

文章编号: 1000-582X(2011)09-073-08

# 对高炉内炉料运动势流模型及其流函数解法的发展

王成善<sup>a,b</sup>, 陈磊<sup>a</sup>

(重庆大学 a. 材料科学与工程学院; b. 重庆市冶金工程重点实验室, 重庆 400044)

**摘要:** 高炉综合模拟中, 势流理论是模拟固态炉料运动可选用的理论之一, 但求解原势流模型所定义流函数的等值线不一定是流线。文中首先将原势流模型发展为包括连续性方程、旋度为 0 方程的 3 方程模型, 而且证明了求解此 3 方程模型所定义流函数的等值线是流线, 进而结合位于同一流线上的床层填充颗粒直径不变的假设, 导出了可模拟计算床层内炉料颗粒直径分布的方程; 讨论了基于发展后势流模型的物料混合特征。最后将对炉料势流模型及其流函数解法的发展推广为发展其他运动模型及其流函数解法的一般方法。笔者的工作对势流理论在高炉等相关工艺模拟中的应用有一定的推动和示范作用。

**关键词:** 流线; 势流; 数学模型; 炉料运动; 高炉

**中图分类号:** TF325.6

**文献标志码:** A

## The developing of the potential flow modelling of the burden flow in a blast furnace

WANG Cheng-shan<sup>a,b</sup>, CHEN Lei<sup>a</sup>

(a. College of Materials Science and Engineering; b. Chongqing Key Laboratory of Metallurgical Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, P. R. China)

**Abstract:** Potential flow theory is an alternative theory to simulate burden flow in a blast furnace. But a contour line of the flow function defined to solve the old potential flow model isn't a stream line. In this paper, the old potential flow model is first developed to a three-equation model which should include the equations of motion and continuity, and it is proved that the contour lines of the flow function defined to solve this three-equation model are stream lines. Second, an equation capable of calculating the distribution of diameter of burden particles in blast furnace is derived from an assumption that all burden particles on a stream line has the same diameter. Finally, the developed potential flow model and the derived equation are used to simulate a final reduction reactor producing hot metal containing Cr, together with other needed transportation equations. These works would play an important improving and exemplary role in the application of potential flow theory to simulate blast furnace process and other iron-making process.

**Key words:** stream line; potential flow; mathematical models; burden flow; blast furnace

为更好地理解、控制和改进高炉炼铁过程, 高炉数学模型开发和模拟研究一直进行着。高炉动力学数学模型建立在反应动力学和传输现象理论基础之

上, 是高炉综合模拟研究的核心。高炉动力学数学模型和高炉综合数值模拟研究是详细分析炉内状态和精确预测高炉操作性能的有效手段<sup>[1-3]</sup>。

收稿日期: 2011-04-10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50704040); 重庆市自然科学基金资助项目(CSTC 2009BB4197)

作者简介: 王成善(1972-)男, 重庆大学副教授, 博士, 主要从事钢铁冶金的研究。(E-mail) wangchengshan@sina.com。

对高炉综合数值仿真中,势流理论是模拟固态炉料运动可选用的理论之一<sup>[4-7]</sup>。主要原因如下:1)势流理论体系及其自身的数值计算方法较为成熟;2)势流理论能很大程度上反映填充床中的物料流动和混合情况,可以胜任对固体炉料运动的描述;3)与传热方程、传质方程及描述高炉内多相流的其他动量方程一样,势流理论也是宏观尺度模型,各种模型位于同一尺度,易于相互耦合,形成对一整体的综合模拟;4)合理简化综合模拟模型,加快模拟计算速度的需要。

但是,以往用势流理论描述运动过程中有相变或参加化学反应的高炉内炉料后,继而用流函数法求解而获得的流函数等值线和炉料的物理流线不一致,即获得的流函数等值线没有明确物理意义,这限制了流函数值的进一步应用和对高炉炉料运动的一些方便处理。

笔者将对炉料运动势流模型的内容及其流函数解法存在的问题进行分析,拟对其做进一步发展,希望在高炉综合模拟选用势流理论描述固态炉料运动、甚至描述熔融液体运动方面起一定的推动作用。

## 1 原有势流模型的内容

### 1.1 连续性方程

$$\frac{1}{r}u_{sr}^0 + \frac{\partial u_{sr}^0}{\partial r} + \frac{\partial u_{sz}^0}{\partial z} = \sum_i \gamma_{si} R_i, \quad (1)$$

式中: $u_{sr}^0$ 、 $u_{sz}^0$ 为固体炉料表观速度 $\mathbf{u}_s^0$ 的分量, $\mathbf{u}_s^0 = (u_{sr}^0, u_{sz}^0)$ ;固料表观速度 $\mathbf{u}_s^0$ 是其实际速度 $\mathbf{u}_s$ 与固料占床层体积分数 $\epsilon_s$ 的乘积, $\mathbf{u}_s^0 = \mathbf{u}_s \cdot \epsilon_s = (\epsilon_s u_{sr}, \epsilon_s u_{sz})$ 。 $R_i$ 为炉内 $i$ 相变(或化学反应)的速率, $\text{mol}/\text{m}^3(\text{床}) \cdot \text{s}$ 。 $\gamma_{si}$ 为 $i$ 相变(或化学反应)对单位床层体积内固体炉料产生或消失的影响系数。 $\sum_i \gamma_{si} R_i$ 为床层内炉料产生或消失的速度, $\frac{\text{m}^3}{\text{m}^3(\text{床}) \cdot \text{s}}$ 。式(1)两边同乘以 $r$ ,经移项、合并可得连续性方程的另一种形式:

$$\partial(ru_{sz}^0 + M_s)/\partial z + \partial(ru_{sr}^0)/\partial r = 0, \quad (2)$$

其中:  $M_s = \int_0^z r \left( \sum_i \gamma_{si} R_i \right) dz$ 。

### 1.2 运动方程

$$\text{grad}P_s = \frac{1}{K_s} \mathbf{u}_s^0, \quad (3)$$

式中: $P_s$ 为固体炉料运动势函数(压力标量); $K_s$ 为

物料运动流通性系数, $K_s$ 越大, $\mathbf{u}_s^0$ 越大。矢量式(3)和下面两分量式是等价的:

$$\frac{\partial P_s}{\partial r} = \frac{1}{K_s} u_{sr}^0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial P_s}{\partial z} = \frac{1}{K_s} u_{sz}^0. \quad (5)$$

用3个等式(2)、(4)、(5)确定3个变量 $P_s$ 、 $u_{sr}^0$ 、 $u_{sz}^0$ ,方程组封闭。在应用上述内容模拟固体炉料运动时,通常首先关心表观速度分量 $u_{sr}^0$ 、 $u_{sz}^0$ 的值及它们的分布。在求解时,通常也就不先求出势函数 $P_s$ 的值。以式(4)、(5)可推得矢量 $\frac{1}{K_s} \mathbf{u}_s^0$ 的旋度为零:

$$\text{rot} \left( \frac{1}{K_s} \mathbf{u}_s^0 \right) = \frac{\partial \left( \frac{1}{K_s} u_{sr}^0 \right)}{\partial z} - \frac{\partial \left( \frac{1}{K_s} u_{sz}^0 \right)}{\partial r} = 0, \quad (6)$$

这是势流模型运动方程的又一种形式。

可以用式(2)、(6)2个方程确定表观速度2个分量 $u_{sr}^0$ 、 $u_{sz}^0$ 的值。

在考虑二维问题时,通常采用流函数方法数值求解上述描述固料运动的式(2)和式(6)。求解时所采用的流函数 $\varphi_s$ 需自动满足连续性方程,即式(2),故定义流函数 $\varphi_s$ 如下:

$$\frac{\partial \varphi_s}{\partial z} = -ru_{sr}^0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \varphi_s}{\partial r} = ru_{sz}^0 + M_s. \quad (8)$$

利用式(7)、(8)关系可将式(6)变为:

$$\frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_s}{\partial r} = \frac{\partial M_s}{\partial r} - \frac{1}{r} M_s, K_s = \text{const}. \quad (9)$$

这样利用式(9)求出流函数 $\varphi_s$ 后,再利用式(7)、(8)关系确定表观速度2个分量 $u_{sr}^0$ 、 $u_{sz}^0$ 的值。

毕学工在其专著中对固体炉料运动势流模型的内容及其解法有较详细地叙述<sup>[4]</sup>。

高炉综合模拟应用上述内容时,式(7)、(8)定义流函数的解,在 $M_s = 0$ 时,即在固体炉料没有熔化的炉身部的块状带, $\varphi_s$ 等值线的切线方向(见图1(a))和固体炉料表观运动速度 $\mathbf{u}_s^0 = (u_{sr}^0, u_{sz}^0)$ 的方向(流线切线方向见图1(b))是一致的;这时,可以说势流模型可以直接给出对炉料流线的模拟结果。在 $M_s \neq 0$ 时,即在炉料熔化的情况下,即炉腰到风口区域, $\varphi_s$ 等值线的切线方向(见图1(a))和固体炉料表观运动速度 $\mathbf{u}_s^0 = (u_{sr}^0, u_{sz}^0)$ 的方向(见图1(b))是不一致的;这样的势流模型不能直接给出对炉料运动流

线的模拟结果。

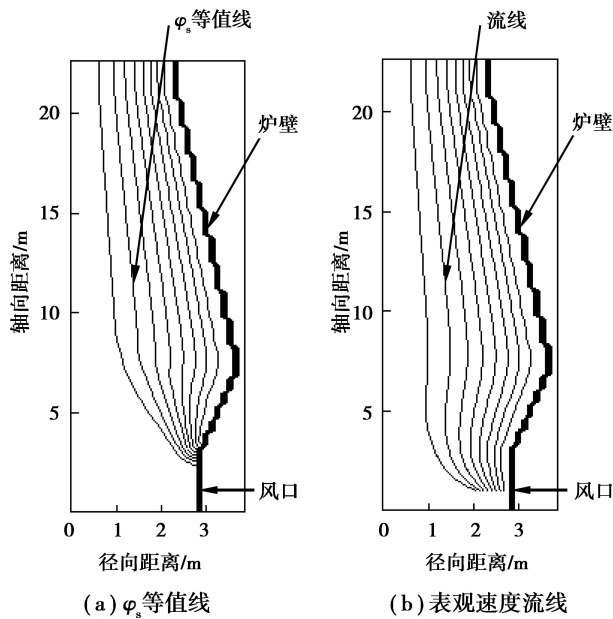


图1  $\varphi_s$  等值线和流线的比较

## 2 发展后的势流模型

与前面保持一致,叙述发展后势流模型仍在圆柱轴对称坐标系中进行。连续性方程式(1)和运动方程式(6)体现了基本物理定律,发展后的势流模型自然要保留。在原势流模型中,位于物料运动区域内和位于物料运动区域边界上的流通性系数  $K_s$  一般都看作常数,或者为使式(1)、(6)封闭,要另外引入参数  $K_s$  的直接计算式。为了不让势流模型的结果出现图1的问题,与表观  $u_{sr}^0$ 、 $u_{sz}^0$  一样,笔者将物料运动区域内流通性系数  $K_s$  看作待求的变量,通过补充下面的方程来求得:

$$\frac{1}{r} \left( u_{sr}^0 \frac{1}{K_s} \right) + \frac{\partial \left( u_{sr}^0 \frac{1}{K_s} \right)}{\partial r} + \frac{\partial \left( u_{sz}^0 \frac{1}{K_s} \right)}{\partial z} = 0. \quad (10)$$

这样,用式(1)、式(6)和式(10)确定3个变量  $u_{sr}^0$ 、 $u_{sz}^0$ 、 $K_s$ ,方程组封闭。物料运动区域边界上流通性系数  $K_s$  只要在物料入口设置即可:若入口边界上物料流量为零,则入口边界上  $K_s=0$ ;若入口边界上物料流量是不为零的已知值,则入口边界上  $K_s=1$ 。

针对二维问题,采用流函数方法数值求解发展后的势流模型时,首先让所采用的流函数  $\varphi_s$  自动满足式(10),故流函数  $\varphi_s$  定义式如下:

$$\frac{\partial \varphi_s}{\partial z} = -\frac{1}{K_s} r u_{sr}^0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \varphi_s}{\partial r} = \frac{1}{K_s} r u_{sz}^0, \quad (12)$$

将上定义式代入式(6)得:

$$\frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_s}{\partial r} = 0. \quad (13)$$

此式说明流函数  $\varphi_s$  的解,或者说表观速度  $\mathbf{u}_s^0$  的方向,与物料相变、床层中化学反应无关,  $\mathbf{u}_s^0$  的方向只与边界条件(炉型、死料堆边界)有关,不受炉内发生的化学反应和相变的影响。式(13)用来描述主要靠重力作用而运动的固体炉料比较合适,因为重力方向不受炉料熔化等的影响。而式(9)求出流函数  $\varphi_s$  的解,与  $M_s$  有关,即与物料相变、床层中化学反应等有关关系,因此式(9)求出的  $\varphi_s$  的等值线不一定是流线。

由式(11)、(12)体现的关于流函数的表观速度表达式代入式(1)得:

$$\frac{\partial (u_{sr}^0 K_s)}{\partial r} + \frac{\partial (u_{sz}^0 K_s)}{\partial z} + \frac{1}{r} (u_{sr}^0 K_s) = \sum_i \gamma_{si} R_i, \quad (14)$$

式中:  $u_{sr}^0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_s}{\partial z}$ ;  $u_{sz}^0 = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_s}{\partial r}$ 。此式说明化学反应或相变通过影响  $K_s$  值来影响物料流场。

经过上述变化,3变量  $u_{sr}^0$ 、 $u_{sz}^0$ 、 $K_s$  方程组(式(1)、(6)、(10))就可转化为2变量  $\varphi_s$ 、 $K_s$  方程组(式(13)、(14)),这样固体运动流场就可以用流函数法求解。

按式(11)、(12)定义的流函数的数值解,不但在  $M_s=0$  时,即在固体炉料没有熔化的炉身部的块状带,  $\varphi_s$  等值线的切线方向和固体炉料表观运动速度  $\mathbf{u}_s^0 = (u_{sr}^0, u_{sz}^0)$  的方向是一致的,它直接反映了势流理论对炉料流线的模拟,而且在  $M_s \neq 0$  时,即在炉料熔化的情况下,这样的势流理论模拟的流函数的解,也是能直接给出对炉料运动流线的模拟结果。

为说明该发展后势流模型的这一特点,做出如下证明。

按式(11)、(12)定义的流函数  $\varphi_s = \varphi_s(r, z)$  的等值线上存在如下关系式:

$$d\varphi_s(r, z) = 0, \quad (15)$$

即

$$\frac{\partial \varphi_s}{\partial r} dr + \frac{\partial \varphi_s}{\partial z} dz = 0, \quad (16)$$

移项得:

$$\frac{\partial \varphi_s}{\partial r} dr = -\frac{\partial \varphi_s}{\partial z} dz, \quad (17)$$

将式(11)、式(12)代入式(17)得:

$$\frac{1}{K_s} ru_{sz}^0 dr = \frac{1}{K_s} ru_{sr}^0 dz, \quad (18)$$

整理可得:

$$\frac{u_{sz}^0}{dz} = \frac{u_{sr}^0}{dr}. \quad (\text{流线定义}) \quad (19)$$

### 3 基于发展后势流模型假设的应用

在发展后的势流模型的基础上,可以进行如下假设:假定位于同一流线上的床层填充颗粒直径不变,即  $\varphi_s = f(d)$ ,  $d$  为炉料颗粒直径,它是  $r$ 、 $z$  的函数,即  $d = f(r, z)$ ; 矿石熔化时,仍假设矿石粒径沿流线不变,沿流线变化的假设仅是矿石在固料中的体积分率。由假设知:

$$\frac{\partial \varphi_s}{\partial r} = \frac{d\varphi_s}{dd} \frac{\partial d}{\partial r}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \varphi_s}{\partial z} = \frac{d\varphi_s}{dd} \frac{\partial d}{\partial z}. \quad (21)$$

下面就用式(20)、(21)证明下式成立:

$$\frac{\partial(u_{sr}^e d)}{\partial r} + \frac{\partial(u_{sz}^e d)}{\partial z} + \frac{1}{r}(u_{sr}^e d) = 0. \quad (22)$$

$$\text{式(22) 左边} = \frac{\partial\left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_s}{\partial z}\right)}{\partial r} d - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_s}{\partial z} \frac{\partial d}{\partial r} +$$

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_s}{\partial r}\right)}{\partial z} d + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_s}{\partial r} \frac{\partial d}{\partial z} + \frac{1}{r} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_s}{\partial z} d\right) =$$

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi_s}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial z \partial r}\right) d - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_s}{\partial z} \frac{\partial d}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial r \partial z} d +$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_s}{\partial r} \frac{\partial d}{\partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi_s}{\partial z} d = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_s}{\partial z} \frac{\partial d}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_s}{\partial r} \frac{\partial d}{\partial z} =$$

$$-\frac{1}{r} \frac{d\varphi_s}{dd} \frac{\partial d}{\partial z} \frac{\partial d}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi_s}{dd} \frac{\partial d}{\partial r} \frac{\partial d}{\partial z} = 0 = \text{式(22) 右边}.$$

因此,在得知料面上炉料颗粒直径分布情况下,便可以用式(22)求得炉内任一位置炉料颗粒直径大小。而任一位置的床层空隙率  $\varepsilon$  用下经验式<sup>[6-8]</sup>计算:

$$\varepsilon = 0.403 \times (100d)^{0.14}. \quad (23)$$

通过式(22)和式(23)求出的颗粒直径、床层空隙率等是综合模拟时求床层对其内流动气体的阻力所需要的信息。进行综合模拟利用原势流模型时,由于此情形下的  $\varphi_s$  等值线不一定是流线,式(22)是

不能用的。式(22)的利用可以看作发展后势流模型带来的方便,需要说明的是,模拟高炉内炉料运动,可以选用其他模型。与模拟炉料运动其他模型对比来看,由式(1)、(6)、(10)、(22)等组成的势流模型是有一定优势的。DEM法(Discrete Element Method)<sup>[9-11]</sup>能直接跟踪每个颗粒在床层内的运动轨迹,然而这种基于颗粒大小尺度的方法需完成庞大计算量,针对高炉规模且考虑热质传递、动量传输和相变、化学反应的综合模拟应用该方法的实例未见报道;基于反应器装置尺度的固体力学<sup>[12]</sup>模型注重应力场预测,而不能满意地预测速度场,也就不能满意地基于速度场(流场)预测床层内颗粒粒径等信息;基于反应器装置尺度的黏性流模型<sup>[13]</sup>虽然能给出速度场,进而可预测床层内颗粒粒径等信息,但它与势流模型相比内容复杂,所用假设多,且增加不少的计算量。因此它对势流模型,尤其对发展后的势流模型,没有绝对优势。

### 4 基于发展后势流模型的物料混合特征

假设温度变化、挥发分挥发等因素对焦炭体积没有影响,则炉内(不包括风口回旋区)固体炉料中焦炭体积分率  $v_{\text{coke}}^s$ , 满足:

$$\frac{\partial(ru_{sr}^e K_s v_{\text{coke}}^s)}{\partial r} + \frac{\partial(ru_{sz}^e K_s v_{\text{coke}}^s)}{\partial z} = 0, \quad (24)$$

上式可化为:

$$K_s v_{\text{coke}}^s \left[ \frac{\partial(ru_{sr}^e)}{\partial r} + \frac{\partial(ru_{sz}^e)}{\partial z} \right] + ru_{sr}^e \frac{\partial(K_s v_{\text{coke}}^s)}{\partial r} + ru_{sz}^e \frac{\partial(K_s v_{\text{coke}}^s)}{\partial z} = 0, \quad (25)$$

而  $u_{sr}^e = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_s}{\partial z}$ ;  $u_{sz}^e = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_s}{\partial r}$ , 故上式简化为:

$$ru_{sr}^e \frac{\partial(K_s v_{\text{coke}}^s)}{\partial r} + ru_{sz}^e \frac{\partial(K_s v_{\text{coke}}^s)}{\partial z} = 0, \quad (26)$$

上式两边同除以  $r$  得:

$$\mathbf{u}_s^e \cdot \text{grad}(K_s \cdot v_{\text{coke}}^s) = 0. \quad (27)$$

在矿石熔化之前的炉内块状带,  $\sum_i \gamma_{si} R_i = 0$ ,

式(14)右边为0,即

$$\frac{\partial(ru_{sr}^e K_s)}{\partial r} + \frac{\partial(ru_{sz}^e K_s)}{\partial z} = 0. \quad (28)$$

上式可化为:

$$\mathbf{u}_s^e \cdot \text{grad}K_s = 0. \quad (29)$$

由式(27)、(29)说明:在矿石熔化之前,  $K_s$ 、

$K_s \cdot v_{\text{coke}}^s$  梯度方向与速度方向垂直,即  $K_s$  和  $K_s \cdot v_{\text{coke}}^s$  沿流线方向不变化,也即  $v_{\text{coke}}^s$  沿流线不变化。因矿石体积积分率和焦炭体积积分率之和为 1,固体炉料中矿石体积积分率  $v_{\text{ore}}^s$  在块状带沿流线也不变化。在块状带,  $v_{\text{ore}}^s$  和  $v_{\text{coke}}^s$  等值线的分布反映了固料流线的分布,这说明炉料在向前运动时没有返向混和。事实上,一般的竖炉和高炉等反应器通常被看作比其他反应器返混少,甚至接近活塞流。已出现的以活塞流为基础一维高炉数学模型不胜枚举。从能否反应物料混合状态的角度来看,发展后势流模型和求解它所定义的流函数是胜任对炉料运动的模拟。

式(14)说明经过炉喉料面上的下料多位置的整条流线上炉料流量都大;式(24)说明经过炉喉料面上焦炭流量大的位置的整条流线上,焦炭流量都大;式(22)说明经过炉喉料面上焦炭颗粒大的位置的整条流线上焦炭颗粒都大,炉内任一位置的固体炉料流量、颗粒大小决定于料面上炉料的流量,颗粒大小等分布情况,决定于炉顶布料情况。以上几式说明:

包括发展后势流模型在内的整个综合模拟模型可以考查炉顶布料情况对模拟结果的影响。

笔者曾对利用预还原铬铁矿团块替代普通铁矿团块的高炉工艺冶炼含铬铁水的技术方案进行了综合模拟,这方面的研究背景、详细的综合模拟模型内容和模拟结果见文献[14-15]。在模拟研究中,对炉料运动的描述采用了该发展后的势流模型,现给出有关物料混合和不同炉顶布料情况下的典型模拟结果。

某种条件下,  $v_{\text{ore}}^s$  和  $v_{\text{coke}}^s$  的模拟计算结果见图 2,图 2 (b)、(c)反映了上述对  $v_{\text{ore}}^s$  和  $v_{\text{coke}}^s$  的分析结果。中心加焦和中心加矿 2 种布料情况下的煤气流场和温度场的对比见图 3。中心加焦形成倒“V”形软熔带,见图 3(a),中心加矿形成“V”形(或“W”形)软熔带,见图 3(b)。这些工作对该冶炼含铬铁水的技术方案的开发提供了大量参考信息,对势流理论在高炉等相关工艺模拟中的应用起一定推动和示范作用。

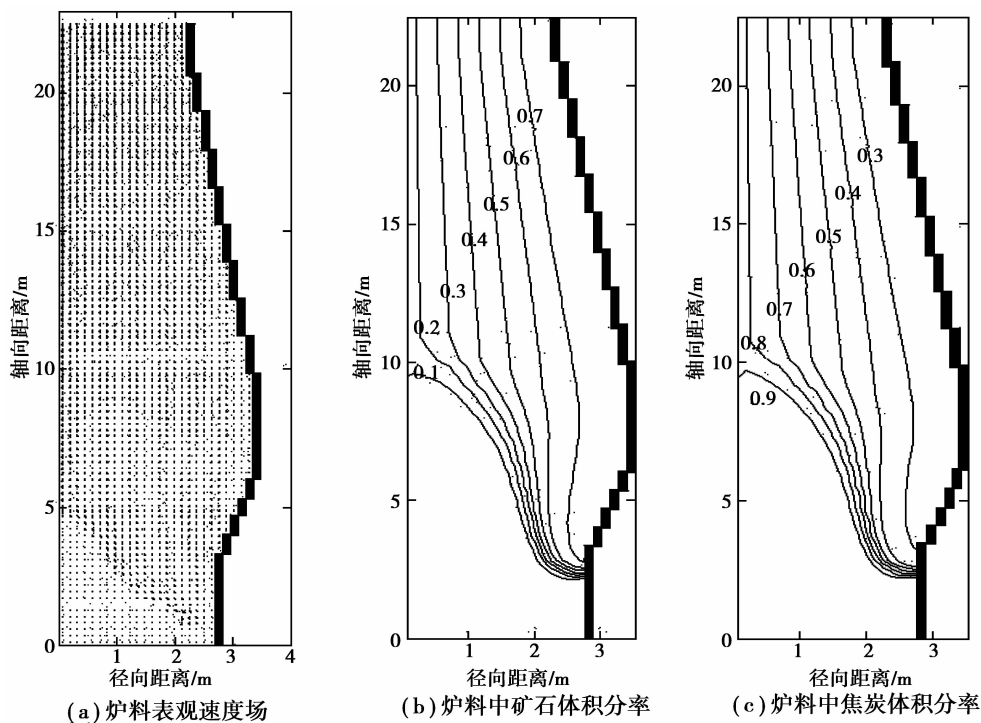


图 2 炉料在炉内分布的综合模拟结果

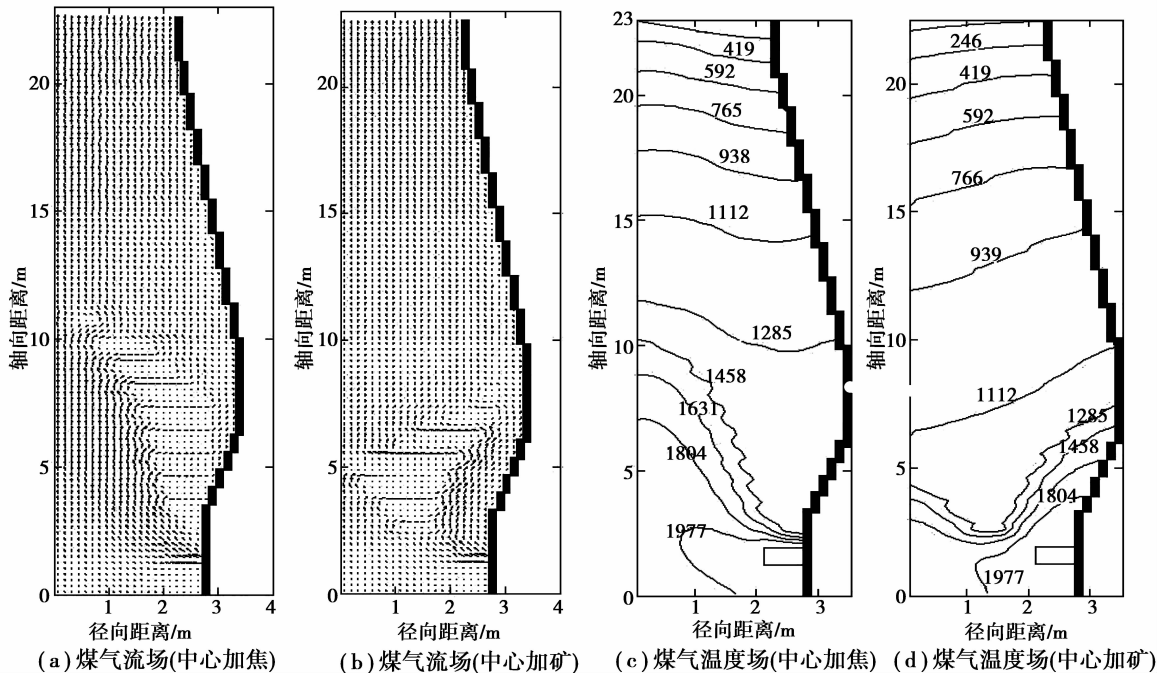


图3 炉顶布料情况对模拟结果的影响

## 5 对势流模型及其流函数解法发展的推广

针对求解描述炉料运动原势流模型所定义流函数的等值线不一定是流线的问题,笔者将物料运动区域内流通性系数  $K_s$  看作待求的变量,通过补充方程式(10)、连续性方程、旋度为0方程确定3个变量  $u_{sr}^0, u_{sz}^0, K_s$ 。采用流函数方法数值求解这3方程时,流函数  $\varphi_s$  采用式(11)、(12)的定义,而且可证明此  $\varphi_s$  等值线是流线。高炉综合模拟中,对熔融渣铁的运动也可以用势流理论模拟<sup>[4]</sup>,以上针对炉料运动势流模型的发展内容同样可以用在对熔融渣铁运动势流理论的描述上。

到目前为止,已报道的高炉综合模拟采用流函数方法数值求解其他运动相的动量方程(例如描述填充床中煤气运动的厄刚方程)时,所定义的流函数的等值线,亦不一定是流线<sup>[4]</sup>。这种情况下,前文中对炉料运动势流模型及其流函数解法发展方法可以用来对煤气运动模型及其流函数解法进行修正。

煤气运动厄刚方程微分形式:

$$-\frac{\partial P_g}{\partial r} = f_1 G_{gr}^0 + f_2 |\mathbf{G}_g^0| G_{gr}^0, \quad (30)$$

$$-\frac{\partial P_g}{\partial z} = f_1 G_{gz}^0 + f_2 |\mathbf{G}_g^0| G_{gz}^0, \quad (31)$$

式中:  $P_g$  为气相压力;  $\mathbf{G}_g^0$  为气体表观质量流量矢

量,  $\mathbf{G}_g^0 = (G_{gr}^0, G_{gz}^0)$ 。

$$f_1 = \frac{150(1-\varepsilon)^2 \mu_g}{\rho_g (d\varphi)^2 \varepsilon^3}, \quad (32)$$

$$f_2 = \frac{1.75(1-\varepsilon)}{\rho_g d \varphi \varepsilon^3}, \quad (33)$$

式中:  $\rho_g, \mu_g$  分别为气体密度和黏度;  $\varphi, d$  分别为颗粒形状系数和粒径;  $\varepsilon$  为床层空隙率。

煤气运动连续性方程为:

$$\frac{\partial(rG_{gz}^0)}{\partial z} + \frac{\partial(rG_{gr}^0 - M_g)}{\partial r} = 0, \quad (34)$$

其中:

$$M_g = \int_0^r r \left( \sum_i \gamma_{gi} R_i \right) dr \quad (35)$$

式中:  $R_i$  为单位床层体积内  $i$  反应的速率 ( $\text{kmol}/(\text{m}^3(\text{bed}) \cdot \text{s})$ 、 $\text{kg}/(\text{m}^3(\text{bed}) \cdot \text{s})$ );  $\gamma_{gi}$  为由  $i$  反应引起的气体质量的变化系数 ( $\text{kg}/\text{kmol}$ 、 $\text{kg}/\text{kg}$ )。

$$\frac{\partial \varphi_g}{\partial z} = r G_{gr}^0 - M_g, \quad (36)$$

$$\frac{\partial \varphi_g}{\partial r} = -r G_{gz}^0. \quad (37)$$

用流函数方法求解式(30)、式(31)和式(34)的具体过程,文献[4]有较详细叙述。式(36)、式(37)是求解时所采用的自动满足式(34)的流函数  $\varphi_g$  的定义式,在  $M_g \neq 0$  时,  $\varphi_g$  的等值线不是流线。

因此引入一个待求变量,  $K_g (K_g \geq 0)$ , 并补充形

如式(10)的下列方程:

$$\frac{1}{r} \frac{G_{gr}^0}{K_g} + \frac{\partial \left( \frac{G_{gr}^0}{K_g} \right)}{\partial r} + \frac{\partial \left( \frac{G_{gz}^0}{K_g} \right)}{\partial z} = 0. \quad (38)$$

利用式(38)、连续性方程式(34)、运动方程式(30)和式(31)确定  $K_g$ 、 $G_{gr}^0$ 、 $G_{gz}^0$  和  $P_g$  4个变量,方程组封闭。

将描述煤气运动的模型增为含有4个变量的方程组,主要是为了便于采用流函数方法求解。求解时首先给出自动满足式(38)的以下流函数定义式:

$$\frac{G_{gr}^0}{K_g} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_g}{\partial z}, \quad (39)$$

$$\frac{G_{gz}^0}{K_g} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_g}{\partial r}. \quad (40)$$

将运动方程式(30)和式(31)等价变为如下形式:

$$-\frac{\partial P_g}{\partial r} = K_g f_1 \frac{G_{gr}^0}{K_g} + K_g^2 f_2 \left| \frac{G_g^0}{K_g} \right| \frac{G_{gr}^0}{K_g}, \quad (41)$$

$$-\frac{\partial P_g}{\partial z} = K_g f_1 \frac{G_{gz}^0}{K_g} + K_g^2 f_2 \left| \frac{G_g^0}{K_g} \right| \frac{G_{gz}^0}{K_g}. \quad (42)$$

将式(39)和式(40)代入以上两式得:

$$-\frac{\partial P_g}{\partial r} = \frac{F_1}{r} \frac{\partial \varphi_g}{\partial z} + \frac{F_2}{r^2} \frac{\partial \varphi_g}{\partial z} \xi, \quad (43)$$

$$-\frac{\partial P_g}{\partial z} = -\frac{F_1}{r} \frac{\partial \varphi_g}{\partial r} - \frac{F_2}{r^2} \frac{\partial \varphi_g}{\partial r} \xi, \quad (44)$$

其中:  $\xi = \sqrt{\left( \frac{\partial \varphi_g}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_g}{\partial r} \right)^2}$ ;  $F_1 = K_g f_1$ ;  $F_2 = K_g^2 f_2$ 。分别对式(43)和式(44)两边对  $z$  和  $r$  求偏导数,然后将两式相减,并经过适当地整理,得:

$$\begin{aligned} & \left( F_1 + \frac{F_2}{r} \xi \right) \frac{\partial^2 \varphi_g}{\partial z^2} + \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_2}{\partial z} \xi + \frac{1}{r} F_2 \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial \varphi_g}{\partial z} + \\ & \left( F_1 + \frac{F_2}{r} \xi \right) \frac{\partial^2 \varphi_g}{\partial r^2} + \left( -\frac{F_1}{r} + \frac{\partial F_1}{\partial r} - \right. \\ & \left. 2 \frac{F_2}{r^2} \xi + \frac{1}{r} \frac{\partial F_2}{\partial r} \xi + \frac{F_2}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) \frac{\partial \varphi_g}{\partial r} = 0, \quad (45) \end{aligned}$$

式(34)变形为:

$$\frac{1}{r} G_{gr}^0 + \frac{\partial G_{gr}^0}{\partial r} + \frac{\partial G_{gz}^0}{\partial z} = \sum_i \gamma_{gi} R_i, \quad (46)$$

将式(39)和式(40)代入得:

$$\frac{\partial (G_{gr}^0 K_g)}{\partial r} + \frac{\partial (G_{gz}^0 K_g)}{\partial z} + \frac{1}{r} (G_{gr}^0 K_g) = \sum_i \gamma_{gi} R_i, \quad (47)$$

其中:  $G_{gr}^0 = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_g}{\partial z}$ ;  $G_{gz}^0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_g}{\partial r}$ 。

这样就把包括  $K_g$ 、 $G_{gr}^0$ 、 $G_{gz}^0$  和  $P_g$  4个变量的方

程组(式(38)、式(34)、式(30)和式(31))化为包括  $\varphi_g$  和  $K_g$  方程组(式(45)、式(47))。通过式(45)、式(47)联立求出  $\varphi_g$  和  $K_g$  后,再通过式(39)和式(40)求出  $G_{gr}^0$ 、 $G_{gz}^0$ 。对煤气运动来说,煤气压力  $P_g$  也是需要求出的。在模型发展时,对关于  $P_g$  的动量方程是原型保留的,求出  $\varphi_g$  和  $K_g$  后,再求煤气压力  $P_g$  的做法和发展之前的原流函数法求出  $\varphi_g$  再求  $P_g$  的做法是一样的,这时  $P_g$  的详细求法见文献[4]。

通过将  $K_s$  看作待求变量,并增加一补充方程对模拟炉料运动的势流模型进行了发展,通过引入待求变量  $K_g$ ,并增加一补充方程对描述煤气运动的模型进行了修正,两者的区别在于:由式(3)知  $\frac{1}{K_s}$  是阻力系数,  $K_s$  是有确定物理意义的,在原有模型的动量方程中是已经存在的。  $K_g$  在原有模型的动量方程中是不存在的,是从外界引入的。本节对煤气运动模型及其流函数解法的修正或发展是在总结对高炉内炉料运动势流模型及其流函数解法的发展之后进行的,因此可以看作对势流模型及其流函数解法发展的推广。

## 6 结 论

1)对高炉综合模拟中,势流理论是模拟固态炉料运动可选用的理论之一,其主要原因有:(a)势流理论体系及其自身的数值计算方法较为成熟;(b)高炉中运动炉料主要受重力势场的作用,物料相变和化学反应不是物料运动的根本原因;(c)势流理论能很大程度上反映一般竖炉中的物料混合情况;(d)与传热方程、传质方程及描述高炉内多相流的其他动量方程一样,势流理论也是宏观尺度模型,各种宏观尺度模型易于相互耦合,形成对一整体的综合模拟;(e)合理简化综合模拟模型,加快模拟计算速度的需要。

2)将原有2方程炉料运动势流模型(连续性方程、旋度为0方程)发展为3方程势流模型。3方程势流模型的流函数的数值解,无论在没有相变的炉上部块状带,还是炉下部熔融液体产生和流动区,都直接反映了势流理论对炉料流线的模拟。

3)基于发展后的炉料运动势流模型的流函数及其物理意义,结合位于同一流线上的床层填充颗粒直径不变的假设,导出了可模拟计算床层内炉料颗粒直径分布的方程。

4)将对炉料运动势流模型及其流函数解法的发展进一步推广为可发展其他运动模型及其流函数解法的一般方法,以对包括厄刚方程在内的煤气运动模型及其流函数解法发展为例,给出了其一般方法的具体步骤。

#### 参考文献:

- [1] UEDA S, NATSUI S, NOGAMI H, et al. Recent progress and future perspective on mathematical modeling of blast furnace[J]. ISIJ International, 2010, 50(7):914-923.
- [2] YANG K, CHOI S, CHUNG J, et al. Numerical modeling of reaction and flow characteristics in a blast furnace with consideration of layered burden[J]. ISIJ International, 2010, 50(7):972-980.
- [3] ADEMA A T, YANG Y, BOOM R. Discrete element method-computational fluid dynamic simulation of the materials flow in an iron-making blast furnace[J]. ISIJ International, 2010, 50(7):954-961.
- [4] 毕学工. 高炉过程数学模型及计算机控制[M]. 北京:冶金工业出版社, 1996: 158-159, 155-156, 147-148, 150-151.
- [5] YAGI J. Mathematical modeling of the flow of four fluids in a packed bed[J]. ISIJ International, 1993, 33(6):619-639.
- [6] AUSTIN P R, NOGAMI H, YAGI J. A mathematical model of four phase motion and heat transfer in the blast furnace[J]. ISIJ International, 1997, 37(5): 458-467.
- [7] AUSTIN P R, NOGAMI H, YAGI J. A mathematical model for blast furnace reaction analysis based on the four fluid model[J]. ISIJ International, 1997, 37(8): 748-755.
- [8] AUSTIN P R, NOGAMI H, YAGI J. Computational investigation of scrap charging to the blast furnace[J]. ISIJ International, 1998, 38(7):697-703.
- [9] ZOU Z Y, ZHU H P, YU A B. Discrete particle simulation of solid flow in a model blast furnace[J]. ISIJ International, 2005, 45(12):1828-1837.
- [10] AKASHI M, MIO H, SHIMOSAKA A, et al. Estimation of bulk density distribution in particle charging process using discrete element method considering particle shape[J]. ISIJ International, 2008, 48(11):1500-1506.
- [11] MIO H, KOMATSUKI S, AKASHI M, et al. Validation of particle size segregation of sintered ore during flowing through laboratory-scale chute by discrete element method[J]. ISIJ International, 2008, 48(12): 1696-1703.
- [12] ZAIMI S A, AKIYAMA T, GUILLOT J B, et al. Sophisticated multi-phase multi-flow modeling of the blast furnace [J]. ISIJ International, 2000, 40(4): 322-331.
- [13] CHEN J Z, AKIYAMA T, NOGAMI H, et al. Modeling of solid flow in moving beds [J]. ISIJ International, 1993, 33(6): 664-671.
- [14] 王成善, 郑少波, 蒋国昌. 预还原铬铁块矿竖炉终还原的数值模拟[J]. 过程工程学报, 2008, 8(s1):144-151. WANG CHENG-SHAN, ZHENG SHAO-BO, JIANG GUO-CHANG. Numerical simulation on final reduction of pre-reduced chromite briquette descending in a shaft furnace[J]. The Chinese Journal of Process Engineering, 2008, 8(s1): 144-151.
- [15] 王成善. 二步法冶炼含铬铁水终还原反应器的数值仿真[R]. 上海:上海大学, 2005.

(编辑 王维朗)