

文章编号: 1000-582X(2011)10-115-08

频域全通式压缩感知随机滤波器设计

刘郁林¹, 张先玉¹, 王锐华², 吴丽云³

(1. 重庆通信学院 DSP 实验室, 重庆 400035; 2. 中国电子设备系统工程公司, 北京 100141; 3. 解放军后勤工程学院 研究生一队, 北京 100085)

摘要: 压缩感知中常用随机矩阵作为测量矩阵, 但此类矩阵存在实现困难、计算复杂度高等缺陷。随机滤波器产生的随机循环矩阵可用于信号测量, 提出一种适用于压缩感知的新的随机滤波器设计方法, 设计的随机滤波器具有频域全通, 时频域均为实值的特点, 同时分析了由滤波器产生的测量基与其他信号基的相关性。测量信号可包含原始信号所有信息, 便于计算, 且滤波器实现简单, 产生的测量基可保证与其他信号基的无关性。通过仿真发现, 利用此滤波器可实现信号的采集与恢复。

关键词: 压缩感知; 随机滤波器; 稀疏信号; 测量矩阵; 随机循环矩阵

中图分类号: TN911.5

文献标志码: A

Design of an “all pass” compressive sensing random filter

LIU Yu-lin¹, ZHANG Xian-yu¹, WANG Rui-hua², WU Li-yun³

(1. DSP Lab, Chongqing Communication Institute, Chongqing 400035, P. R. China; 2. China Electronic Equipment System Engineering Corporation, Beijing 100141, P. R. China; 3. PLA Logistic Academy, Beijing 100080, P. R. China)

Abstract: In Compressive sensing (CS), the random matrix is usually used as the measurement matrix, which is hard to design and difficult for computing. The random circulant matrix generated by random filter is suitable for signal measurement. A novel random filter is designed which is *all pass* in frequency domain, all real in both of time domain and frequency domain. The coherence property between the measurement basis and the signal basis is analyzed. The measurement vector can include all information of the original signal and it is convenient for computing. Numerical simulation results demonstrate that the filter is appropriate for signal collection and recovery.

Key words: compressive sensing; random filter; sparse signal; measurement matrix; random circulant matrix

几十年来,奈奎斯特-香农采样定理一直是信号采集和处理的准则,它要求采样速率超过信号带宽的2倍,这样才能无失真地恢复出信号。但在一些领域中,例如数字图像、数字视频等,信号的奈奎斯

特采样速率极大,所以在存储和传输之前需先进行压缩处理。

压缩感知是一种新的稀疏信号获取和重构技术,它针对目标信号较少的线性测量值,利用非线性

收稿日期: 2010-12-05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60672157); 重庆市自然科学基金资助项目(CSTC2009BB2028; CSTC2011BA2016)

作者简介: 刘郁林(1971-),男,重庆通信学院教授,博士生导师,主要从事盲信号处理、认知无线电、无线传感器网络等方向研究。(Tel)18602389696;(E-mail)spliyul@uestc.edu.cn。

重构算法得到目标信号^[1-2]。这一技术仅利用极少的测量值重构信号,大大降低了系统的采样速率,因此在图像、视频等采样速率要求过高而信号又具有稀疏性的领域有广阔的应用前景^[3-4]。近年来,研究人员在这一领域已取得了一定的成果。压缩感知一方面要求信号具有很强的稀疏性,另一方面又要求选用合适的测量矩阵,保证测量基和信号基之间具有无关性。传统的测量矩阵采用完全随机矩阵来实现^[4-5],但是采用这种矩阵存在实现困难、计算量大等问题。

将随机滤波器应用于压缩感知领域可以有效解决以上问题^[6-7],提出一种新的滤波器设计方法,该滤波器是一种“全通”滤波器,并且时频域均为实值,这样一方面测量值可包含所有的目标信号信息,另一方面可简化系统设计,提高算法效率。通过仿真发现,利用此滤波器能准确的重构出信号,并且由滤波器产生的测量矩阵能保证与其他信号基向量无关。

1 压缩感知理论

压缩感知的基本思想是利用稀疏信号的一小部分线性测量值可重构出原始信号。问题描述如下^[8-9]

对于任何一维向量 $\mathbf{x} \in R^N$, 根据向量空间的知识都可以由一组正交基向量组 $\{\psi_i\}_{i=1}^N$ 线性表出,即可表示为

$$\mathbf{x} = \Psi \mathbf{s}, \quad (1)$$

其中: $\Psi = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N]$; 权重系数为 $\mathbf{s}_i = [\psi_i, \mathbf{x}]$ 。若 $\|\mathbf{s}\|_0 \leq K$, 其中 $\|\cdot\|_0$ 表示向量中非零元素的个数,则称向量 \mathbf{s} 为 K -sparse 向量。

经过相应处理,得到一组目标信号的线性测量值

$$\mathbf{y}_i = [\mathbf{x}, \varphi_i], \quad (2)$$

其中,向量组 $[\varphi_i]_{i=1}^M$ 为观测向量。

为获得 1 个紧凑的表示形式,将上述观测模型写为矩阵形式为

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} = \Phi \Psi \mathbf{s} = \Theta \mathbf{s}, \quad (3)$$

其中: $\Phi = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_M]^T$ 为 $M \times N$ 的矩阵; $\Theta = \Phi \Psi$ 为全息基向量矩阵。

一般地,若 $M \geq N$, 则利用 LS、MMSE 等算法可获得准确的 \mathbf{x} 或 \mathbf{s} , 若 \mathbf{s} 具有很强的稀疏性,理论上可以从很少的测量值(即 $M \ll N$)中恢复出 \mathbf{s} ^[10-11]。一般地,可通过求解如下最优化问题^[12]

$$\hat{\mathbf{s}} = \min \|\mathbf{s}\|_1, \text{ 其中 } \Theta \mathbf{s} = \mathbf{y}, \quad (4)$$

式(4)中, $\|\cdot\|_1$ 表示 1-范数,该式可通过基追踪

(BP)算法求解。

经过大量研究发现,为了准确地估计出目标信号,要求测量值数目满足一定的条件,即

$$M \geq \mu^2 \cdot K \cdot \log N, \quad (5)$$

其中, μ 表示信号基 Ψ 与测量基 Φ 的相关系数

$$\mu = \max_{l,k} |[\varphi_l, \varphi_k]|。$$

经过研究发现: $1 \leq \mu \leq \sqrt{N}$ 。由式(5)可知 μ 越小(即两组基相关性越差),所需的测量值就越多。所以压缩感知的重点和难点是如何选择 1 个较优的测量矩阵。

常用的测量矩阵为完全随机矩阵,矩阵中的元素常选用随机高斯分布、随机伯努利分布或测量矩阵由 DFT 变换矩阵的任意 M 列组成。采用这种矩阵能保证测量基与稀疏基的无关性,获得较好的重构效果,但此矩阵存在如下缺陷^[13]

1) 压缩感知适用于高维稀疏信号处理,比如图像、视频领域等,数据量巨大,因此随机测量矩阵非常庞大,一方面计算量难以承受,另一方面,需要很大的存储介质存储数据,实现代价较高;

2) 矩阵中的元素全为随机的,系数太多,使得设计起来复杂,不便于灵活设计;

利用随机滤波器产生的随机循环矩阵可克服以上缺陷:一方面,测量过程可利用 FFT 算法实现,算法实现简单,计算量小,这在数据量大的领域具有很大的潜力;另一方面,随机滤波器的系数较少,便于灵活设计,存储量小,便于硬件实现。

2 随机滤波器

介绍如何通过将目标信号与 1 个随机信号卷积得到压缩感知模型^[14]。假定存在 1 个随机序列 $p \in R^N$, 将目标信号与其进行圆周卷积,即: $\mathbf{x} \otimes p = \Phi_l \mathbf{x}$, 其中矩阵 Φ_l 中的每一行由 p 循环移位得到,可以得到

$$\Phi_l = \sqrt{N} \cdot \mathbf{F} \hat{\mathbf{B}} \mathbf{F}^*, \quad (6)$$

其中: \mathbf{F} 为傅里叶变换矩阵; $\mathbf{F}_{i,j} = N^{-1/2} e^{j2\pi(i-1)(j-1)/N}$; $\hat{\mathbf{B}}$ 为对角矩阵; $\hat{b}_k = \mathbf{F}^* b$ 为其对角元素; $(\cdot)^*$ 表示共轭转置。

明显地,若 $\|\hat{b}_k\| = 1, k = 1, 2, \dots, N$, 即 $\hat{b}_k = e^{j\omega_k}$, ω_k 为随机相位。此时滤波器为“全通”滤波器,信号通过滤波器后经过欠采样可以保证测量信号中含有全部的信号信息。且此时有 $\Phi_l^* \Phi_l = nI$, 可保证此测量矩阵与大部分的信号基无关^[14]。

为使随机滤波器的结构更简单,更便于实际计算,可以设计使得随机滤波器的系数和频率响应全

为实数。

为保证频域响应为实数,可使得 \hat{b} 为随机 Bernoulli 向量(相位取随机的 π 或 $-\pi$)。此时需要考虑如何使得滤波器的系数为实数,即 Φ_l 中的元素为实数。

矩阵的第 (m, n) 个元素为

$$\Phi_{l,(m,n)} = \sqrt{N} \mathbf{F}_m \cdot \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{F}_n^*, \quad (7)$$

其中 F_m 为矩阵 \mathbf{F} 的第 m 行。

将式(7)展开,可以得到

$$\begin{aligned} \Phi_{l,(m,n)} &= \sqrt{N} \sum_{k=1}^N \hat{b}_k e^{j2\pi \frac{(m-1)(k-1)}{N}} e^{-j2\pi \frac{(k-1)(n-1)}{N}} = \\ &= \sqrt{N} \sum_{k=1}^N \hat{b}_k e^{j2\pi \frac{(m-n)(k-1)}{N}}. \end{aligned} \quad (8)$$

为方便推导,假定 N 为偶数(图像视频中,像素数往往是 2 的指数,且 FFT 变换也要求元素个数为 2 的指数),在此条件下,式(8)可进一步展开为

$$\begin{aligned} \Phi_{l,(m,n)} &= \sqrt{N} \sum_{k=1}^N \hat{b}_k e^{j2\pi \frac{(m-n)(k-1)}{N}} = \sqrt{N} [\hat{b}_1 + \\ & \hat{b}_{\frac{N}{2}+1} e^{j\pi(m-n)} + \sum_{k=2}^{\frac{N}{2}} \hat{b}_k e^{j2\pi \frac{(m-n)(k-1)}{N}} + \sum_{k=\frac{N}{2}+2}^N \hat{b}_k e^{j2\pi \frac{(m-n)(k-1)}{N}}] = \\ & \sqrt{N} [\hat{b}_1 + \hat{b}_{\frac{N}{2}+1} \cdot (-1)^{m-n} + \sum_{k=2}^{\frac{N}{2}} \hat{b}_k e^{j2\pi \frac{(m-n)(k-1)}{N}} + \\ & \sum_{k=\frac{N}{2}+2}^N \hat{b}_k e^{j2\pi \frac{(m-n)(k-1)}{N}}] = \sqrt{N} [\hat{b}_1 + \hat{b}_{\frac{N}{2}+1} \cdot (-1)^{m-n} + \\ & \sum_{k=2}^{\frac{N}{2}} (\hat{b}_k e^{j2\pi \frac{(m-n)(k-1)}{N}} + \hat{b}_{N-k+2} e^{-j2\pi \frac{(m-n)(k-1)}{N}})], \end{aligned} \quad (9)$$

明显地,式(9)中前 2 项为实数,只要保证最后 1 项为实数即可,因此有 $\hat{b}_k \sim \pm 1, k=1, 2, \dots, \frac{N}{2}+1$, 以等概率取 1 或 -1 。 $\hat{b}_k = \hat{b}_{N-k+2}, k=\frac{N}{2}+2, \dots, N$ 。

若随机滤波器的频域系数满足以上条件,则可建立 1 个频域全通,时域和频域全为实值的随机滤波器。

3 滤波器性能分析

由式(5)可知,测量基和信号基的相关系数 μ 越小,所需的测量值就越少,因此主要分析利用该滤波器产生的随机测量矩阵与信号基的相关性。

令 φ_l 表示矩阵 Φ_l 的第 l 行, ψ_k 表示矩阵 Ψ 的第 k 列,则 2 向量的内积为

$$[\varphi_l, \psi_k] = \sum_{i=1}^N e^{j2\pi(l-1)(i-1)/N} e^{j\omega_i} \hat{\psi}_k(i),$$

其中 $\hat{\psi}_k = N^{-\frac{1}{2}} \mathbf{F}^* \psi_k$ 为 ψ_k 归一化的傅里叶变换。

令 $\hat{\omega}_i = 2\pi(l-1)(i-1)/N + \omega_i$, $\hat{\omega}_i$ 可视为随机向量,因此 $[\varphi_l, \psi_k]$ 即可看作 N 个独立随机变量之和。

根据复数 Hoeffding 不等式可知

$$P([\varphi_l, \psi_k] > \lambda) < 4 \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4 \|\psi_k\|_2^2}\right). \quad (10)$$

由于 $\|\psi_k\|_2^2 = 1$, 选择 $\lambda = 2 \sqrt{\ln\left(\frac{4}{\delta}\right)}$, 则有下式成立

$$P([\varphi_l, \psi_k] > 2 \sqrt{\ln\left(\frac{4}{\delta}\right)}) < \delta. \quad (11)$$

由此可见,该测量基可保证与其他基之间的无关性,由此证明了所设计滤波器的有效性。

另外,利用此滤波器测量原始信号可大大降低运算量。利用传统的随机测量矩阵(如高斯基矩阵、傅里叶变换矩阵、Hadamard 矩阵等)测量信号所需的计算次数为 $M(2N-1)$, 对具有一定稀疏度(非零值数目占信号维数的比例)的信号而言,测量值数目 M 与信号维数 N 成正比,因此一定程度上可认为常用测量矩阵的计算量与 N^2 成正比。利用随机滤波器需进行 2 次 FFT 变换,计算次数为 $N \log_2 N$, 运算量与信号维数 N 成正比。明显可以看出,利用此滤波器来测量高维稀疏信号,其运算量可大幅度降低。

另外,此滤波器也可简化系统设计,降低存储成本。常用的随机测量矩阵所需的随机数据量为 MN , 而对于该随机滤波器而言,数据量仅为 $\frac{N}{2}+1$ 个,且数据简单(Bernoulli 数据, 1 或 -1), 这可以通过简单电路随机生成,因此系统的设计复杂度大大降低,同时系统存储成本也可大大降低。

4 实验仿真

为验证滤波器的性能,进行了实验仿真,仿真时滤波器的长度为 $N=512$, 采用研究方法设计滤波器,图 1 为由此方法产生的 1 个随机滤波器。从图

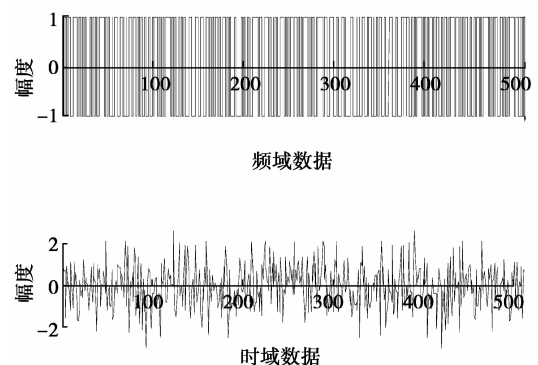


图 1 随机滤波器示意图

中可以看出,滤波器的频域数据为1或-1,幅度均为1,即全通,时域为随机实波形。

同时,通过仿真验证了该滤波器应用于压缩感知中的性能。仿真采用上述条件产生的滤波器,信号为30-sparse信号,采样点数为原始采样点数的1/5,重构算法采用OMP算法,图2为重构效果图,从图中可以看出,利用该滤波器可以很好的恢复出原始信号。

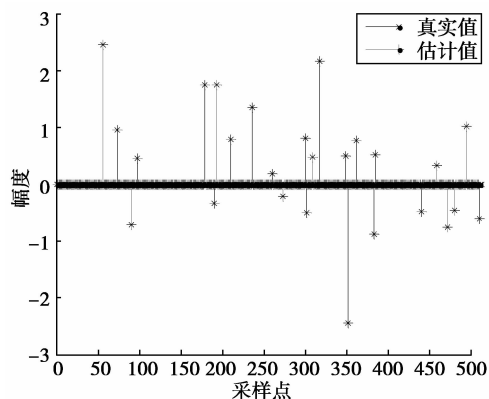


图2 信号重构效果图

5 结论

压缩感知技术是一种新的稀疏信号获取和重构技术,它从稀疏信号少部分线性测量值中恢复出原始信号,压缩感知中常用的测量矩阵为完全随机矩阵,但此矩阵存在实现困难、计算复杂度高缺陷,不适用于图像、视频等海量数据处理。设计了一种新的压缩感知随机滤波器,此滤波器具有频域全通,时频域均为实值的特点,此滤波器实现简单,便于计算。

当然,设计一种便于实际应用的滤波器还存在诸多困难,比如如何使得滤波器结构更为简单,如何使得计算更为灵活等,这些都是下一步研究的重点。

参考文献:

- [1] BARANIUK R. Compressive Sensing [C]//42nd Annual Conference on Information Sciences and Systems. Princeton, USA; IEEE Press,2008: 4-5.
- [2] DONOHO D. Compressed sensing [J]. IEEE Trans Inform Theory, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [3] ROMBERG J. Imaging via compressive sampling [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2):14-20.
- [4] CANDES E. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing [J]. Comptes Rendus Mathematique, 2008, 346(9-10):589-592.
- [5] CANDES E J, TAO J T, ROMBERG J. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information [J]. IEEE Trans Inform Theory, 2006, 52(2):489-509.
- [6] TROOP J A, WAKIN M B, DUARTE M F, et al. Random filters for compressive sampling and reconstruction [C]//ICASSP 2006, Toulouse. France: IEEE, 2006: 3-5.
- [7] BARANIUK R G. Compressive sensing [J]. IEEE signal processing magazine, 2007, 24(4):118-121.
- [8] BARANIUK R. A lecture on compressive sensing [J]. IEEE signal processing magazine, 2007, 24(4): 118-121.
- [9] GUI G, WAN Q, HUANG M A, et al. Partial sparse multi-path channel estimation using 1-regularized LS algorithm [C]// TENCON 2008, Hyderabad, India: IEEE, 2008:1-4.
- [10] 石光明,刘丹华,高大化,等. 压缩感知理论及其研究进展[J]. 电子学报,2009,37(5):1070-1081.
SHI GUANG-MING, LIU DAN-HUA, GAO DA-HUA, et al. Advances in theory and application of compressed sensing [J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(5):1070-1081.
- [11] WOJTASZCZYK P. Stability of l1 minimisation in compressed sensing [C]//SPARS'09, Saint Malo, France; IEEE, 2009:1-5.
- [12] ZHANG P, HU Z, QIU R C, et al. A Compressed Sensing Based Ultra-Wideband Communication System [EB/OL]. http://dsp.rice.edu/files/cs/CS_Based_UWB.pdf.
- [13] RAUHUT H. Circulant and toeplitz matrices in compressed sensing [C]// SPARS'09, Saint Malo. France; [s. n],2009.
- [14] ROMBERG J. Compressive sampling via random convolution [C]// International Congress on Industrial Applied Mathematics (ICIAM07) and GAMM Annual Meeting, Zürich. Switzerland: IEEE, 2007, 7(1): 12-20.

(编辑 侯湘)