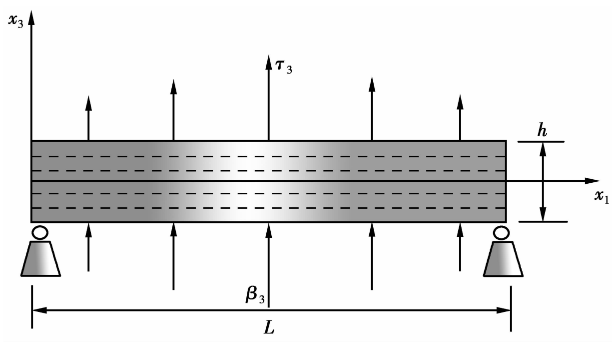
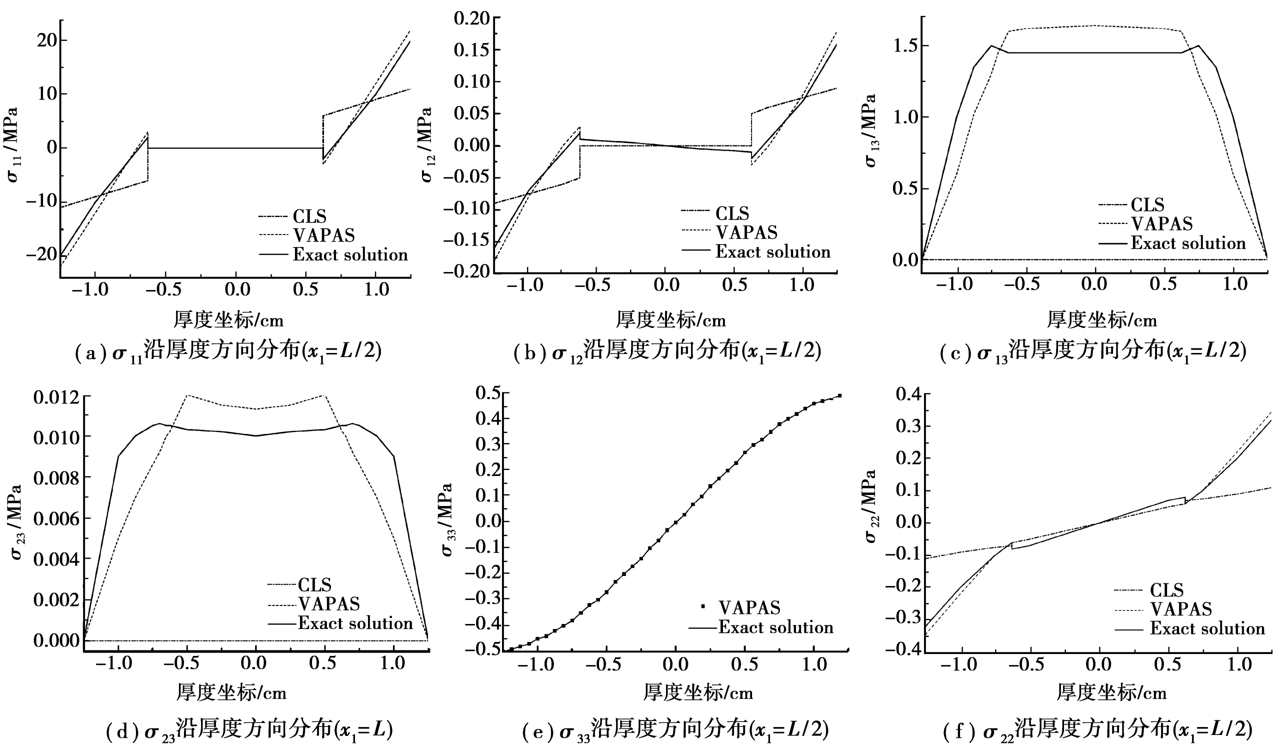


图 2 复合材料层合板柱形弯曲问题模型(4 层)

$$\tau_3 = \beta_3 = \frac{p_0}{2}\sin\left(\frac{\pi x_1}{L}\right), \tau_\alpha = \beta_\alpha = 0。\tag{45}$$

2.2 数值分析与讨论

沿厚度方向分布的三维应力场数值分析结果如图 3 所示。图中“CLS“表示古典层合理论解，“VAPAS”表示变分渐近法解；“Exact solution”表示三维有限元精确解。



(a) σ_{11}沿厚度方向分布($x_1=L/2$)

(b) σ_{12}沿厚度方向分布($x_1=L/2$)

(c) σ_{13}沿厚度方向分布($x_1=L/2$)

(d) σ_{23}沿厚度方向分布($x_1=L$)

(e) σ_{33}沿厚度方向分布($x_1=L/2$)

(f) σ_{22}沿厚度方向分布($x_1=L/2$)

图 3 沿厚度方向分布的三维应力场 6 个分量数值分析结果

限于篇幅,只在图 3 绘出大多数板分析程序无法准确预测的沿厚度方向应力变化,应变与应力变化规律相同,未在此绘出。值得注意的是,因二维变量是 x_1 的正弦或余弦函数,应力分量 σ_{23} 绘于 $x_1=0$ 或 $x_1=L$ 处,而其余应力分量 $x_1=L/2$ 处。

可看出,对于沿厚度方向的平面应力分量 σ_{11}、σ_{12}、σ_{22},所有 VAPAS 解均与三维有限元精确解吻合较好,而 CLT 解在边缘层合板厚度范围内与精确解存在较大偏差;对于横向应力分量 σ_{13}、σ_{23},CLT 计算结果均为零,VAPAS 可获得比 CLT 解更精确的结果;对于横向法线方向应力 σ_{33},CLT 无法获得满意的数值计算结果,而 VAPAS 与精确解一致;VAPAS 将原由多层层合板构成的三维板模型等效为单层板模型,与三维有限元相比,VAPAS 可节省 2～3 阶计算量,在一般台式机上 1 s 内完成所有计算。

3 结　论

1)基于渐近变分方法,建立了单斜对称材料构成的复合层合板完整的渐近修正理论和重构关系,并转换为工程常用的 Reissner 形式,该方法和理论可进一步扩展到壳体结构中去(板可视为衰退的、无初始曲率的壳体)。

2)使用渐近变分法和最低总势能原则求解未知的二维翘曲函数,不需任何动力学假设,也不同于传统的板理论假设翘曲场的一般形式,用高阶翘曲作参数来求解假设函数中的未知参数的方法。整个过程便于迭代应用。

3)通过对一具有四层复合层合板的柱形弯曲算例表明:基于该理论和重构过程开发的渐近变分程序 VAPAS 重构生成的三维应力场精确性较古典层合理论更好,可与三维有限元计算结果相媲美;且计算量小(与三维有限元相比,可节省 2～3 阶计算量),运行速度快,说明了该方法和程序用于复合层合板三维场重构的有效性和实用性。

参考文献:

[1] NOOR A K, BURTON S W. Assessment of computational models for multilayered composite shells [J]. Applied Mechanics Review, 1990, 43(10):47-54.

[2] NOOR A K, BURTON W S. Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates [J]. Applied Mechanics Review, 1989, 41(5):1-13.

[3] NOORA K, MALIK M. An assessment of five modeling approaches for thermo-mechanical stress analysis of laminated composite panels [J]. Computational Mechanics, 2000, 25(7):43-58.

[4] RAMESH S S, WANG C M, REDDY J N. A higher-order plate element for accurate prediction of interlaminar stresses in laminated composite plates [J]. Composite Structures, 2009, 91(3):337-357.

[5] TOURATIER M, BLANC M. An efficient and simple refined model for temperature analysis in thin laminated composites[J]. Composite Structures, 2007, 77(2): 193-205.

[6] ICARDI U, FERRERO L. Impact analysis of sandwich composites based on a refined plate element with strain energy updating[J]. Composite Structures, 2009, 81(1):35-51.

[7] CHO Y B, AVERILL R C. First-order zig-zag sublaminate plate theory and finite element model for laminated composite and sandwich panels [J]. Composite Structures,2000, 50(8):1-15.

[8] KIM J S, CHO M. Enhanced first-order shear deformation theory for laminated and sandwich plates [J]. Journal of Applied Mechanics, 2005, 72(2):809-817.

[9] KIM J S, CHO M. Enhanced modeling of laminated and sandwich plates via strain energy transformation [J]. Composites Science and Technology, 2006, 72(6):809-817.

[10] 王跃全,童明波,朱书华. 三维复合材料层合板渐进损伤非线性分析模型 [J]. 复合材料学报, 2009, 26(5): 160-168.
WANG YUE-QUAN, TONG MING-BO, ZHU SHU-HUA. 3D nonlinear progressive damage analysis model for composite laminates [J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2009, 26(5): 160-168.

[11] APALAK Z G, APALAK M K, GENC M S. Progressive damage modeling of an adhesively bonded unidirectional composite single-lap joint in tension at the mesoscale level [J] . Journal of Thermoplastic Composite Materials, 2006, 19 (6): 671-702.

[12] DANIELSON D A. Proceedings of the 2nd pan american congress of applied mechanics. Finite rotation with small strain in beams and plates[C]. Valparaiso, Chile 1991:156-164.

[13] DANIELSON D A, HODGES D H. Nonlinear beam kinematics by decomposition of the rotation tensor [J]. Journal of Applied Mechanics, 1987, 20(54):258-262.

[14] PINHAS BAR-YOSEPH. New variational-asymptotic formulations for interlaminar stress analysis in laminated plates [J]. Journal of Applied Mathematics and Physics, 1986, 37: 305-321.

[15] LEE CHANG-YONG. Dynamic variational asymptotic procedure for laminated composite shells—part I: low-frequency vibration analysis [J]. Journal of Applied Mechanics, 2009(76): 110-121.

(编辑　陈移峰)