

文章编号:1000-582X(2011)12-009-07

## 时变摩擦系数对准双曲面齿轮动力学行为的影响

冯治恒,王时龙,雷松,萧红

(重庆大学机械传动国家重点实验室,重庆 400044)

**摘要:**建立了考虑时变摩擦系数和润滑状态的准双曲面齿轮 14 自由度非线性动力学模型。提出了准双曲面齿轮混合弹流润滑摩擦模型,反映了齿轮传动系统的润滑状态,即齿面啮合既有润滑油膜接触又有粗糙峰接触的混合状态。在混合弹流润滑状态下,对时变摩擦系数对齿轮系统动力学行为的影响作了深入分析。通过载荷承载系数求出啮合线上各接触点瞬时摩擦系数并带入系统动力学方程中,考察了齿轮系统动态啮合力 and 传递误差变化趋势,对比了恒定摩擦系数和时变摩擦系数对齿轮动态响应的影响。不同载荷和速度下的仿真结果表明,时变摩擦系数对准双曲面齿轮系统动力学行为具有轻微的影响。

**关键词:**混合弹流润滑;时变摩擦系数;非线性动力学;动态啮合力;动态传递误差

**中图分类号:**TH113.4

**文献标志码:**A

## Effects of time-varying friction coefficient on hypoid gear dynamics

FENG Zhi-heng, WANG Shi-long, LEI Song, XIAO Hong

(State Key Laboratory of Mechanical Transmission, Chongqing University,  
Chongqing 400044, P. R. China)

**Abstract:** This paper develops a generalized 3-dimensional 14-DOF dynamic model for hypoid gear which considers the time-varying friction coefficient and lubrication situation. We propose a mixed elastohydrodynamic lubrication(EHL) friction model of hypoid gear tooth contact to reflect the realistic lubricant situation in gear transmission system consisted of full film contact and asperity contact. Under the mixed lubrication condition, the effects of time-varying friction coefficient on gear dynamic is analyzed. The load sharing coefficient is used to calculate the instantaneous friction coefficient at each contact point along the contact path. Friction coefficient model based on mixed elastohydrodynamic lubrication(Mixed EHL) is incorporated into the dynamic model to predict the dynamic mesh force and transmission error with constant and time-varying friction coefficient. The simulation results under a wide range of speed and load show that the time-varying friction coefficient has a marginal effect on the dynamic response.

**Key words:** mixed elastohydrodynamic lubrication; time-varying friction coefficient; nonlinear dynamics; dynamics mesh force; dynamic transmission error

**收稿日期:**2011-07-30

**基金项目:**国家杰出青年科学基金资助项目(50925518);“高档数控机床与基础制造装备”科技重大专项资助项目(2009ZX04001-081)

**作者简介:**冯治恒(1980-),男,重庆大学博士研究生,研究方向为机电一体化、齿轮动力学,(Tel)023-65106436;  
(E-mail) fengzhiheng@yahoo. cn。

王时龙(联系人),重庆大学教授,博士生导师,(E-mail)slwang@cqu. edu. cn。

齿轮系统动力学的研究,不但可以分析和预测齿轮系统的振动和噪声,而且反过来也对齿轮的设计和加工提出新的要求。准双曲面是齿轮传动中最为复杂的一种,它工作平稳、传动比大、传递动力大、结构紧凑,是各种机器和装备中广泛应用的传动装置。因此,建立准双曲面齿轮非线性系统动力学的基本理论,无论是在理论研究还是在实际应用中都有着极其重要的意义。

首先,齿轮副在工作过程中,齿面摩擦力的大小和方向都会发生周期性变化,因而形成一种内部激励,并与齿侧间隙、时变刚度等非线性因素耦合,使齿轮传动系统表现出复杂的非线性特性<sup>[1]</sup>。其次,在实际生产中,绝对光滑的轮齿齿面是不存在的,几乎所有的齿轮传动都是在混合弹流润滑状态下工作,即齿面啮合既有润滑油膜又有粗糙峰接触的混合状态。齿面粗糙峰的存在无疑会对齿面摩擦力和轮齿接触区次表面应力分布产生重大影响。Dowson 和 Higginson<sup>[2]</sup>在对双圆盘滚子(twin-disk)实验的基础上推导出经验公式计算齿面摩擦系数。但是实际齿面接触特性与圆盘接触模拟实验有一定差异并不能准确的反映齿面啮合。Martin<sup>[3]</sup>提出计算摩擦系数之前必须确定齿轮工作的润滑状态。He S 和 Singh R<sup>[4-5]</sup>分析了直齿轮轮齿间摩擦力的不同预测方法并考虑了不同润滑状态对摩擦系数的影响。Xu H, Kahraman A<sup>[6-7]</sup>对准双曲面齿轮在全膜润滑状态下预测了齿面瞬时摩擦系数。然而,并未考虑混合弹流润滑状态。综上所述,以往文献就摩擦力和预测摩擦系数对直齿轮以及斜齿轮动力学特性的影响进行了研究。针对润滑状态和时变摩擦系数对准双曲面齿轮动力学行为影响的研究有限,尤其对时变摩擦系数在混合弹流润滑状态下的预测研究工作尚不完善,不能反映实际轮齿啮合周期内多润滑状态的交变导致摩擦系数的变化对齿轮动态响应的影响。

因此有必要研究在混合弹流润滑状态下时变摩擦系数对准双曲面齿轮动力学特性的影响,以及研究系统中动态激励的传递和各零件的动态响应<sup>[8]</sup>。以准双曲面齿轮为研究对象,考虑齿轮副润滑状态,建立准双曲面齿轮系统非线性动力学模型,研究时变摩擦系数对齿轮系统动态响应的影响。

## 1 齿面啮合分析和啮合点相对滑动速度

齿轮啮合分析的研究首先是从直齿啮合开始,再进入斜齿啮合的。准双曲面齿轮则是渐入渐出啮合,其啮合点位置和啮合力作用线都是时变的。从动力学表现上看,准双曲面齿轮的振动要比直齿轮小得

多,其动态性能要比直齿轮好。但由于螺旋角的存在,准双曲面齿轮的啮合线相对于轴线是倾斜的。因此,其啮合力是空间力,它的动力学特性要比直齿轮复杂许多,应被考虑成三维空间动力学模型<sup>[9]</sup>。

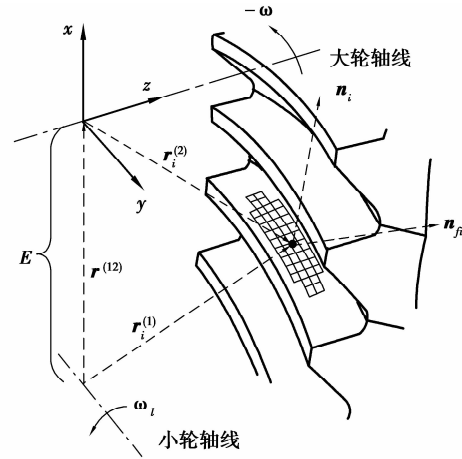


图 1 齿面接触区域坐标系

如图 1 所示,两齿面的实际接触区域实际是一个椭圆,把椭圆离散划分成许多单元格。每个点的位置向量在坐标系  $S_l$  ( $l=1,2$  主动轮和被动轮)中表示为  $\mathbf{r}_i^{(l)} = \{x_i^{(l)}, y_i^{(l)}, z_i^{(l)}\}^T$ , 单位法向量为  $\mathbf{n}_i^{(l)} = \{n_{ix}^{(l)}, n_{iy}^{(l)}, n_{iz}^{(l)}\}^T$ 。空间啮合参数  $\lambda_u^{(l)}$  ( $u=x, y, z$ ) 表示  $u$  轴的方向旋转半径。因此两齿面接触点的相对滑动速度对于固定坐标系  $S_0$  为

$$\mathbf{v}_i^{(12)} = \mathbf{v}_i^{(1)} - \mathbf{v}_i^{(2)} = \boldsymbol{\omega}^{(1)} \times \mathbf{r}_i^{(1)} - \boldsymbol{\omega}^{(2)} \times \mathbf{r}_i^{(2)} = (\boldsymbol{\omega}^{(1)} - \boldsymbol{\omega}^{(2)}) \times \mathbf{r}_i^{(2)} + \boldsymbol{\omega}^{(1)} \times \mathbf{r}_i^{(12)} \quad (1)$$

$\boldsymbol{\omega}^{(1)}$  和  $\boldsymbol{\omega}^{(2)}$  分别是主动轮和被动轮角速度向量。

$$\boldsymbol{\omega}^{(1)} = \{0, \omega_1, 0\}^T, \boldsymbol{\omega}^{(2)} = \{0, 0, -\omega_2\}^T,$$

$$\mathbf{r}_i^{(2)} = \{x_i, y_i, z_i\}^T, \mathbf{r}_i^{(12)} = \{E, 0, 0\}^T,$$

$$\mathbf{v}_i^{(12)} = \begin{Bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \\ v_{iz} \end{Bmatrix} = \omega_1 \begin{Bmatrix} z_i - \frac{\omega_2}{\omega_1} y_i \\ \frac{\omega_2}{\omega_1} x_i \\ -x_i - E \end{Bmatrix} = \omega_1 \begin{Bmatrix} z_i - \frac{N_p}{N_g} y_i \\ \frac{N_p}{N_g} x_i \\ -x_i - E \end{Bmatrix}.$$

## 2 齿轮混合弹流润滑模型

齿轮传动中,齿面摩擦系数随着转速、载荷分布与齿廓表面形状等因素的改变而发生显著变化。Martin K<sup>[3]</sup>发现:由于上述因素的影响,轮齿润滑状态在流体摩擦与边界摩擦之间不断摆动。事实上,混合弹流润滑是实际齿轮传动中广泛存在的接触状态,是流体润滑、边界润滑、薄膜润滑等的共同组合。

### 2.1 载荷承载系数

混合弹流润滑条件下,齿面接触载荷( $P_n$ )分布由全膜润滑区流体压力( $P_n^{\text{EHL}}$ )和粗糙峰接触压力即

边界润滑区压力( $P_n^{\text{BDR}}$ )两部分组成。

$$P_n = P_n^{\text{EHL}} + P_n^{\text{BDR}}. \quad (2)$$

定义  $f_\lambda (0 \leq f_\lambda \leq 1)$  为全膜润滑区承载百分比,则粗糙峰接触承载比为  $(1 - f_\lambda)$ 。即在混合弹流润滑条件下的压力分布由下式表示:

$$P_n^{\text{EHL}} = P_n * f_\lambda,$$

$$P_n^{\text{BDR}} = P_n * (1 - f_\lambda). \quad (3)$$

Zhu 和 Hu<sup>[10]</sup> 提出在混合弹流润滑状态下点接触载荷承载系数为

$$f_\lambda = \frac{1.21\lambda^{0.64}}{1 + 0.37\lambda^{1.26}}. \quad (4)$$

同时其他一些研究表明在点接触条件下载荷承载系数于油膜厚度比( $\lambda$ )有很大关系。

$$\lambda = \frac{H_{\min}}{\sigma}, \sigma = (\sigma_p^2 + \sigma_g^2)^{1/2}. \quad (5)$$

式(5)中  $\sigma_p, \sigma_g$  为齿面等效粗糙度; $\lambda$  为油膜厚度比,即接触表面间的最小油膜厚度  $H_{\min}$  与粗糙度均方根  $\sigma$  的比值,它是区分润滑状态的一个重要参数<sup>[11]</sup>。当  $0.2 < \lambda < 2$ , 一般认为处于混合弹流润滑状态;而  $\lambda < 0.2$  和  $\lambda > 2$  则分别对应着边界润滑和全膜润滑<sup>[12]</sup>。假设油膜厚度比随着转速的增大而线性递增。如图 2 所示,混合弹流润滑区域载荷承载系数随着油膜厚度比的增大而增大,直至到达全膜润滑。

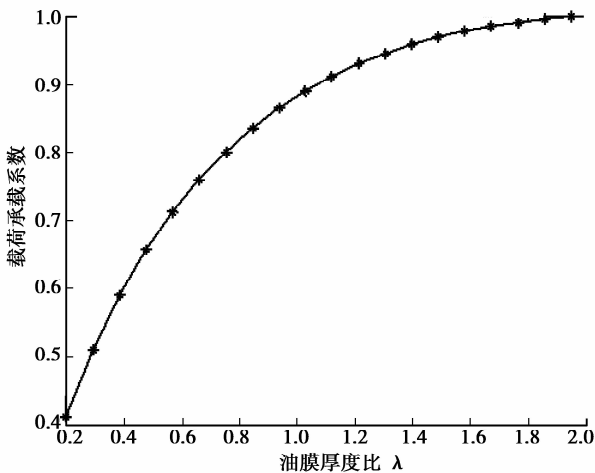


图 2 载荷承载系数

Hamrock 和 Dowson<sup>[13]</sup> 对等温椭圆接触的弹流问题进行了大量的数值计算提出了等温点接触全膜弹流润滑状态下的油膜厚度公式

$$H_{\min} = 3.63\bar{U}^{0.68} G^{0.49} \bar{W}^{-0.073} (1 - e^{-0.68k}), \quad (6)$$

$\bar{U}$  无量纲参数,  $G$  为材料参数,  $\bar{W}$  载荷系数。因此,可以通过最小油膜厚度来计算载荷分布系数。同时也受到其他一些因素的影响,如齿面粗糙度,接触类

型(点接触或是线接触),负载和转速。

## 2.2 混合弹流润滑状态下的摩擦系数求解

啮合齿面间的摩擦系数呈时变、强非线性分布,其值取决于齿面材料、表面粗糙度、齿形、载荷、工作温度、润滑状态、非稳态油膜的流变特性及润滑油种类等诸多因素<sup>[14]</sup>。此外,准双曲面齿轮的啮合阶段为点接触,接触点的滚动速度,滑滚比,法向载荷大小,等效曲率半径等因素都会对摩擦系数产生影响。图 2 所示,载荷承载系数随着油膜厚度比的增大而递增,混合弹流润滑状态下接触点的法向负载由全膜润滑压力和粗糙峰边界膜压力组成

$$F_{\text{MIX}} = F_n^{\text{EHL}} f_\lambda + F_n^{\text{BDR}} (1 - f_\lambda). \quad (7)$$

同理,切向负载  $F_t$  由切向全膜负载  $F_t^{\text{EHL}}$  和切向边界膜负载  $F_t^{\text{BDR}}$  组成

$$F_t = F_t^{\text{EHL}} + F_t^{\text{BDR}}. \quad (8)$$

由法向负载和切向负载关系,求得平均摩擦系数

$$F_t^{\text{BDR}} = \mu_{i*}^{\text{BDR}} F_n^{\text{BDR}} = \mu_{i*}^{\text{BDR}} F_n (1 - f_\lambda), \quad (9)$$

$$F_t^{\text{EHL}} = \mu_{i*}^{\text{EHL}} F_n^{\text{EHL}} = \mu_{i*}^{\text{EHL}} F_n f_\lambda. \quad (10)$$

$\mu_{i*}^{\text{EHL}}$  和  $\mu_{i*}^{\text{BDR}}$  是在全膜润滑和边界润滑下的平均摩擦系数。因此,混合弹流润滑状态下的摩擦系数为

$$\mu_i^{\text{MIX}} = \frac{F_t}{F_n} = \frac{F_t^{\text{EHL}} + F_t^{\text{BDR}}}{F_n}, \quad (11)$$

把式(9)、(10)带入上式可得

$$\mu_i^{\text{MIX}} = \mu_{i*}^{\text{EHL}} f_\lambda + \mu_{i*}^{\text{BDR}} (1 - f_\lambda). \quad (12)$$

在边界润滑条件下,对于磨齿、滚齿并经跑合的齿面来说,可以认为上述啮合阶段齿面处于弹性峰接触,其边界油膜不会破裂,其摩擦系数基本保持为常量。实验测得边界润滑的摩擦系数一般为  $0.1 \sim 0.2$ <sup>[15]</sup>。假设边界润滑摩擦系数不随着工况(如载荷大小,滑动和滚动速度等)变化而变化。因此

$$\mu_{i*}^{\text{BDR}} = \mu_{i*}^{\text{BDR}} = \mu_{i*}^{\text{BDR}} = 0.15.$$

在全膜润滑(EHL)条件下,参考 XU H, Kahraman<sup>[6-7]</sup> EHL 模型求解  $\mu_{i*}^{\text{EHL}}$ 。

$$\mu_{i*}^{\text{EHL}} = e^{f(\text{SR}, P_h, v_0, S)} P_h^{b_2} | \text{SR} |^{b_3} V_e^{b_6} v_0^{b_7} R^{b_8} f(\text{SR}, P_h, v_0, S) = b_1 + b_4 | \text{SR} | P_h \log_{10}(v_0) + b_3 e^{-| \text{SR} | P_h \log_{10}(v_0)} + b_9 e^S \quad (13)$$

其中,  $b_1 = -8.9, b_2 = 1.1, b_3 = 1.0, b_4 = -0.3, b_5 = 2.8, b_6 = -0.1, b_7 = -0.7, b_8 = -0.4, b_9 = 0.6$ 。

在混合弹流润滑条件下的油膜承担载荷( $P_n^{\text{EHL}}$ )未知,根据文献<sup>[12]</sup>全膜润滑条件下的摩擦系数与法向载荷有如下关系

$$\mu_{i*}^{\text{EHL}} \propto (P_n)^{0.2}.$$

同理可假设在混合弹流润滑条件下的油膜承担载荷与摩擦系数有如下关系

$$\mu_{i*}^{EHL} \propto (P_n^{EHL})^{0.2} \propto (P_n f_\lambda)^{0.2}$$

$$\frac{\mu_{i*}^{EHL}}{\mu_i} = (f_\lambda)^{0.2} \Leftrightarrow \mu_{i*}^{EHL} = \mu_i^{EHL} (f_\lambda)^{0.2} \quad (14)$$

将公式(14)带入混合弹流润滑摩擦系数公式(12)可得

$$\mu_i^{MIX} = \mu_i^{EHL} (f_\lambda)^{1.2} + \mu_i^{BDR} (1 - f_\lambda) \quad (15)$$

混合弹流润滑状态下的总摩擦力等于润滑油膜摩擦力  $F_L$  加上微峰接触摩擦力  $F_C$ , 即

$$F_f = F_L + F_C = \mu_i^{MIX} F_n \quad (16)$$

### 3 考虑时变摩擦系数和摩擦力的动力学模型

Vaishya M, Singh R<sup>[16]</sup> 建立了考虑摩擦力和时变刚度的多自由度系统, 利用数值仿真方法研究了摩擦力对直齿轮系统动态性能的影响。随后, 二人利用谐波平衡法求解了单自由度线性系统的周期解, 并分析了各参数对系统的影响。He S 和 Singh R 建立了 12 自由度的斜齿轮非线性动力学模型<sup>[17]</sup>, 也考虑了滑动摩擦力对斜齿轮系统动力学行为的影响。对于直齿轮, 齿面间摩擦力的方向会在节点位置发生反向转向; 然而对于准双曲面齿轮, 摩擦力方向只是在小范围内摆动, 不会在节点位置发生转向, 如图 3 所示。

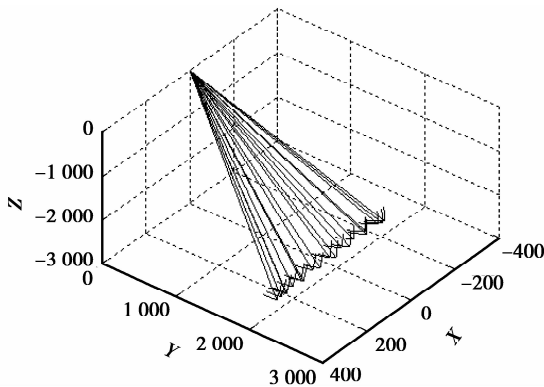


图 3 摩擦力方向在一个啮合周期内的变化

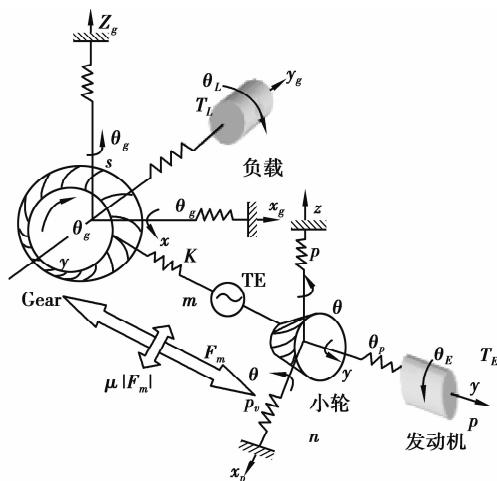


图 4 集中参数齿轮动力学模型

基于直齿轮的分析基础, 根据准双曲面齿轮啮合特点, 结合集中参数齿轮动力学模型(图 4), 建立准双曲面齿轮副系统 14 自由度振动微分方程。如下

$$I_E \ddot{\theta}_E - k_{pyr} (\theta_{py} - \theta_E) - c_{pyr} (\dot{\theta}_{py} - \dot{\theta}_E) = T_E \quad (a)$$

$$m_p \ddot{x}_p + k_{pxt} x_p + c_{pxt} \dot{x}_p + k_m f(\delta - e) n_{px} + c_m g(\dot{\delta} - \dot{e}) n_{px} - F_f n_{fpx} = 0 \quad (b)$$

$$m_p \ddot{y}_p + k_{pyt} y_p + c_{pyt} \dot{y}_p + k_m f(\delta - e) n_{py} + c_m g(\dot{\delta} - \dot{e}) n_{py} - F_f n_{fpy} = 0 \quad (c)$$

$$m_p \ddot{z}_p + k_{pzt} z_p + c_{pzt} \dot{z}_p + k_m f(\delta - e) n_{pz} + c_m g(\dot{\delta} - \dot{e}) n_{pz} - F_f n_{fpz} = 0 \quad (d)$$

$$I_{px} \ddot{\theta}_{px} + k_{pxr} \theta_{px} + c_{pxr} \dot{\theta}_{px} + k_m f(\delta - e) \lambda_{px} + c_m g(\dot{\delta} - \dot{e}) \lambda_{px} - F_f \lambda_{fpx} = 0 \quad (e)$$

$$I_{py} \ddot{\theta}_{py} + k_{pyr} (\theta_{py} - \theta_E) + c_{pyr} (\dot{\theta}_{py} - \dot{\theta}_E) + k_m f(\delta - e) \lambda_{py} + c_m g(\dot{\delta} - \dot{e}) \lambda_{py} - F_f \lambda_{fpy} = 0 \quad (f)$$

$$I_{pz} \ddot{\theta}_{pz} + k_{pzr} \theta_{pz} + c_{pzr} \dot{\theta}_{pz} + k_m f(\delta - e) \lambda_{pz} + c_m g(\dot{\delta} - \dot{e}) \lambda_{pz} - F_f \lambda_{fpz} = 0 \quad (g)$$

$$m_g \ddot{x}_g + k_{gxt} x_g + c_{gxt} \dot{x}_g + k_m f(\delta - e) (-n_{gx}) + c_m g(\dot{\delta} - \dot{e}) (-n_{gx}) + F_f n_{fgx} = 0 \quad (h)$$

$$m_g \ddot{y}_g + k_{gyt} y_g + c_{gyt} \dot{y}_g + k_m f(\delta - e) (-n_{gy}) + c_m g(\dot{\delta} - \dot{e}) (-n_{gy}) + F_f n_{fgy} = 0 \quad (i)$$

$$m_g \ddot{z}_g + k_{gzt} z_g + c_{gzt} \dot{z}_g + k_m f(\delta - e) (-n_{gz}) + c_m g(\dot{\delta} - \dot{e}) (-n_{gz}) + F_f n_{fgz} = 0 \quad (j)$$

$$I_{gx} \ddot{\theta}_{gx} + k_{gxr} \theta_{gx} + c_{gxr} \dot{\theta}_{gx} + k_m f(\delta - e) (-\lambda_{gx}) + c_m g(\dot{\delta} - \dot{e}) (-\lambda_{gx}) + F_f \lambda_{fgx} = 0 \quad (k)$$

$$I_{gy} \ddot{\theta}_{gy} + k_{gyr} (\theta_{gy} - \theta_L) + c_{gyr} (\dot{\theta}_{gy} - \dot{\theta}_L) + k_m f(\delta - e) (-\lambda_{gy}) + c_m g(\dot{\delta} - \dot{e}) (-\lambda_{gy}) + F_f \lambda_{fgy} = 0 \quad (l)$$

$$I_{gz} \ddot{\theta}_{gz} + k_{gzr} \theta_{gz} + c_{gzr} \dot{\theta}_{gz} + k_m f(\delta - e) (-\lambda_{gz}) + c_m g(\dot{\delta} - \dot{e}) (-\lambda_{gz}) + F_f \lambda_{fgz} = 0 \quad (m)$$

$$I_L \ddot{\theta}_L - k_{gyr} (\theta_{gy} - \theta_L) - c_{gyr} (\dot{\theta}_{gy} - \dot{\theta}_L) = -T_L \quad (n)$$

$$\text{其中, } f(\delta - e) = \begin{cases} \delta - e - b, & \delta - e \geq b \\ 0, & -b < \delta - e < b \\ \delta - e + b, & \delta - e \leq -b \end{cases} \text{ 为动态}$$

传递误差  $\delta$  和静态传递误差  $e$  的位移函数。  $g(\dot{\delta} - \dot{e}) = \begin{cases} 0, & -b < \dot{\delta} - \dot{e} < b \\ \dot{\delta} - \dot{e}, & \text{otherwise} \end{cases}$  ,  $2b$  表示齿侧间隙。

式中  $I_{i_l}$  为引擎和负载的质量惯性矩,  $I_{i_l}$  是关于  $i_l$  轴

在坐标系  $S_l (i=x, y, z; l=p, g$  分别表示主动轮和被动轮) 中的质量惯性矩。  $k_{pit}$  和  $k_{git}$  是沿坐标轴  $i_p$ ,  $i_g (i=x, y, z)$  平动方向上的刚度, 同理  $k_{pir}$  和  $k_{gir}$  是绕坐标轴  $i_p, i_g (i=x, y, z)$  转动方向上的刚度。  $c_{pit}$ ,  $c_{gir}$ ,  $c_{pir}$ ,  $c_{gir}$  是轴和轴承的阻尼系数,  $T_E$  和  $T_L$  为引擎和负载的扭矩。此外, 方向旋转半径表示为

$$\begin{cases} \lambda_{lx} = n_l \cdot (X_l \times r_l), \\ \lambda_{ly} = n_l \cdot (Y_l \times r_l), \\ \lambda_{lz} = n_l \cdot (Z_l \times r_l). \end{cases}$$

式中  $n_l = \{n_{lx}, n_{ly}, n_{lz}\}$  为齿面啮合点的单位法向量,  $n_{fl} = \{n_{flx}, n_{fly}, n_{flz}\}$  为摩擦力平移方向余弦,  $\lambda_{fl} = \{\lambda_{flx}, \lambda_{fly}, \lambda_{flz}\}$  为摩擦力旋转方向余弦。  $r_l = \{r_{lx}, r_{ly}, r_{lz}\}$  为啮合点在坐标系  $S_l$  的位置向量。  $X_l, Y_l$  和  $Z_l$  为坐标系  $S_l$  的三元单位向量。

动态传递误差定义为

$$\delta = \{h_p\} \{q_p\} - \{h_g\} \{q_g\}.$$

其中, 向量  $\{h_l\} = \{n_{lx}, n_{ly}, n_{lz}, \lambda_{lx}, \lambda_{ly}, \lambda_{lz}\}$ ,  $\{q_l\} = \{x_l, y_l, z_l, \theta_{lx}, \theta_{ly}, \theta_{lz}\}$ , 式中  $x_l, y_l, z_l$  为平动位移项,  $\theta_{xl}, \theta_{yl}, \theta_{zl}$  为角位移项。

动态啮合力为

$$F_m = k_m f(\delta - e) + c_m g(\dot{\delta} - \dot{e}).$$

齿面摩擦力为

$$F_f = \mu \cdot F_m.$$

图 5 表示啮合点切向力和法向力, 最后综合各网格点求出总的摩擦力。

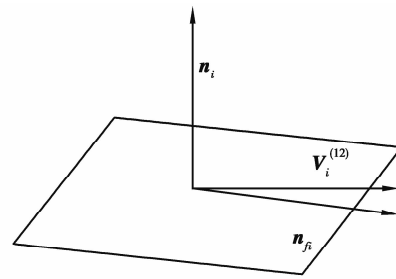


图 5 啮合点切向力示意图

$$\begin{aligned} n_i &= \{n_{xi}, n_{yi}, n_{zi}\}^T \\ n_{fi} &= \frac{(n_i \times v_i^{(12)}) \times n_i}{|(n_i \times v_i^{(12)}) \times n_i|} = \{n_{fxi}, n_{fyi}, n_{fzi}\}^T \\ f_{fi} &= \text{sign}(\omega_1) |f_{mi}| \mu_i, \end{aligned} \quad (17)$$

$$F_{fx} = \sum_{i=1}^N n_{fix} f_{fi}, n_{fx} = \frac{F_{fx}}{F_f}, \quad (18)$$

$$F_{fy} = \sum_{i=1}^N n_{fiy} f_{fi}, n_{fy} = \frac{F_{fy}}{F_f}, \quad (19)$$

$$F_{fz} = \sum_{i=1}^N n_{fiz} f_{fi}, n_{fz} = \frac{F_{fz}}{F_f}, \quad (20)$$

$$F_f = \sqrt{F_{fx}^2 + F_{fy}^2 + F_{fz}^2}, \quad (21)$$

$$\mu_f = |F_f / F_n|. \quad (22)$$

## 4 计算结果与讨论

准双曲面齿轮基本几何参数如表 1 所示。

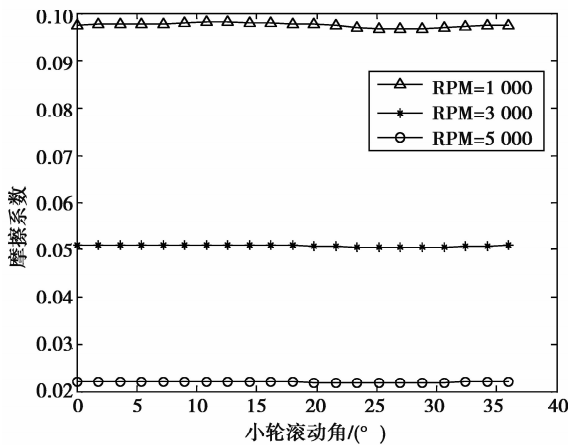
表 1 准双曲面齿轮设计参数

发动机质量 惯性矩 /(kg · m <sup>-2</sup> )	负载质量 惯性矩 /(kg · m <sup>-2</sup> )	齿数		齿宽		外锥距		节锥角		节锥顶		偏置距 /mm	小轮 螺旋 方向	顶锥顶		质量	
		小轮	大轮	小轮	大轮	小轮	大轮	小轮	大轮	小轮	大轮			小轮	大轮	小轮	大轮
0.006	0.1	10	43	52.2	47.7	165	176	16.9	72.7	-9.5	4.8	31.7	左旋	-0.1	5.8	11.4	49.5

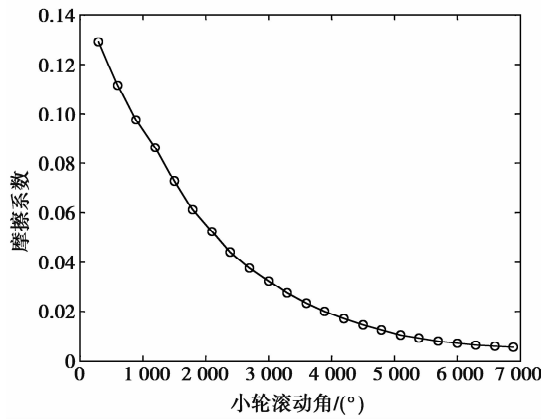
主要计算参数为: 扭矩  $L_m = 50 \text{ N} \cdot \text{m}, 500 \text{ N} \cdot \text{m}, 2000 \text{ N} \cdot \text{m}$ , 转速  $N_p = 1000, 3000, 5000 \text{ r/min}$ ,  $P_h = 2 \text{ GPa}$ ,  $\nu_0 = 10 \text{ cPs}$ ,  $\nu_k = 13 \text{ cSt}$ ,  $S = 0.07 \mu\text{m}$ 。将一个啮合周期分为 20 步经数值计算求解。首先利用有限元软件<sup>[18]</sup>对齿面划分网格, 通过齿面接触分析得到一个啮合周期内所有网格点的载荷分布, 综合曲率半径, 相对滑动速度, 滚动速度等信息, 代入混合弹流润滑模型(15)求出一个啮合周期内所有网格点的瞬时摩擦系数。根据式(21)、(22)求出每一步的综合摩擦系数。小齿轮的齿数为 10, 即一个啮合周期为  $36^\circ$ 。图 6(a)表示在 1000、3000、5000 r/min 转速下摩擦系数在一个啮合周期内的变化趋势。从图 6(b)可以看到, 随着转速的升高摩擦系数逐渐减小。这是因为随着

转速升高油膜厚度比增大, 卷吸速度增大, 导致全膜润滑区的载荷承载系数增大。而在某个固定转速下的一个啮合周期内摩擦系数基本不变。图 6(c)表示输入扭矩的变化对摩擦系数的影响较小。分别在轻载  $50 \text{ N} \cdot \text{m}$ , 中载  $500 \text{ N} \cdot \text{m}$ , 重载  $2000 \text{ N} \cdot \text{m}$  作用下, 摩擦系数变化不大。因此, 转速的变化对摩擦系数的影响大于扭矩变化对摩擦系数的影响。

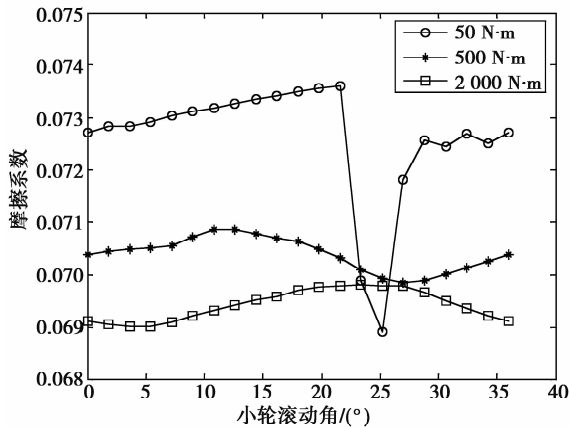
经混合弹流润滑摩擦模型计算出来的瞬时摩擦系数代入系统动力学方程求出系统动态响应。主要考察齿轮动态啮合力以及传递误差的变化趋势。采用 5 阶变步长自适应 Runge-Kutta 数值积分方法对准双曲面齿轮非线性动力学微分方程组求解。其方法是将 14 个二阶微分方程写成 28 个一阶微分方



(a)摩擦系数在转速 1 000,3 000,5 000 r/min 下一个啮合周期内的变化趋势



(b)转速在 300~6 900 r/min 下摩擦系数变化趋势

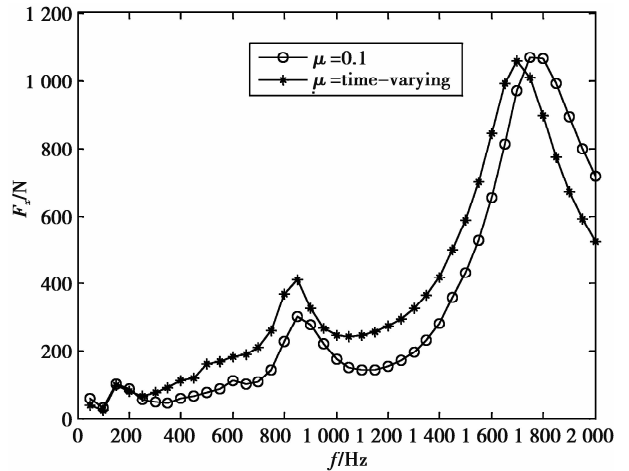


(c)1 500 r/min 转速下不同输入扭矩对摩擦系数的变化影响

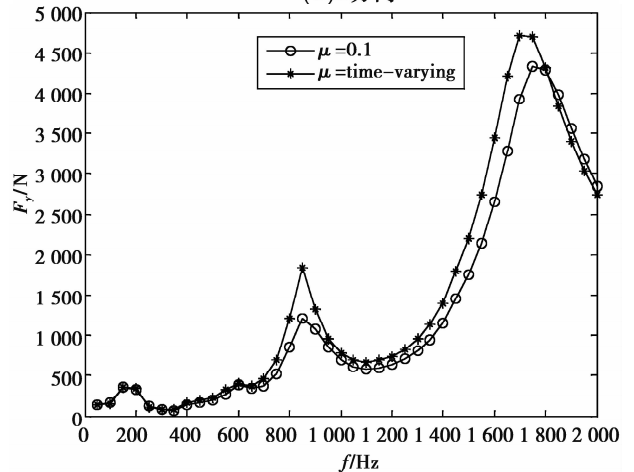
图 6 摩擦系数的变化趋势与影响因素

程,然后用 Runge-Kutta 数值积分法直接计算求解。选用 5 阶变步长自适应方法是因为如果计算中采用定步长方法是很难给定合适的步长。其次对初值选取采用初始位移由平均负载下系统的静态变形确定,初始速度取“0”。这种初值静变形的位移条件比

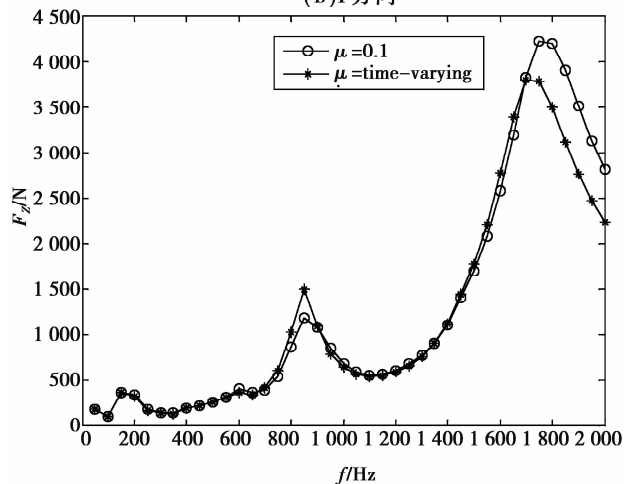
较接近稳态振动的弹性变形,而且初速取“0”,剔除了系统中的刚体转动成份,剩下振动分量,很适合齿轮系统的稳态响应求解。结果如图 7 所示。



(a)X 方向



(b)Y 方向



(c)Z 方向

圈实线表示摩擦系数为 0.1,星号实线表示时变摩擦系数

图 7 准双曲面齿轮在 X,Y,Z 方向上动态啮合力

图 7 所示在 500 N·m 扭矩作用下 X、Y、Z 3 个方向上动态啮合力变化趋势。X 方向上的变化相对 Y、Z 方向较为明显。总体上看,与考虑常数摩擦系数

( $\mu=0.1$ )作用下的结果大致相同。图 8 表明分别考虑时变摩擦系数与常数摩擦系数对系统传递误差的影响。可见时变摩擦系数对传递误差的影响很小,基本上与考虑常数摩擦系数时的系统传递误差相同。

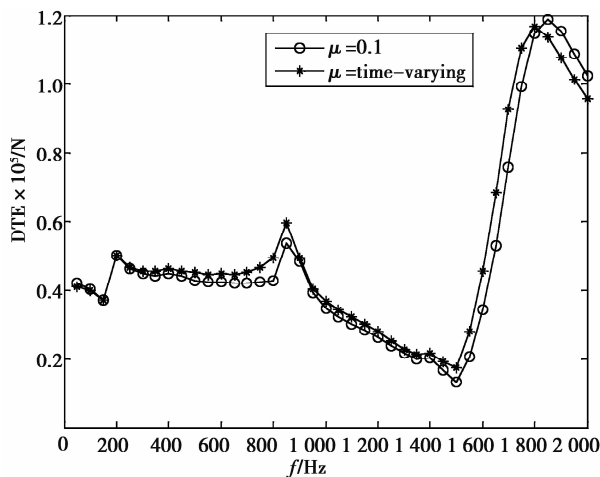


图 8 传递误差变化趋势

图 8 中,圈实线表示摩擦系数为 0.1,星号实线表示时变摩擦系数。

## 5 结 论

在直齿轮和斜齿轮考虑摩擦力作用的动力学分析基础上,延伸到对准双曲面齿轮进行研究。

1) 考虑时变摩擦系数对齿轮系统动力学特性的影响,建立了混合弹流润滑状态下时变摩擦系数预测模型。仿真结果表明:准双曲面齿轮摩擦系数在一个啮合周期内是基本不变的,而随着转速的增加逐渐减小。转速变化对摩擦系数的影响大于载荷变化对其的影响。

2) 建立了考虑时变摩擦系数和摩擦力的准双曲面齿轮 14 自由度非线性动力学模型。经数值仿真计算得到动态啮合力和传递误差结果。对比常数摩擦系数仿真结果,时变摩擦系数对准双曲面齿轮动态啮合力影响较小,对传递误差更是可以忽略不计。因此在保证求解速度和相对简化的条件下可用常数摩擦系数代替时变摩擦系数对准双曲面齿轮进行动力学分析。

### 参考文献:

- [1] 王立华. 汽车螺旋锥齿轮传动耦合非线性振动研究 [D]. 重庆:重庆大学,2003.
- [2] DOWSON D, HIGGINSON G R. Elastohydrodynamic lubrication[M]. Oxford: Pergamon Press,1966:139-181.
- [3] MARTIN K F. A review of friction prediction in gear teeth[J]. Wear,1978,49:201-238.
- [4] SONG H, CHO S M, SINGH R. Prediction of dynamic friction forces in spur gears using alternate sliding friction formulations [J]. Journal of Sound and

Vibration,2008,309(3-5): 843-851.

- [5] YAISHYA M, SINGH R. Strategies for modeling friction in gear dynamics [J]. Journal of Mechanical Design,2003,125 (2): 383-393.
- [6] XU H,KAHRAMAN A,ANDERSON N E,et al.Prediction of mechanical efficiency of parallel-axis gear pairs [J]. Journal of Mechanical Design,2007,129 (1): 58-68.
- [7] XU H. Development of a generalized mechanical efficiency prediction methodology [D]. Columbus: The Ohio State University,2005.
- [8] 唐进元,陈思雨,钟掘. 一种改进的齿轮非线性动力学模型[J]. 工程力学,2008,25(1):217-223.  
TANG JIN-YUAN, CHEN SI-YU, ZHONG JUE. An improved nonlinear model for a spur gear pair system [J]. Engineering mechanics,2008,25(1):217-223.
- [9] WANG J, LIM T, LI M F. Dynamics of a hypoid gear pair considering the effects of time-varying mesh parameters and backlash nonlinearity [J]. Journal of Sound and Vibration,2007,308 (1-2): 302-329.
- [10] HU Z, ZHU D. A full numerical solution to the mixed lubrication point contacts [J]. Journal of Tribology, 2000,122(1): 1-9.
- [11] CASTRO J, CAMPOS A, SOTTOMAYOR A, et al. Friction coefficient between gear teeth in mixed lubrication [J]. Tribology and Interface Engineering Series,2005,48: 525-536.
- [12] CASTRO M, SEABREA J. Coefficient of friction in mixed film lubrication: Gear versus twin-disc [J]. Journal of Engineering Tribology,2007,221(3): 399-411.
- [13] DOWSON D, HIGGINSON G R. Elastohydrodynamic lubrication: the fundamentals of roller and gear lubrication[M]. Oxford: Pergamon Press,1966.
- [14] 周长江,唐进元,钟志华,等. 齿轮传动齿面摩擦因数计算方法的研究 [J]. 润滑与密封,2006(10):185-191.  
ZHOU CHANG-JIANG, TANG JIN-YUAN, ZHONG ZHI-HUA, et al. Studies on the calculation of teeth surface friction coefficients in gear drive [J]. Lubrication engineering,2006(10):185-191.
- [15] 王顺,王文中,胡元中,等. 点接触润滑粗糙表面滑动摩擦力的预测研究[J]. 摩擦学报,2007,27(2): 152-155.  
WANG SHUN, WANG WEN-ZHONG, HU YUAN-ZHONG, et al. Prediction of sliding friction force of rough surfaces in lubricated point contacts [J]. Tribology,2007,27(2):152-155.
- [16] YAISHYA M, SINGH R. Sliding friction-induced non-linearity and parametric effects in gear dynamics[J]. Journal of Sound and Vibration,2001,248 (4): 671-694.
- [17] SONG H, GUNDA R, SINGH R. Inclusion of sliding friction in contact dynamics model for helical gears[J]. Journal of Mechanical Design,2007,129(1): 48-57.