

文章编号:1000-582X(2011)03-032-06

## 螺旋锥齿轮切齿调整参数的精确反调

郭晓东,张卫青,张明德,翟庆富

(重庆理工大学汽车零部件制造及检测技术教育部重点实验室,重庆 400050)

**摘要:**针对螺旋锥齿轮齿形误差难以精确修正的问题,在国产 3906 型齿轮测量中心上,采用坐标测量法获得了螺旋锥齿轮的齿面形状;提出进行齿深控制的锥齿轮测量齿面切齿调整参数非线性最小二乘优化反调方法,并建立了反调优化的数学模型;采用该方法对磨齿后的某弧齿锥齿轮小轮进行反调计算,结果表明该方法能较为精确地获取锥齿轮副的切齿调整参数。

**关键词:**锥齿轮;测量;优化算法;反调

**中图分类号:**TH132.4

**文献标志码:**A

### The machine setting reverse method of spiral bevel gear

GUO Xiao-dong, ZHANG Wei-qing, ZHANG Ming-de, ZHAI Qing-fu

(Key Laboratory of Manufacture and Test Techniques for Automobile Parts, Ministry of Education, Chongqing University of Technology, Chongqing 400050, P. R. China)

**Abstract:** The profile error correction of spiral bevel gears is difficult. To solve this problem, the inspected method of spiral bevel gears tooth surface is studied in 3906 gear measuring center. The grids of tooth surface is measured by measurement software. Taking reference tooth surface as the goal, a method of machine setting reverse using approximation algorithms is proposed, and a mathematical model is build. At last, a reverse example based on grinded spiral gear is given. The result shows that the cutting machine setting of bevel gear tooth surface can be exactly calculated.

**Key words:** bevel gears; measurements; approximation algorithms; error correction

弧齿锥齿轮及准双曲面齿轮(简称螺旋锥齿轮)的齿面几何形状在很大程度上决定了锥齿轮副轮齿接触区形态,对锥齿轮实际齿面相对于基准齿面的偏差进行测量是控制锥齿轮接触质量的重要技术手段。锥齿轮由于其齿面结构的复杂性,加工中的调整误差及热处理变形往往导致最后得到锥齿轮实际齿面偏离理论齿面,其实际得到接触区也与理论计算不同。在目前的生产实践中为了修正误差,往往需要工人不断地修正机床调整参数进行反复的试切,然后通过滚动检查来判断实际的接触区形态是

否与理论计算一致,这个过程工程上称之为切齿调整参数反调。通常整个反调过程十分繁琐,一般要持续几天时间。另一方面由于目前的滚动检查机无法获得接触区的准确参数,即使能够通过手工反调得到相近的接触区形态,也无法保证最后得到的齿面形状与设计的理论齿面一致<sup>[1-2]</sup>。

随着齿轮测量中心在锥齿轮齿形测量上的广泛应用,测取齿面形状已经不存在问题,这就使得实现锥齿轮齿面实际切齿参数的准确反求及修正成为可能<sup>[1-2]</sup>。国内外学者在这方面进行了一些研究,文献

收稿日期:2010-10-14

基金项目:国家自然科学基金资助项目(50675236);国家科技支撑计划资助课题(2006BAF01B01-03);国家高技术研究发展专项经费资助项目(2007AA042005)

作者简介:郭晓东(1961-),男,重庆理工大学研究员,主要从事锥齿轮传动技术、复杂曲面零件智能化制造与检测技术的研究,(E-mail)xdguo@cqit.edu.cn。

[3-4]研究了机床调整参数对齿面加工误差的影响,以便于齿面误差的手工反调,文献[5-7]提出了解非线性超定方程组的方法实现机床调整参数自动反求,文献[8-9]研究了采用优化方法修正齿面误差,但是未能考虑对齿根深度的控制。笔者针对这一问题,研究了锥齿轮齿面坐标测量及考虑齿深控制的切齿参数的非线性最小二乘反调方法,具有更高的反求成功率,对提高锥齿轮新产品的试切效率,保证所加工的齿轮接触性能与理论设计一致有很强的实用价值。

## 1 锥齿轮齿形测量方法

对锥齿轮齿形进行测量是为了获得其数字化齿面,以此作为齿面的反求基准。如图1所示,进行测量以前,先将待测齿轮正确安装在齿轮测量中心上并标定测头中心的坐标位置。

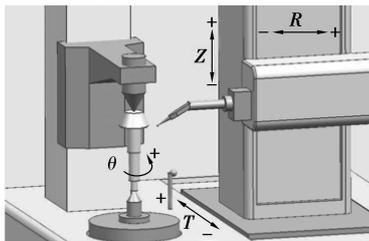


图1 3906型齿轮测量中心测量示意图

根据锥齿轮几何参数将被测齿面在轴截面划分为如图2所示的拓扑网格。对于几何参数未知的齿轮,为了确定齿面测量范围,可通过手动操作方式驱动测头及齿轮测量中心回转工作台运动,保持测头T坐标为零,使测头与齿面在4个角点A、B、C、D接触至测头示值为零,读取该4点的坐标值,根据该4点坐标在齿轮轴截面内划分测量网格<sup>[1]</sup>。

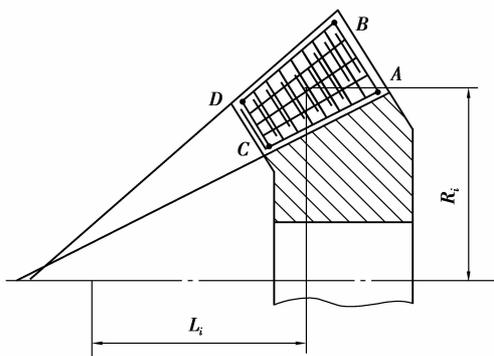


图2 齿面测量范围与测量路径

通常将齿面测量范围沿齿长和齿高方向化为 $m \times n$ 个网格点。以C点为测量起始点,按图2所示测量路径测量,第*i*个测量网格点的R、L坐标值,可由4角点的R、L坐标值线性插值计算求得。

由于锥齿轮齿面螺旋角沿齿长方向的变化不是线性的,为防止在测量过程中测头示值超出测头的量程,由式(1)计算,可将齿面上第*i*个网格点处的回转坐标值 $\theta_i$ 进行适量补偿,即

$$\theta_i = \theta_i \mp k \cdot \alpha, \quad (1)$$

式中: $k=0.1 \sim 0.2$ ;  $\alpha = \pi/Z$  为半角齿距, $Z$ 为齿轮齿数; $\mp$ 对应于左右齿面。

利用计算所得的 $m \times n$ 个网格点的R、L坐标值来控制测头运动轨迹和回转工作台的回转运动,使测头、齿面与测量网格点接触,获取各点的坐标值和测头示值,将测头示值与T坐标叠加,求得齿面上被测网格点在ZOR平面内对应的测头中心的坐标 $R_{pi}$ ,其中 $1 \leq i \leq m \times n$ 。以齿面网格中点M为参考点,将其余各点绕齿轮轴线旋转 $-\varphi_i$ 后,可求得实际齿面上各测量网格点对应的测头中心的坐标:

$$\varphi_i = \theta_i - \theta_M,$$

$$R_{pi} = M(k, -\varphi_i) \cdot R_{pi}, \quad (2)$$

式中: $M(k, \varphi_i)$ 为矢量绕k轴旋转 $\varphi_i$ 角的变换矩阵; $\theta_M$ 为齿面网格中点M对应的回转坐标值。

由 $m \times n$ 个测头中心位置坐标,采用B\_Spline方法可构造测头中心曲面 $R_p^f$ 。对测头中心曲面进行测头半径补偿,由式(3)计算得到实际齿面测量网格点的径矢 $R_i$ 和法矢 $n_i$ 为

$$n_i = n_p^f(u_i, v_i),$$

$$R_i = R_p^f(u_i, v_i) \pm r_p \cdot n_i, \quad (3)$$

式中:正负号由法矢n的方向而定,如n指向两轮齿的空隙取“-”,相反n取“+”; $r_p$ 为测头半径。

在获取基准齿面的过程中,可将待测齿轮的单一齿面作为基准齿面,同时也可将多个同侧齿面的坐标取均值后构造的曲面作为基准齿面。

## 2 锥齿轮切齿调整参数的反调方法

### 2.1 数学模型建立

由文献[10]可知,锥齿轮齿面几何形状由切齿加工中所采用的刀具和机床的调整参数完全确定。以齿轮副的轴交错点为起始点,齿面上任意一点的径矢 $R_d$ 可以表示成刀具参数及机床调整参数的函数。切齿调整参数反调问题的实质就是得到一组刀具和机床调整参数,使得由该组参数计算的理论齿

面与测量标准齿面一致<sup>[11-12]</sup>,将改组调整参数值减去加工实际采用的切齿调整参数值便得到切齿参数的反调量。在锥齿轮齿形测量过程中一般以  $m \times n$  个网格点表征数字化齿面,因此齿面的反求问题可以等效为求解一理论齿面,使得由反求参数形成的轮齿齿面和通过测量建立的基准齿面于测量网格点处重合<sup>[13-14]</sup>,即有

$$f_i(x) = | \mathbf{R}_{di}(r, \varphi, X_p, X_b, E_m, \Gamma, S, R_{aq}, i_0, j_0; \theta, q) - \mathbf{R}_{ci} | = 0 \quad (4)$$

式中:  $\mathbf{R}_{ci}$  为以齿轮的轴交错点为矢量起点的齿面测量点径矢;  $f_i(x)$  为测量点处反求齿面与测量齿面的偏差量;  $\varphi$  为刀齿压力角;  $r$  为刀盘半径;  $X_p$  为水平轮位修正量;  $X_b$  为床位;  $E_m$  为垂直轮位;  $\Gamma$  为机床安装根锥角;  $S$  为径向刀位;  $R_{aq}$  为滚比;  $i_0$  为基本刀倾角;  $j_0$  为基本刀转角;  $q$  为摇台角;  $\theta$  为产形面轴截面角位置参量。

一般情况下测量网格在齿高方向上取 5 点,齿长方向上取 9 点,则式(4)有 45 个方程。方程数多于参变量的个数,因此该方程组为一超定方程组。超定方程组可以求解其精确解和近似解。笔者尝试将理论齿面作为目标,然后人为将某些参变量的数值改变,采用超定方程组求解算法求解,发现仅在参变量的变动很小(小于 0.1 时)的情况下才能够求得精确解,当参变量变动较大或目标采用测量齿面都无法求解。求解失败是由于在解该问题时将齿面的测量误差、热处理误差都认为是由调整参数引起,这不符合实际;而且求解算法中需要对各参变量求偏导数,当且仅当参变量偏差值很小时数值算法中的  $\Delta f / \Delta x \approx \partial f / \partial x$  才成立。

相比之下采用非线性最小二乘优化方法求解该方程组的近似解更为可行,只要能够将由该组近似解确定的齿面与基准齿面于测量网格点处的法向综合偏差控制在合理的范围内,同样能够满足工程需要<sup>[8-9]</sup>。

由此得到齿形的综合偏差为

$$F_1(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m \times n} f_i^2(x). \quad (5)$$

利用式(5)进行优化计算仅能控制反求齿面和测量基准齿面的齿形偏差,不能保证反求齿轮的实际根锥与设计根锥一致,因此优化时需要对齿深进行控制。这里提出 2 种齿深控制的方法。

### 2.1.1 采用控制床位方法控制齿根

在锥齿轮的切齿加工中,床位是控制齿轮加工

齿深的调整参数。通过研究发现在采用普通滚切法加工时,齿轮的切齿调整参数计算中床位与水平轮位存在确定的函数关系:

$$X_b = (X_p - Z_f) / \sin \Gamma, \quad (6)$$

式中  $Z_f$  为根锥顶点到轴交错点的距离。

因此在优化计算过程中可以减少床位这一优化变量,床位按式(5)通过水平轮位来求得。但在采用滚切修正及刀倾法加工时,床位不能通过其他调整参数及齿轮的基本几何参数获得,因此不能采用这种方法控制齿根,而需要采用优化方法来控制。

### 2.1.2 采用优化方法控制齿根

这种方法将实际计算齿根与理论设计齿根沿齿轮径向的差值  $g_i(x)$  作为齿根误差,在优化齿面误差的同时优化齿根误差,如式(7)所示。

$$g_i(x) = | \mathbf{R}_{fi}(r, \varphi, X_p, X_b, E_m, \Gamma, S, R_{aq}, i, j, 2C, 6D, 24E, \theta, q) - \mathbf{R}_{li} |, \quad (7)$$

式中:  $\mathbf{R}_{fi}$  为实际计算齿根点到齿轮轴线的距离;  $\mathbf{R}_{li}$  为理论设计齿根点到齿轮轴线的距离。则齿根的综合偏差为

$$F_2(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m g_i^2(x). \quad (8)$$

综合齿面偏差及齿根偏差 2 种优化,得到最终的优化目标函数

$$F(x) = \omega_1 \cdot F_1(x) + \omega_2 \cdot F_2(x), \quad (9)$$

式中:  $\omega_1$ 、 $\omega_2$  分别为齿面偏差目标函数及齿根偏差目标函数在优化过程中所占的权值;  $m$ 、 $n$  分别为齿面沿齿长和齿高方向的测量网格点数。

另外,值得注意的是在采用刀倾法加工时,加工出来的齿根误差通常与设计齿根相差较大,此时应该以由理论计算得到的调整卡初值加工出来的齿根深度为齿根控制目标。同时在优化过程中由于机床安装根锥角、基本刀倾角及基本刀转角对齿根深度的影响很大且不容易控制,因此在采用刀倾法加工时不应该将其作为优化变量。

## 2.2 齿形偏差的计算

根据锥齿轮的基本机床模型如图 3 所示,可确定产形轮和工件之间的位置及相对运动,运用空间齿轮啮合理论可推导出锥齿轮的齿面方程<sup>[1]</sup>

$$\mathbf{V}_d = \mathbf{V}_l + \mathbf{V}_r + b_l \mathbf{t}, \quad (10)$$

式中:  $\mathbf{t}$  为共轭接触点沿刀刀母线的切矢;  $\mathbf{V}_l$  为刀盘中心到齿面轴交错点的矢量;  $\mathbf{V}_r$  为共轭接触点对应刀尖点到刀盘中心的矢量;  $b_l$  为共轭接触点到刀尖的距离,它可以根据啮合方程求得。  $\mathbf{V}_d$  在切齿调整

参数确定的情况下,是 $q$ 和 $\theta$ 的函数,即给定 $(q_i, \theta_i)$ 可得齿面网格点阵列 $\mathbf{V}_{di}(q_i, \theta_i) (i=1, 2, \dots, m \times n)$ 的坐标。

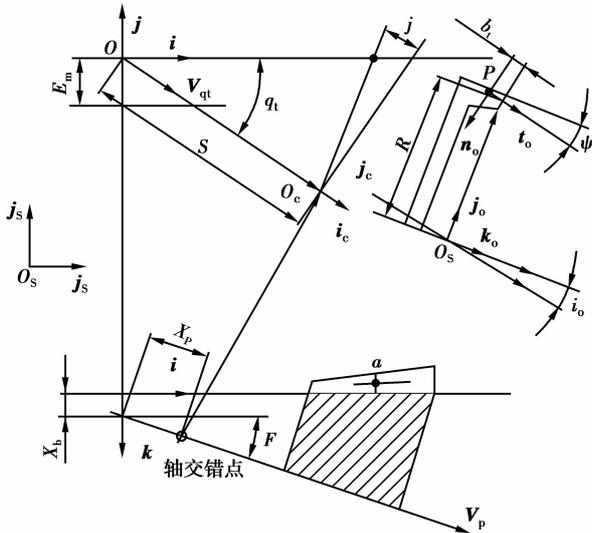


图3 锥齿轮切齿基本机床模型

定义理论齿面点 $\mathbf{R}_{di}$ 与齿面测量点 $\mathbf{R}_{ci}$ 的距离为齿面偏差量 $f_i(x)$ 。 $\mathbf{R}_{di}$ 与 $\mathbf{R}_{ci}$ 一一对应,且将它们旋转投影到齿轮轴截面内重合,即有相同的沿齿轮径向及轴向的度量 $R_i, L_i$ ,同时 $\mathbf{R}_{di}$ 又由齿面网格点阵列 $\mathbf{V}_{di}$ 确定。由此可列出

$$\left. \begin{aligned} L_i(q_i, \theta_i) &= -\mathbf{V}_{di} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{R}_{ci} \cdot \mathbf{k}, \\ R_i(q_i, \theta_i) &= |\mathbf{p} \times \mathbf{V}_{di}| = \sqrt{(\mathbf{R}_{ci} \cdot \mathbf{i})^2 + (\mathbf{R}_{ci} \cdot \mathbf{j})^2} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

解出式(11)所示的二元非线性方程组得出各理论齿面对应的 $(q_i, \theta_i)$ 。再将其带入式(10)得到齿面网格点阵列 $\mathbf{V}_{di}$ 。

在切齿加工时,摇台和工件存在相对滚切运动,按式(10)求得的齿面网格点是在与工件固连的运动坐标系中表示的,不能反映齿面的真实形状,必须进行相应转换将求得的坐标点在同一坐标系中表示。

如上所述首先求出齿面中点 $\mathbf{V}_{di}$ 对应的 $(q_{23}, \theta_{23})$ 参数,进而求得齿面中点 $\mathbf{V}_{d23}(q_{23}, \theta_{23})$ 。以计算该点对应的运动坐标为基准坐标,将其他网格点绕齿轮轴线 $\mathbf{p}$ 旋转 $\Delta q$ 角转换到该坐标系内,则得到各齿面网格点在齿轮自身坐标系的表示。之后将其绕 $\mathbf{j}$ 轴旋转 $\mu$ 角转化到静坐标系内,再将其绕 $\mathbf{k}$ 轴旋转 $\gamma$ 角使得齿面中点位于 $i_s O_s j_s$ 平面,最后才得到理论齿面点的径矢 $\mathbf{R}_{di}$ ,如式(12)所示。

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{di} &= \mathbf{M}(\gamma)_k \mathbf{M}(\mu)_j \mathbf{M}(\Delta q)_p \mathbf{V}_{di}, \\ \Delta q &= \text{sgn}(q_i - q_{23}), \\ \mu &= \pi/2 + \Gamma, \\ \gamma &= \arctan\left(\frac{\mathbf{V}_{d23} \cdot \mathbf{i}}{\mathbf{V}_{d23} \cdot \mathbf{j}}\right), \end{aligned} \quad (12)$$

式中 $\text{sgn}$ 为符号函数,右旋构件取正,左旋构件取负。将式(12)代入式(4)中便可计算出齿面偏差量 $f_i(x)$ 。

### 2.3 齿根偏差计算

在铣齿加工过程中铣刀盘的刀尖加工出齿根,对应齿面方程(10)中 $b_t$ 值为0时求得的共轭接触点,因此要求得 $R_{fi}$ ,需要求解如下的二元非线性方程组:

$$\left. \begin{aligned} L_i(q_i, \theta_i) &= -\mathbf{V}_{di} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{R}_{di} \cdot \mathbf{k}, \\ b_{fi}(q_i, \theta_i) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

解出式(13)所示的二元非线性方程组得出各齿根点对应的 $(q_{fi}, \theta_{fi})$ ,再将其带入方程(10)得到齿根点阵列 $\mathbf{V}_{fi}(q_{fi}, \theta_{fi}) (i=1, 2, \dots, m \times n)$ ,则式(7)中实际齿根的度量值为

$$\mathbf{R}_{fi} = |\mathbf{p} \times \mathbf{V}_{fi}|. \quad (14)$$

设计齿根的度量值 $\mathbf{R}_{fi}$ 可按如下步骤求解:

$$\begin{aligned} \text{令 } R_1 &= R_a - h_e \cos \delta_a, L_1 = L_a + h_e \sin \delta_a, \\ R_2 &= R_1 - B \sin \delta_f / \cos \theta_r, L_2 = L_1 - B \cos \delta_a / \cos \theta_r, \end{aligned} \quad (15)$$

式中: $R_a$ 为外圆半径; $h_e$ 为理论全齿高; $\delta_a$ 为面锥角; $L_a$ 为轮冠至轴交错点的距离; $B$ 为齿宽; $\delta_f$ 为根锥角; $\theta_r$ 为齿根角。则理论齿根线方向矢量 $\mathbf{V}_f$ 及起点径矢 $\mathbf{V}_e$ 的计算式为

$$\mathbf{V}_f = \{R_1 - R_2, L_1 - L_2, 0\}, \mathbf{V}_e = \{R_1, L_1, 0\}. \quad (16)$$

由此得到任意一齿面对应的齿根矢量 $\mathbf{V}_{fi}$ 的计算式为

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{fi} &= \mathbf{V}_e + l_{fi} \mathbf{V}_f / |\mathbf{V}_f|, \\ l_{fi} &= (L_i - L_1) / \cos \delta_f, \end{aligned} \quad (17)$$

则

$$R_{fi} = \mathbf{V}_{fi} \cdot \mathbf{V}_i, \quad (18)$$

式中 $\mathbf{V}_i = \{1, 0, 0\}$ ,将计算得到 $R_{fi}, R_{li}$ 代入式(7)得到齿根误差。当采用刀倾法加工齿轮时令 $R_{li} = R_{fi}^0, R_{fi}^0$ 为由优化初值计算得到的齿根高。

## 4 实验研究

利用以上所述的方法,在3906型齿轮测量中心上对某车型主传动锥齿轮副小轮进行了测量,该齿

轮副的基本参数如表 1 所示,为了减少热处理误差,该齿轮经过 HGM 方法磨齿加工,测量得到该齿轮副的齿形误差云图如图 4 所示。采用第 2 节所述的方法对该齿轮的切齿调整参数进行反调,考虑机床的传动比一般由数控系统的电子展成保证,误差很小,刀盘的压力角及半径均修整得很精确,因此未将这 3 个参数作为优化变量,反调后重新对其进行测量,得齿形误差云图如图 5 所示。表 2、3、4 分别列出了凹面反调前后的切齿调整参数及齿面误差数值。由表可见齿形误差明显较小,齿形误差均在 0.01 mm 以内,考虑齿面在加工及测量中均存在误差,这样的反调误差不可避免,但这样的小误差对齿轮副的接触区影响不大,能够满足工程需要。

表 1 实验锥齿轮副基本参数

齿轮	齿数	旋向	安装距/mm	偏置距/mm
小轮	11	左	100.00	30.00
大轮	43	右	59.00	

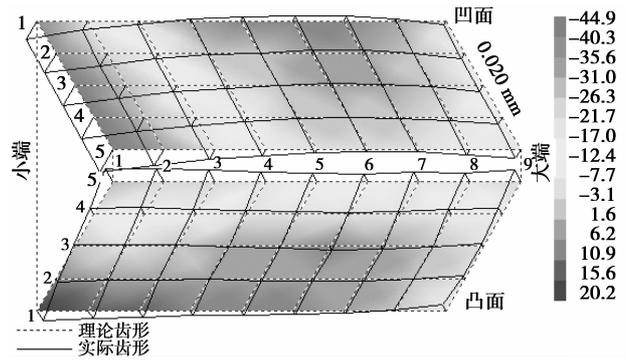


图 4 反调前的齿面误差云图

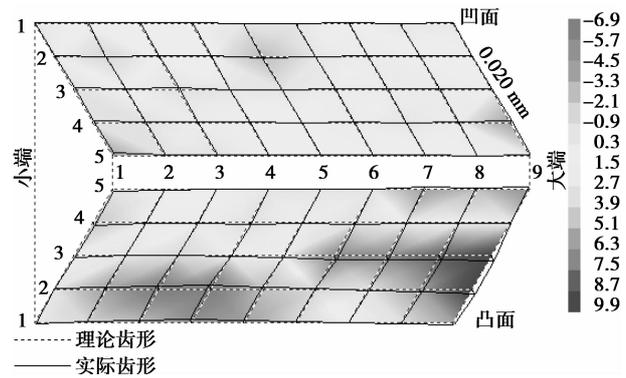


图 5 反调后的齿面误差云图

表 2 凹面反调前后的切齿参数比较

项目	安装根锥角	水平轮位	垂直轮位	床位	径向刀位	滚比	刀尖直径	刀齿齿形角/(°)
调整值	18°40'	-2.252	23.425	0.943	74.127	3.941 727 3	147.615	15
反求值	18°43'	-3.103	23.703	0.036	74.371	3.941 727 3	147.615	15
反调量	3'	-0.850	0.280	-0.910	0.244	0	0	0

表 3 凹面测量网格点反调前的齿面误差

齿高方向	齿长方向								
	第 1 点	第 2 点	第 3 点	第 4 点	第 5 点	第 6 点	第 7 点	第 8 点	第 9 点
第 1 点	-36.2	-18.9	-6.9	2.5	7.4	10.0	9.2	2.8	-6.5
第 2 点	-38.8	-26.3	-11.8	-2.2	0.4	5.4	5.8	-0.7	-10.7
第 3 点	-40.5	-26.9	-12.6	-6.5	-0.4	3.4	1.7	-3.0	-13.9
第 4 点	-43.6	-28.7	-17.1	-8.5	-2.9	0.0	-2.9	-5.9	-13.3
第 5 点	-44.9	-32.0	-19.2	-12.0	-5.6	-3.5	-4.2	-10.0	-17.7

表 4 凹面测量网格点反调后的齿面误差

齿高方向	齿长方向								
	第 1 点	第 2 点	第 3 点	第 4 点	第 5 点	第 6 点	第 7 点	第 8 点	第 9 点
第 1 点	0.3	1.5	0.8	0.8	-0.3	-0.3	0.5	-0.4	0.3
第 2 点	1.7	-1.4	0.6	0.8	-3.1	-0.1	2.0	0.9	1.3
第 3 点	3.8	1.5	3.3	-0.3	0.0	1.7	2.1	2.2	1.1
第 4 点	3.9	3.0	2.0	1.5	1.0	1.6	0.3	1.8	5.2
第 5 点	5.6	2.8	2.8	1.4	1.2	1.3	1.3	0.6	2.1

## 5 结 论

笔者研究了基于齿轮测量中心的锥齿轮齿形坐标测量方法;利用测量的齿面网格点坐标,运用非线性最小二乘优化方法反求锥齿轮副的切齿调整参数及刀盘参数;提出在采用优化方法反调切齿调整参数的过程中必需对切齿深度进行控制以获得设计的齿根,同时提出根据锥齿轮加工方法的不同,在反调过程中采用不同的齿深控制方法。最后通过齿形测量及反调计算实例证明所述方法能够较为精确地反求出锥齿轮副切齿调整参数,同时有效地控制齿根深度。该方法对锥齿轮生产企业样品齿轮的反求及现场切齿调整参数的反调有较强的实用价值。

### 参考文献:

- [1] 郭晓东,张明德,张卫青,等. 锥齿轮齿距及齿形偏差测量与分析方法[J]. 工具技术, 2009, 43(11): 80-83.  
GUO XIAO-DONG, ZHANG MING-DE, ZHANG WEI-QING, et al. The measuring and analysis of pitch deviation and tooth form deviation of bevel gear[J]. Tool Engineering, 2009, 43(11): 80-83.
- [2] 李天兴,邓效忠. 螺旋锥齿轮齿面坐标的检测[J]. 机械传动, 2005, 29(1): 56-58.  
LI TIAN-XING, DENG XIAO-ZHONG. The tooth surface coordinate test of spiral bevel gear[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2005, 29(1): 56-58.
- [3] 唐进元,曹康,周超,等. 小轮齿面误差与调整参数误差敏感性研究[J]. 航空动力学报, 2009, 24(9): 2145-2151.  
TANG JIN-YUAN, CAO KANG, ZHOU CHAO, et al. Research on the sensitivity between the machine adjustment parameter errors and the spiral bevel gears surface errors[J]. Journal of Aerospace Power, 2009, 24(9): 2145-2151.
- [4] 王志永,于水琴,曾韬. 机床误差对螺旋锥齿轮齿形的影响规律[J]. 农业机械学报, 2009, 40(6): 199-207.  
WANG ZHI-YONG, YU SHUI-QIN, ZENG TAO. Effect of machine tool errors on the tooth form of spiral bevel gears[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2009, 40(6): 199-207.
- [5] SIMON V. Influence of tooth errors and misalignments on tooth contact in spiral bevel gears[J]. Mechanism and Machine Theory, 2008, 43(10): 1253-1267.
- [6] SHIH Y P, FONG Z H. Flank correction for spiral bevel and hypoid gears on a six-axis CNC hypoid generator [J]. Power Transmissions and Gearing, 2008, 130(6): 062604-062614.
- [7] 李敬财,王太勇,范胜波,等. 基于数字化制造的螺旋锥齿轮齿面误差修正[J]. 农业机械学报, 2008, 39(5): 174-177, 185.  
LI JING-CAI, WANG TAI-YONG, FAN SHENG-BO, et al. Error corrections of spiral bevel gear tooth surface based on digitized manufacturing [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2008, 39(5): 174-177, 185.
- [8] 方宗德,杨宏斌,邓效忠,等. 弧齿锥齿轮齿面优化修正及计算机仿真[J]. 航空动力学报, 2002, 12(1): 140-144.  
FANG ZONG-DE, YANG HONG-BIN, DENG XIAO-ZHONG, et al. Optimal tooth surface correction of spiral bevel gears and computerized simulation [J]. Journal of Aerospace Power, 2002, 12(1): 140-144.
- [9] 王延忠,王建甫,周元子,等. 航空弧齿锥齿轮的齿面偏差最小化[J]. 机床与液压, 2008, 36(6): 10-13.  
WANG YAN-ZHONG, WANG JIAN-PU, ZHOU YUAN-ZI, et al. Minimization of real surface deviation of aviation spiral bevel gear [J]. Machine Tool & Hydraulics, 2008, 36(6): 10-13.
- [10] LITVIN F L. Gear geometry and applied theory[M]. England: Cambridge University Press, 2004.
- [11] 王小椿,王军,姜虹. 螺旋锥齿轮的齿面测量及机床加工参数修正[J]. 机械工程学报, 2003, 39(8): 126-128.  
WANG XIAO-CHUN, WANG JUN, JIANG HONG. Tooth surface measurement and machine-settings correction of spiral bevel gear [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2003, 39(8): 126-128.
- [12] VILMOS S. Computer simulation of tooth contact analysis of mismatched spiral bevel gears [J]. Mechanism and Machine Theory, 2007, 42(3): 365-381.
- [13] 陈书涵,严宏志,明兴祖,等. 基于多体系统理论的螺旋锥齿轮误差齿面建立与分析[J]. 制造技术与机床, 2008(8): 102-106.  
CHEN SHU-HAN, YAN HONG-ZHI, MING XING-ZU, et al. Error surfaces establishment and analysis on spiral bevel gear based on multi-body system theory [J]. Manufacturing Technology & Machine Tool, 2008(8): 102-106.
- [14] WANG J, WANG X C. Measurement and compensation of deviations of real tooth surface of spiral bevel gear [J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2003, 16(3): 182-186.