

文章编号: 1000-582X(2012)02-087-05

# 齿轮传动非线性动力学键合图建模研究\*

唐进元, 陈海锋

(中南大学 a. 高性能复杂制造国家重点实验室;  
b. 机电工程学院, 湖南 长沙 410083)

**摘要:** 考虑齿轮时变啮合刚度、传动误差和齿面摩擦力, 研究运用键合图理论建立齿轮传动非线性振动键合图模型。建立用容性元件  $c$  表示的载荷和轮齿弹性变形的键合图模型, 给出用时变啮合刚度表示的容度参数  $K_j$ ; 提出在齿轮传动动力学建模中用流源  $S_f$  表示传动误差, 并给出建模方法; 考虑相对运动速度与摩擦力方向的关系, 建立齿面摩擦力键合图模型。根据因果关系和功率流, 得到齿轮传动非线性键合图模型的状态空间方程。结果表明键合图建模理论与方法可以用于解决齿轮非线性动力学的建模问题, 研究工作是系统动力学建模研究的基础性工作。

**关键词:** 系统动力学; 键合图; 非线性; 齿轮传动

**中图分类号:** TH134.41; TP391.9

**文献标识码:** A

## Nonlinear dynamics bond graph model for a spur gear pair system

TANG Jin-yuan CHEN Hai-feng

(a. Key Laboratory of Modern Complex Equipment Design and Extreme Manufacturing, b. School of Mechanical and Electrical Engineering, Central South University, Changsha 410083, Hunan, P. R. China)

**Abstract:** A nonlinear dynamics bond graph model of gear pair system is established including the time-varying gear mesh stiffness, transmission error and tooth surface conditions. A capacitive component  $c$  is introduced to represent the loads and tooth elastic deformation, while the capacity parameter  $K_j$  is expressed by time-varying mesh stiffness, and flow  $S_f$  represents the influences of the gear transmission error on the system dynamic equations. Then the tooth surface friction bond graph model involving the relationship between the relative velocity and the direction of friction are presented. According to the causal relations and the power flow, the state-space equations of the gear bond graph model are obtained. Research results show that bond graph modeling method can solve the modeling problem of the gear nonlinear dynamics, and this paper is a kind of basis work of the complex mechanical system modeling and the development of bond graph modeling theory.

**Key words:** dynamic system; bond graph; nonlinear; gear transmission

键合图建模理论是 60 年代初由美国麻省理工的 H. M. Paynter 教授所提出<sup>[1]</sup>, 其主要特征是面向计算机技术的建模与仿真, 与其它动力学建模理论

相比, 键合图建模理论有如下显著特点: 1) 用统一的方式处理多能域并存的复杂动力学系统; 2) 以简明的图形方式直观的揭示系统的动力学特征, 3) 系统

收稿日期: 2011-07-20

基金项目: 国家 973 计划资助项目(2011CB706800); 国家自然科学基金资助项目(50875263); 中南大学研究生学位创新论文资助项目

作者简介: 唐进元(1962-), 男, 中南大学教授, 主要从事齿轮动力学、数字化制造研究, (Tel)0731-88836769; (E-mail)jytangcsu@163.com。

状态方程的建立具有规则化的方式,便于计算机自动生成,因此键合图建模理论已成为复杂工程系统建模与动态分析的有力工具。

键合图建模理论与方法是继凯恩建模理论与方法后很有影响的机械系统动力学建模方法<sup>[2]</sup>,键合图建模理论从提出到现在已有近 50 年的时间,在各个学科得到广泛的应用<sup>[3]</sup>,随着键合图理论方法研究工作的不断深入、微分方程数值计算技术和计算机技术的不断发展,键合图建模理论与方法的发展空间十分大,是工程系统动力学建模研究的热点与前沿课题。目前制约其键合图建模理论与方法发展的主要问题有:1)快速求解多维非线性微分方程全局数值解的计算方法;2)各个基础单元问题(如轴承、齿轮传动、电动机等)的精准建模。笔者主要研究齿轮传动这一基础单元的非线性动力学键合图建模问题。

近年来,国内外学者利用键合图理论在行星齿轮传动、齿轮变速器建模方面做了许多工作。林超<sup>[4]</sup>根据多流传动卷扬机系统的传动特点以及主要研究的传动部件,建立了相应系统的键合图模型,对行星齿轮部分只考虑了主要的传动特性;孙冬野<sup>[5]</sup>建立了并联式混合动力汽车传动系统的键合图模型,分析了双模态型并联式混合动力汽车的发动机、电动机及离合器等部件的性能参数以及变速器速比在汽车加速行驶过程中的变化规律,行星齿轮组的建模仅考虑了齿轮的转动惯量和传动比;高海鸥等<sup>[6]</sup>建立了含行星齿轮的 PRIUS 混合动力汽车驱动系统的键合图模型,行星齿轮机构 3 个输入彼此通过传动比在齿圈啮合位置达到共势耦合,并考虑了行星齿轮机构的柔度和惯量,但是没有考虑重合度对齿轮副啮合刚度的影响。J Deur<sup>[7-8]</sup>建立了典型四档自动变速器的键合图模型,其中的行星齿轮组考虑了齿轮的转动惯量、传动比和齿面摩擦,并考虑了变速器零部件之间的摩擦和间隙、离合器的 stribeck 摩擦、离合器的滑动、发动机缸体的振动等因素在传动系处于停/反向、停/启动过程中对变速器动态性能的影响;Choi<sup>[9]</sup>在 Kim<sup>[10]</sup>的基础上建立了考虑传动轴挠度的齿轮变速器模型,该模型由齿轮副接触(tooth-to-tooth contact)、轴的回转(rotor dynamics of shafts)、变速器箱体的振动(global dynamics of the gearbox housing structure)和轴的弯曲变形(shaft bending)四部分组成,其中齿轮副接触部分考虑了轮齿的弯曲变形、转动惯量、齿面摩擦和扭矩对系统动态特性的影响。

在包括上述文献的含齿轮传动的键合图建模研究中,研究者对齿轮传动的键合图模型做了许多的

近似与简化,含齿轮传动的键合图模型没有反映齿轮传动的非线性特性,对齿轮传动的键合图建模没有深入到各种因素的非线性层面,研究齿轮传动的非线性振动键合图模型是键合图建模研究的前沿领域之一,有较大的理论与工程应用价值,目前还没有检索到类似文献,现有的研究工作利用键合图方法对齿轮系统进行建模时,只考虑了宏观传动参数,如转动惯量、传动比等,而没能包括传递误差、时变啮合刚度等影响传动性能的非线性因素。笔者主要工作是研究齿轮传动的时变啮合刚度、齿面摩擦和传递误差等各种非线性因素的键合图建模,建立齿轮传动非线性动力学键合图模型。

## 1 轮齿弹性变形的键合图建模

轮齿的弹性变形是单个轮齿的啮合齿面在载荷作用下的弹性变形,其中包括了弯曲变形、剪切变形和接触变形等<sup>[11]</sup>。在任意啮合点  $j$  处轮齿弹性变形  $\delta_j$  与其传递的载荷  $W_j$  存在如下关系

$$W_j = K_j \delta_j. \quad (1)$$

式中  $K_j$  为啮合点  $j$  处的啮合刚度。根据键合图元的定义<sup>[1]</sup>可知,轮齿的弹性变形可以用基本 1-1 通口容性元件  $C$  表示,容度参数为啮合刚度  $K_j$ 。

在齿轮的重合度  $\lambda$  处于  $(1, 2)$  时,在啮合过程中,将出现单双齿交替啮合的情况,因此,其啮合刚度始终处于变化之中。设一对轮齿从进入啮合到退出啮合的时间为  $T$ ,则第二对齿轮进入啮合的时刻为  $t_1 = T/\epsilon_a$ ,第三对齿轮进入啮合的时刻为  $t_2 = T(1-1/\epsilon_a)$ 。设第一对主被动轮齿的单齿刚度分别为  $k_{p1}$  和  $k_{g1}$ ,第二对主被动轮齿的单齿刚度分别为  $k_{p2}$  和  $k_{g2}$ ,则在单齿啮合区,根据串联原理得到单齿啮合刚度为<sup>[12]</sup>

$$k_{\min} = \frac{k_{p1} k_{g1}}{k_{p1} + k_{g1}}. \quad (2)$$

在双齿啮合区,根据并联原理得到双齿啮合刚度为:

$$k_{\max} = \frac{k_{p1} k_{g1}}{k_{p1} + k_{g1}} + \frac{k_{p2} k_{g2}}{k_{p2} + k_{g2}}. \quad (3)$$

因此,容性元件  $C$  的容度参数  $K_j$  可表示如下

$$K_j = \begin{cases} k_{\max}, & kT \leq t < kT + t_1; \\ k_{\min}, & kT + t_1 \leq t < kT + t_2; \\ k_{\max}, & kT + t_2 \leq t < (k+1)T. \end{cases} \quad (4)$$

## 2 齿轮传动误差的键合图模型

齿轮的加工和安装不可避免地会存在误差,啮合过程中啮合齿廓将偏离理论的位置,形成了啮合过程中的一种位移型激励,即误差激励。齿轮误差是影响齿轮振动和噪声的重要因素,它使齿轮啮合

时的干涉增大,破坏了齿轮传动的平衡性,产生振动和冲击。齿轮啮合误差通常是呈周期性变化的,当系统中其它误差对其的影响不可忽视时,也可将其视为一隐含周期项的平稳随机误差信号,其中周期项的频率分量与组成系统各传动件误差的频率相对应。当只考虑各传动件的一次误差时,直接与各传动件的转速相对应<sup>[13]</sup>。因此,可以将齿轮传动的误差激励的导数用流源  $S_f$  表示(图 1),且  $S_f$  定义为

$$S_f = -\dot{\bar{\epsilon}}(t) = -\omega_h \bar{\epsilon}_0 \cos(\omega_h t)。 \quad (5)$$

式中:  $\omega_h$  是齿轮的啮合频率,  $\bar{\epsilon}_0$  是误差激励的初始值。

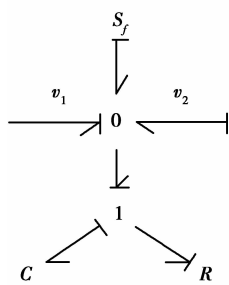


图 1 齿轮传动误差激励的键合图模型

图 1 中,容性元件  $C$  表示轮齿的弹性变形,阻性元件  $R$  表示啮合阻尼,  $S_f$  为误差激励,由 0-结的性质可知,误差激励直接与各传动件的转速相对应。

### 3 齿面摩擦的键合图键模

图 2 所示为一对相互啮合传动的齿轮,两轮轮齿的齿廓在某一点  $K$  接触,而两齿廓上点  $K$  的线速度分别为  $v_{K1}$ 、 $v_{K2}$ ,可表示如式(6)

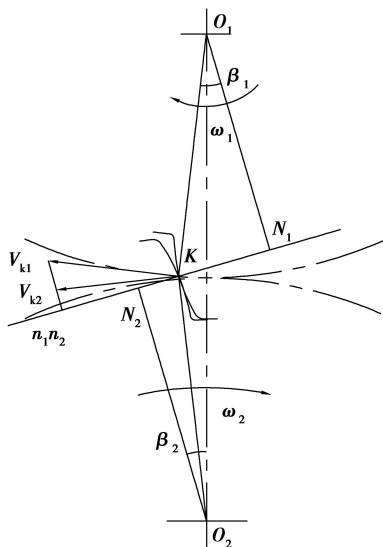


图 2 齿轮啮合示意图

$$v_{K1} = \omega_1 |O_1 K|, v_{K2} = \omega_2 |O_2 K|。 \quad (6)$$

则在该点的相对速度  $v_s$  可表示为:

$$v_s = v_{K1} \sin\beta_1 - v_{K2} \sin\beta_2 = \omega_1 |O_1 K| \sin\beta_1 - \omega_2 |O_2 K| \sin\beta_2。 \quad (7)$$

由图 2 可知

$$|O_1 K| \sin\beta_1 = |N_1 K|, |O_2 K| \sin\beta_2 = |N_2 K|。 \quad (8)$$

把式(8)代入式(7)可得

$$v_s = \omega_1 |N_1 K| - \omega_2 |N_2 K|。 \quad (9)$$

设在每一瞬间,啮合点以绝对速度  $\omega_1 r_{b1}$  沿啮合线方向做匀速运动。则  $|N_1 K|$ 、 $|N_2 K|$  可以分别表示为

$$|N_1 K| = (r_{b1} + r_{b2}) \tan\alpha - \sqrt{(r_{a2}^2 - r_{b2}^2)} + r_{b1} \omega_1 t。 \quad (10)$$

$$|N_2 K| = \sqrt{(r_{a2}^2 - r_{b2}^2)} - r_{b1} \omega_2 t。 \quad (11)$$

不考虑齿侧间隙的影响,根据库仑定律,摩擦力定义如下<sup>[14]</sup>

$$F = \mu \cdot N \cdot |v_s| \cdot \text{sgn}(v_s),$$

$$\text{sgn}(v_s) = \begin{cases} 1, v_s \geq 0; \\ -1, v_s < 0. \end{cases} \quad (12)$$

因摩擦力是一个耗能元件,且与作用在齿面上的正压力有关,所以在建模时采用一个调制的阻性

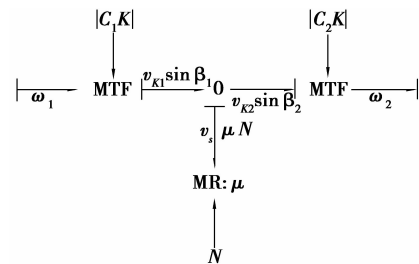


图 3 齿面摩擦的键合图模型

元件  $MR$  表示<sup>[15]</sup>,键合图模型如图 3 所示。

### 4 齿轮传动非线性动力学振动键合图模型

考虑摩擦的直齿轮动力学模型如图 4 所示,在该模型中,假设两齿轮的支承刚度较大,故不考虑支承的弹性变形,只考虑两齿轮的扭转位移,即该系统的自由度为 2。图 4 中:  $\theta_1$ 、 $\theta_2$  分别为主动齿轮 1 和从动齿轮 2 的扭转振动位移,  $r_{b1}$ 、 $r_{b2}$  为两齿轮的基圆半径,两齿轮的转动惯量分别为  $I_1$  和  $I_2$ ,  $T_1$  和  $T_2$  为齿轮副的驱动转矩和负载转矩;  $c_h$  和  $k_j$  为齿轮副的线性啮合阻尼和时变啮合刚度;  $\mu$  为齿面动摩擦

因数。根据键合图的建模法则建立齿轮的键合图模型如图 5 所示。

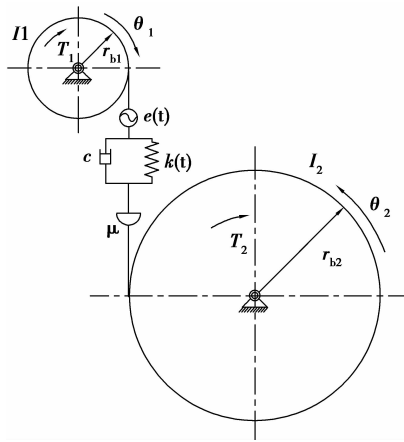


图 4 考虑摩擦的直齿轮动力学模型

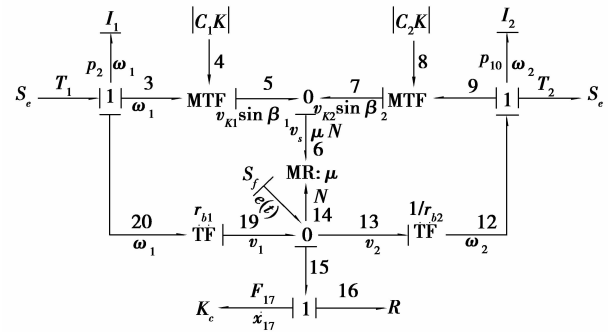


图 5 齿轮传动键合图模型

设齿轮副的状态变量为  $X = \{p_2, p_{10}, x_{17}\}$ , 根据因果关系和功率流方向得到齿轮传动系统状态空间方程为式(13), 因  $p_2 = I_1 \dot{\theta}_1, p_{10} = I_2 \dot{\theta}_2$ , 代入式(13)可得方程(14)。根据牛顿第二定律, 结合图 4 所示齿轮副动力学模型, 建立齿轮副系统振动微分方程为式(15)。

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_{17} &= \frac{p_2}{I_1} r_{b1} - \frac{p_{10}}{I_2} r_{b2} - e(t)', \\ \dot{p}_2 &= T_1 - r_{b1} (k_j x_{17} + c_h \dot{x}_{17}) - |C_1 M| \mu (k_j x_{17} + c_h \dot{x}_{17}) |v_s| \operatorname{sgn}(v_s), \\ \dot{p}_{10} &= -T_2 + r_{b2} (k_j x_{17} + c_h \dot{x}_{17}) + |C_2 M| \mu (k_j x_{17} + c_h \dot{x}_{17}) |v_s| \operatorname{sgn}(v_s). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_{17} &= r_{b1} \dot{\theta}_1 - r_{b2} \dot{\theta}_2 - e(t)', \\ I_1 \ddot{\theta}_1 + r_{b1} (k_j x_{17} + c_h \dot{x}_{17}) + |C_1 M| \mu (k_j x_{17} + c_h \dot{x}_{17}) |v_s| \operatorname{sgn}(v_s) &= T_1, \\ I_2 \ddot{\theta}_2 - r_{b2} (k_j x_{17} + c_h \dot{x}_{17}) - |C_2 M| \mu (k_j x_{17} + c_h \dot{x}_{17}) |v_s| \operatorname{sgn}(v_s) &= -T_2. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} I_1 \ddot{\theta}_1 + r_{b1} (k_j x + c_h \dot{x}) + |C_1 M| \mu (k_j x + c_h \dot{x}) |v_s| \operatorname{sgn}(v_s) &= T_1 \\ I_2 \ddot{\theta}_2 - r_{b2} (k_j x + c_h \dot{x}) - |C_2 M| \mu (k_j x + c_h \dot{x}) |v_s| \operatorname{sgn}(v_s) &= -T_2. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式(15)中:  $x = r_{b1} \theta_1 - r_{b2} \theta_2 - e(t)$ 。由式(14)、(15)可知, 由键合图模型提取的状态方程与根据牛顿第二定律建立的微分方程具有相同的形式, 在本质上是一致的。

与方程(14)对应的齿轮传动非线性动力学键合图模型图 5 可以方便的与其它单元(如轴承、轴等)的键合图模型组装成复杂机械系统的动力学键合图模型, 然后按键合图理论就可以得到这个系统的动力学方程, 这无疑为解决系统动力学建模一种好方法。系统的动力学模型建立后, 求解工作就有了对象与基础, 系统动力学微分方程求解是相对于建模的另一个领域, 不是本文的研究内容, 故关于方程(14)的求解分析不作详述。

## 5 结 论

1) 在键合图建模研究中首次给出了齿轮传动时变刚度、传递误差的键合图建模方法及键合图模型, 在此基础上运用键合图建模理论与方法建立了齿轮传动非线性动力学方程的键合图模型。

2) 与现有的齿轮建模方法相比, 齿轮非线性键合图模型具有更好的扩展性, 在已建立的齿轮非线性键合图模型的基础上, 添加相应的元件, 可实现四自由度、六自由度齿轮系统的键合图建模与分析。

3) 齿轮非线性键合图模型做为独立的子系统, 可以添加到其它包含齿轮传动的复杂机械系统中, 研究齿轮非线性参数对复杂机械系统的影响, 可以更加准确的反映系统的动态特性, 是对键合图建模理论的完善与拓展。

## 参考文献:

- [1] KARNOPP D C, MARGOLIS D L, ROSENBERG R C. System dynamics: modeling and simulation of mechatronic systems [M]. 4th Edition. New Jersey: John Wiley & Sons, 2006.
- [2] 凯恩 T R, 列文松 D A. 动力学理论与应用[M]. 贾书惠, 薛克宗, 译. 北京: 清华大学出版社, 1988.
- [3] THOMA J, BOUNAMAMA B O. Modelling and simulation in thermal and chemical engineering, a bond graph approach [M]. New York: Springer-Verlag, 2000.
- [4] 林超, 李润方. 多流传动卷扬机系统的键合图模型及仿真[J]. 重庆大学学报, 2002, 25(4): 15-18.  
LIN CHAO, LI RUN-FANG. Power model of bond graph and dynamic simulation of hoist system for multi-flow transmission [J]. Journal of Chongqing University: Natural Science Edition, 2002, 25(4): 15-18.
- [5] 孙冬野, 秦大同. 基于无级变速传动的并联式混合动力汽车动力学仿真研究[J]. 机械工程学报, 2003, 39(1): 79-83.  
SUN DONG-YE, QIN DA-TONG. Simulation on dynamic characteristic of a parallel hybrid car with a metal belt-planetary gear continuously variable transmission [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2003, 39(1): 79-83.
- [6] 高海鸥, 王仲范, 邓亚东. PRIUS 混合动力汽车驱动系统键合图建模仿真[J]. 武汉理工大学学报, 2004, 26(1): 63-65.  
GAO HAI-OU, WANG ZHONG-FAN, DENG YA-DONG. Modeling and simulation of hybrid drive system on the Toyota PRIUS based on bond graph [J]. Journal of Wuhan University of Technology, 2004, 26(1): 63-65.
- [7] DEUR J, ASGARI J, HROVAT D. Modeling and analysis of automatic transmission engagement dynamics-linear case[J]. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 2006, 128(2): 263-277.
- [8] DEUR J, ASGARI J, HROVAT D. Modeling and analysis of automatic transmission engagement dynamics-nonlinear case including validation [J]. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 2006, 128(2): 251-262.
- [9] CHORIL J, BRYANT M D. Combining lumped parameter bond graphs with finite element shafts in a gearbox model[J]. Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2002, 3(4): 431-46.
- [10] KIM J, BRYANT M D. A bond graph model of gear tooth contacts and effects of vibration on tooth surface failure[C]// Proceedings of the 1999 STLE/ASME H. S. Cheng Tribology Surveillance, June 1, 1999, Orlando, USA. [s. l.]: IEEE Press, 1999: 163-175.
- [11] 李润方, 王建军. 齿轮系统动力学[M]. 北京: 科学出版社, 1997.
- [12] 韩勤锴, 王建军, 李其汉. 考虑延长啮合时齿轮副啮合刚度模型[J]. 机械科学与技术, 2009, 28(1): 52-55.  
HAN QIN-KAI, WANG JIAN-JUN, LI QI-HAN. A periodically time-varying mesh stiffness model for spur geared system considering the effect of extended tooth contact [J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2009, 28(1): 52-55.
- [13] RICHARD P Y, MORARESCU M, BUISSON J. Bond graph modeling of hard nonlinearities in mechanics: a hybrid approach[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2008, 2(3): 922-951.
- [14] 唐进元, 陈思雨, 钟掘. 一种改进的齿轮非线性动力学模型[J]. 工程力学, 2008, 25(1): 217-223.  
TANG JIN-YUAN, CHEN SI-YU, ZHONG JUE. An improved nonlinear model for a spur gear pair system[J]. Engineering Mechanics, 2008, 25(1): 217-223.
- [15] JONGBAEG K. Bond graph models of a squirrel cage induction motor and a lay shaft gearbox for degradation analysis[D]. Austin, Texas, USA: The University of Texas at Austin, 1999.

(编辑 张小强)