

文章编号: 1000-582X(2012)05-057-07

Taylor 级数多极边界元法及其在轧制工程中的应用

陈泽军¹, 肖 宏²

(1. 重庆大学 材料科学与工程学院, 重庆 400044; 2. 燕山大学 机械工程学院, 河北 秦皇岛 066004)

摘 要: 通过基本解的多极展开与边界元线性方程组的隐式求解方法(GMRES)相结合, 开发出了快速多极边界元法。Taylor 级数多极边界元法更新了传统边界元法的求解模式, 大大提高了计算效率, 扩大了边界元法的求解规模。介绍了 Taylor 级数多极边界元法的发展历史和现状, 给出了 Taylor 级数多极边界元法的基本思想、基本原理和分类, 给出了基本解的 Taylor 展开方法和边界积分的基本实现步骤。将该方法应用于轧制工程中, 通过轧辊弹性变形和 HC 轧机辊系接触和变形的数值解析, 说明了 Taylor 级数多极边界元法适合于大规模轧制工程问题的解析。

关键词: 边界元法; Taylor 级数; 多极展开; 弹性变形; 轧制工程

中图分类号: TG156, O241.82

文献标志码: A

The Taylor series multipole boundary element method (TSM-BEM) and its applications in rolling engineering

CHEN Ze-jun¹, XIAO Hong²

(1. College of Materials Science and Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, P. R. China;
2. College of Mechanical Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao, Hebei 066004, P. R. China)

Abstract: The fast multipole boundary element methods (FM-BEMs) are developed by means of the multipole expansions in conjunction with the implicit solution GMRES (generalized minimum residual method) of linear system arising from BEM. The Taylor series multipole boundary element method (TSM-BEM) updates the solution mode of conventional BEM, enhances the computational efficiency rapidly, and enlarges the scale of solution. The development and research status of TSM-BEM are introduced, the basic ideas and principles are described, and the classify methods are presented. The Taylor series expansions for fundamental solutions and basic procedures of boundary elements integrals are presented for multipole BEM. The numerical method is applied to rolling engineering. The elastic deformation of rollers and the contact and deformation analysis of HC mill roll system are provided. The numerical example demonstrates that the TSM-BEM is suitable for the solution of large scale rolling engineering problems.

Key words: boundary element method; Taylor series; multipole expansions; elastic deformation; rolling engineering

边界元法 (Boundary Element Method, 简称 BEM) 由于具有计算简单、适应性强、精度高的优

点, 在各工程领域中得到了广泛的应用。然而, 由于最终线性方程组系数矩阵的稠密特性和传统的求解

收稿日期: 2011-10-26

基金项目: 国家自然科学基金面上项目 (50475081); 中央高校基本科研业务费资助项目 (CDJZR10130004; CDJRC11130002)

作者简介: 陈泽军 (1979-), 男, 博士, 重庆大学副教授, 主要从事快速多极边界元法与轧制工程的研究;

(Tel) 023-65111547, (E-mail) zjchen@cqu.edu.cn。

模式,限制了该方法的求解范围,难以满足现代工程对于大规模问题的求解需要^[1]。

Greengard 和 Rokhlin 于 1987 年在 Barnes 和 Hut 提出的树方法基础上,通过引入“局部展开”的概念提出了针对粒子模拟快速多极算法^[2]。因为边界元离散线性方程组可以看成是点源之间两两相互作用产生的。通过对积分核使用展开与合成技术,可能实现对构成线性方程组的系数矩阵元素的积分值进行快速计算。由于快速多极算法的本质,使其很自然地先在求解位势场问题时与边界元法结合,提高传统边界元法的求解效率。通过基本解的多极展开与边界元线性方程组的隐式求解方法(GMRES)^[3]相结合,开发出了快速多极边界元法。多极边界元法更新了求解模式,克服了传统边界元法的缺点,其计算量和内存使用量大致为 $O(N\log N)$ 或 $O(N)$,大大提高了计算效率,扩大了边界元法的求解规模,使之在许多工程领域的大规模数值计算中得到了应用^[1,3-8,13-16]。

多极边界元法按照多极算法对核函数的展开方式来分主要有球谐函数多极展开^[4-9]和 Taylor 级数多极展开^[10-17]两种。文献[4-8]介绍了球谐函数多极边界元法在轧制工程中的应用。关于两种多极边界元法优缺点的比较详见文献[17]。1995 年,Peirce 给出了弹性问题基本解的 Taylor 展开,提出了谱多极边界元法^[10];同年,Yamada 和 Hayami 对二维弹性力学问题给出了复数形式的 Taylor 展开格式,使得存储量和计算量降到了 $O(N\log N)$ ^[11]。1997 年,Gomez 和 Power 利用 Taylor 级数多极边界元法求解了二维低雷诺数空腔流动问题^[12]。2001 年,英国的 Popov 和 Power 提出了一种三维弹性问题 Taylor 级数多极边界元法^[13]。赵丽滨利用 Taylor 级数多极边界元法对薄板问题进行了分析^[14]。文献[15]提出了一种量化的 Taylor 级数多极边界元公式,进一步提高了多极边界元法的计算效率。文献[16]提出了一种求解摩擦接触问题的数学规划 Taylor 级数多极边界元法。笔者主要介绍 Taylor 级数多极边界元法及其在轧制工程中的应用。

1 Taylor 级数多极边界元法基本原理

1.1 基本解的 Taylor 级数展开

Taylor 级数多极边界元法求解弹性问题和接

触问题时,首先要对基本解进行 Taylor 级数多极展开。由于基本解比较复杂,其高阶导数很难直接获得,一般采用间接方法对位移和面力基本解进行 Taylor 级数展开。对三维弹性问题的基本解进行分析,将其变换成使用一个双调和位势函数 Ψ 的高阶导数表达的形式^[10,13]:

$$U_{ij}(x, y) = \frac{1+\nu}{8\pi(1-\nu)E} [2(1-\nu)\Psi_{,ss}\delta_{ij} - \Psi_{,ij}], \quad (1)$$

$$T_{ij}(x, y) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} [-\Psi_{,ijk} + \nu\delta_{kj}\Psi_{,ssi} +$$

$$(1-\nu)(\delta_{ij}\Psi_{,ssk} + \delta_{ik}\Psi_{,ssj})]n_k = T_{ij}^k(x, y)n_k. \quad (2)$$

对于三维问题, $\Psi = r$, 从式(1)和式(2)可以看出:边界积分方程的两个积分核函数仅用 r 的微分形式就可以表示。

显然,可以通过矢函数 r 对基本解进行间接 Taylor 级数展开。求得矢函数 r 的高阶导数,就可以得到矢函数 r 和其各阶导数的 Taylor 级数展开式。获得矢函数 r 的高阶导数是进行 Taylor 级数展开的基础,其高阶导数公式为

$$r_{,k_1 k_2 \dots k_n} = \left(\frac{-1}{r}\right)^{n-1} \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left\{ (-1)^m [2(n-m)3]!! \times \sum_{\substack{2m \\ c_n^{(2m-1)!!}}} (\delta_{\beta_1 \beta_2} \delta_{\beta_3 \beta_4} \dots \delta_{\beta_{2m-1} \beta_{2m}} g_{\beta_{2m+1}} g_{\beta_{2m+2}} \dots g_{\beta_n}) \right\}. \quad (3)$$

其中, $\mathbf{g} = \{g_i\} = \{r_i/r\}$; $\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{2m}$ 是从 $k_1 k_2 \dots k_n$ 中选择一个排列; $\beta_{2m+1} \beta_{2m+2} \dots \beta_n$ 是在 $k_1 k_2 \dots k_n$ 中选择了前面一个排列后的剩余指标的组合; $\lfloor n/2 \rfloor$ 表示不超过 $n/2$ 的最大整数。

1.2 Taylor 级数多极边界元法的实现

Taylor 级数多极边界元法实质是根据基本解积分数值随着源点与场点之间距离 r 的增加而迅速衰减的特性,将全部边界划分成了近场和远场两部分。在近场采用传统的边界元法直接进行数值积分计算,在远场则采用 Taylor 多极展开进行计算,使得远场系数不必重复计算,从而提高了计算效率。

1.2.1 创建层次树结构(Tree Cluster)

针对每个节点创建树结构,目的是通过积分核函数的展开来合成距离配点足够远的单元的影响系数,从而快速计算边界积分。对于每个节点 x ,将全部边界 Γ 分成近场 Γ_{nf} 和远场 Γ_{ff} 两个部分。

$$\Gamma = \Gamma_{nf} + \Gamma_{ff}. \quad (4)$$

对于每个节点,把全部单元划分成不同层次的簇,仅有单元组成的簇也称为叶子,然后,低层次簇组合成高层次的簇,直到覆盖整个边界为

止。图1和图2分别给出了二维和三维问题边界层次树划分和 Taylor级数边界元法基本操作示意图。

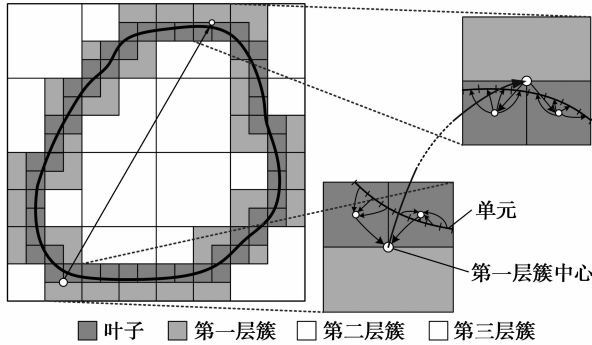


图1 二维边界单元层次树划分示意图

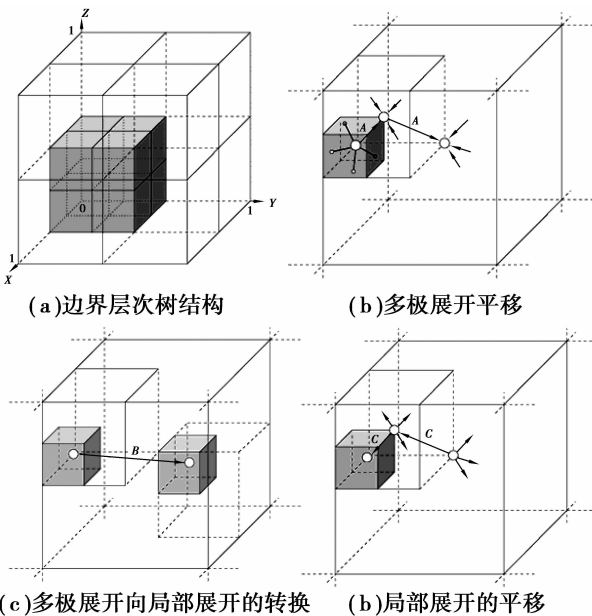


图2 三维边界单元层次树划分和多极边界元主要操作示意图

1.2.2 多极边界元法实现的基本步骤

对每个配点来说,根据一定的准则,将全部边界单元分为远场单元和近场单元两部分,远场单元的积分采用多极展开法进行计算,近场单元的积分采用直接方法进行计算^[16]。边界积分计算的基本步骤如图3所示,可以大致分为6个步骤:

1)当边界单元关于叶子中心的基本多极矩系数获得后,把叶子中单元的位移和面力值与矩系数相乘并求和,就得到叶子的多极矩系数;2)通过矩系数的平移可以获得高层次簇的多极矩系数,此过程中矩系数的平移过程是从低层次簇的中心到较高层次

的中心依次进行,称为向上遍历过程;3)将远场单元的多极展开转换为对近场簇的局部展开系数;4)将高层次簇的近场作用向低层次簇逐步进行转移,此过程中矩系数的平移过程是从高层次簇的中心到较低层次的中心依次进行,称为向下遍历过程;5)然后针对每个节点计算远场作用;6)计算近场单元对节点的作用。

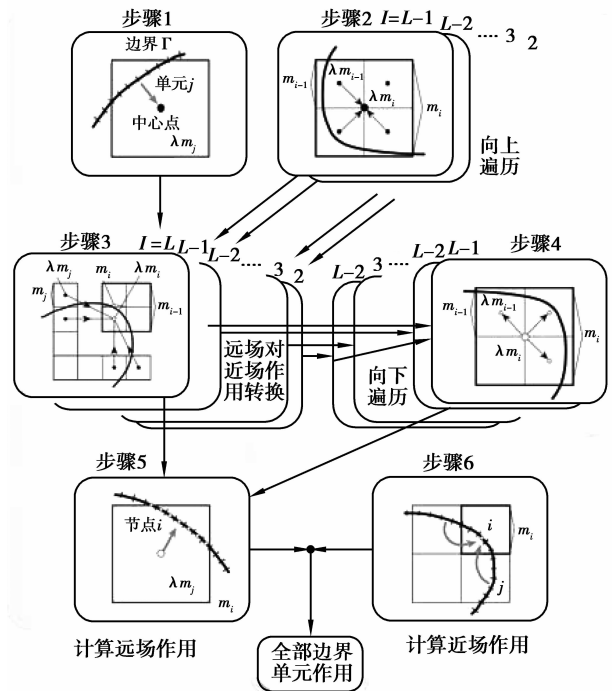


图3 多极边界元法边界积分的计算基本步骤

这里,步骤1)-5)是在远场边界进行的,通过 Taylor级数展开计算远场的作用;步骤6)是在近场进行的,直接计算的是近场单元的作用。将近场和远场的作用相加,即得到了全部边界单元的积分作用。计算基本多极矩系数是合成远场多极矩系数和远场影响的基础。在多极边界元法实现的过程中,主要的操作是层次树划分、多极展开、多极展开的平移、多极展开与局部展开的转换、局部展开和局部展开的平移5个部分。

最终,多极边界元法求解的线性方程组可以写成如下形式:

$$[A]\{x\} = [A_{near}]\{x\} + \{b_{far}\} = \{b\} \quad (4)$$

这里, A_{near} 为近场影响系数矩阵; b_{far} 为由远场影响系数矩阵和已知边界条件获得的远场矢量; x 为由未知位移和面力构成的矢量。利用 GMRES 迭代法求解方程(4)即可获得问题的解。

2 轧制工程实例

2.1 弹性问题

对某 1400 轧机的轧辊进行弹性变形分析。轧辊材料的弹性模量 $E=210$ GPa,泊松比为 $\nu=0.3$,轧制力 $P=15\ 000$ kN,沿加载区均匀分布。分别考虑轧辊辊颈两端刚性支座和铰链支座两种情况^[15-17]。分别选取不同的网格密度,进行计算。轧辊外形尺寸和受力情况如图 4 所示,最密的边界网格离散模型如图 5 所示。轧辊划分为 18 324 个四边形单元,18 326 个节点,总自由度数为 54 978。

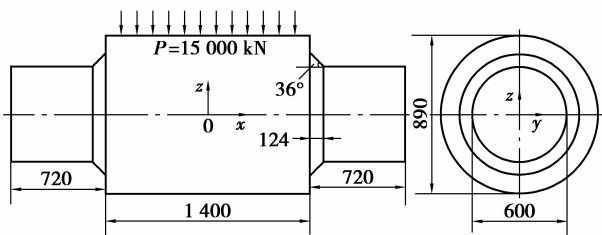


图 4 1400 轧辊外形尺寸图

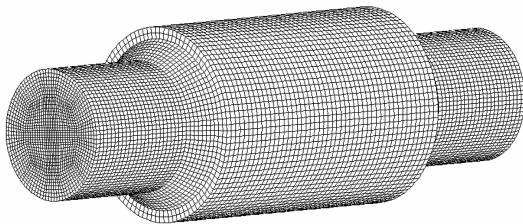


图 5 1400 轧辊网格图

轧辊在受载荷作用后发生挠曲变形,根据计算结果绘制的曲线如图 6 所示。从图 6 可以看出:铰链支座的轧辊变形比刚性支座大,轧辊固定方式对轧辊弯曲变形有重要影响。并且,多极边界元法计算结果与传统边界元法计算结果非常接近,误差能够满足工程设计的需要。

计算过程中计算时间和内存使用情况如图 7-8 所示。图中,“×”表示该点数据由于计算量和内存使用量过大,计算时间过长,甚至无法计算,该值由前面数据插值得到。由图 7 和图 8 可以看出:在求解问题的规模较小,也就是说自由度数较小时,传统边界元法的计算速度快和内存使用量比多极边界元法少。但是,当问题的规模增大时,传统边界元法的计算量和内存的使用量分别近似以 $O(N^3)$ 和 $O(N^2)$ 的速率增长^[5]。多极边界元法的计算量和内存使用量都近似与问题的自由度呈线性关系 $O(N)$

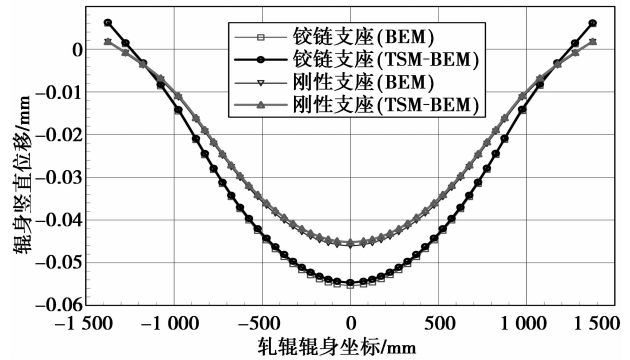


图 6 1400 轧辊中心线挠曲变形图

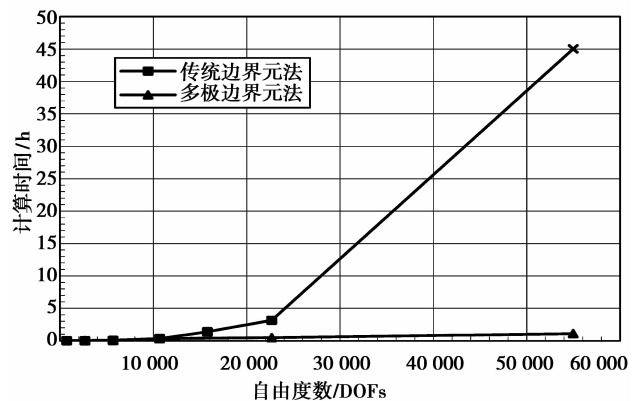


图 7 计算时间与问题自由度数的关系

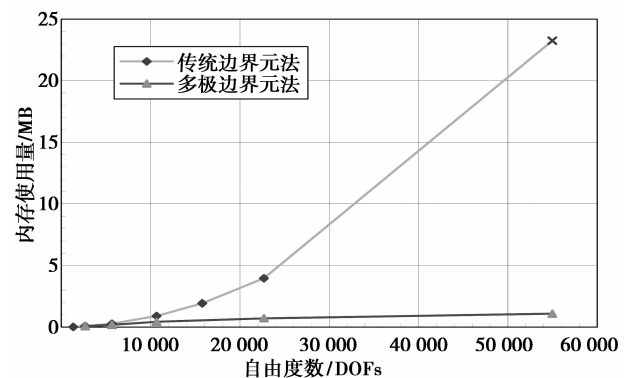


图 8 内存使用量与问题自由度数的关系

或 $O(N \log N)$ 增长。当问题的求解规模较大时,多极边界元法的求解效率比传统边界元法提高很多。这种求解特征说明多极边界元法适合求解大规模问题,扩大了传统边界元法的求解范围^[17]。

2.2 弹性接触问题

以弹性问题 Taylor 级数多极边界元法为基础,结合处理摩擦和接触的技术,基于点-面接触模型开发了三维弹性接触 Taylor 级数多极边界元法,并运用数学规划法进行求解^[16]。

某 650 六辊 HC 轧机辊间接触压力和辊系弹性变形的算例,轧机辊系的参数如表 1 所示。

表 1 HC 轧机轧辊网格参数

轧辊	辊身尺寸/mm	辊颈尺寸/mm	接触区		总体		总自由度
			节点数	单元数	节点数	单元数	
工作辊	Φ165/150×700	Φ100×100	608	506	2 588	2 580	9 588
中间辊	Φ190/180×650	Φ120×120	1 400	1 200	3 638	3 622	15 114
支承辊	Φ630/600×650	Φ340×150	588	490	2 869	2 860	10 371
合计	—	—	2 596	2 196	9 095	9 062	35 073

计算采用 1/2 模型,采用线性面单元对轧辊离散,模型如图 9 所示。为提高计算精度,对 3 个轧辊的接触区网格进行了细分,如图 10 所示。轧辊的弹性模量 $E=210 \text{ GPa}$,辊间摩擦系数为 0.1。计算得到受载后轧辊间压扁情况如图 11 所示。

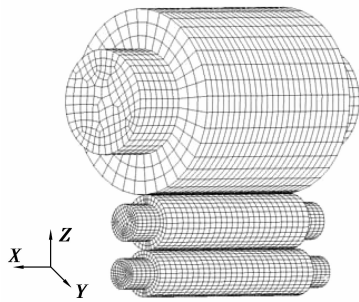


图 9 轧机辊系离散模型

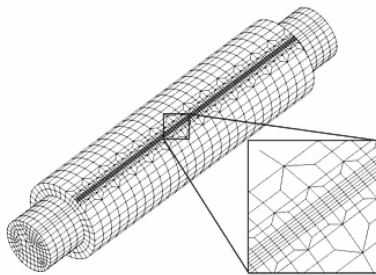


图 10 轧辊接触区局部网格加密情况

由图 11 可以看出:工作辊与中间辊间的接触压力分布没有支承辊与中间辊之间的接触压力分布均匀。

工作辊、中间辊和支承辊之间的接触区竖直位移分布情况如图 12 所示。

由图 12 可以看出:HC 轧机各轧辊受轧制力作用,竖直方向发生了明显变形,导致辊缝发生变化,使生产出轧件具有一定的中间凸度,这对于板带生产是十分不利的。通过 Taylor 级数多极边界元法的数值解析,获得了辊缝的凸度变化情况,可以进一步分析 HC 轧机刚度和板厚板形控制^[16]。

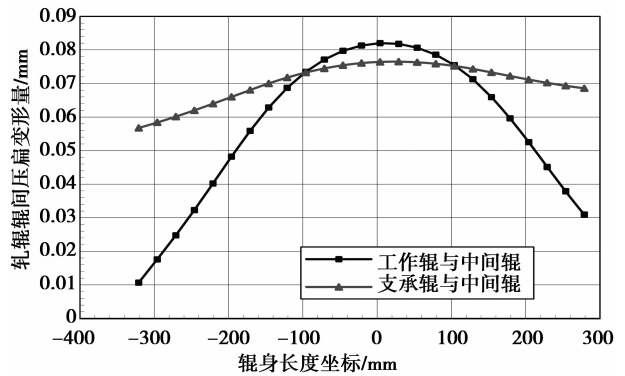
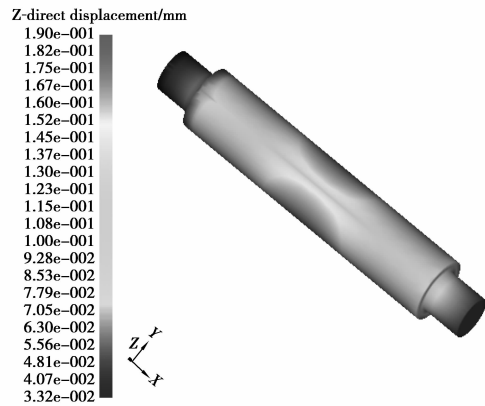
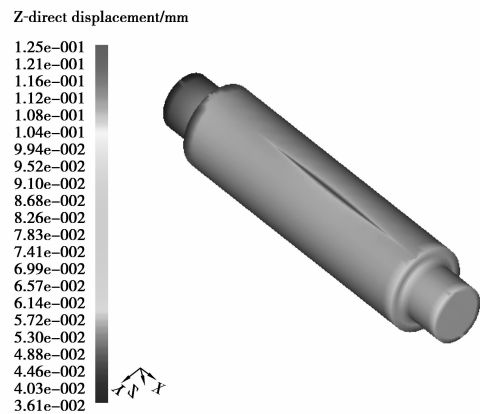


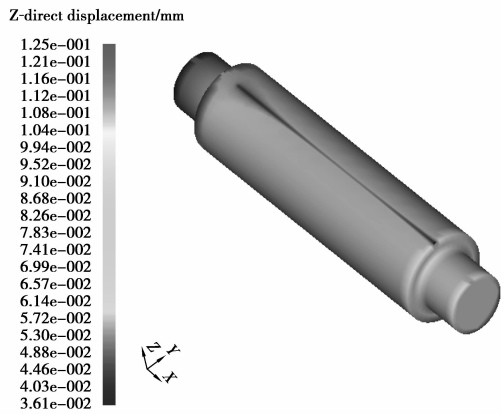
图 11 轧辊辊间压扁量分布



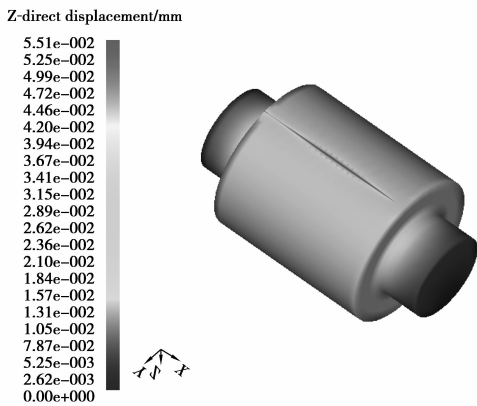
(a)工作辊 Z 方向位移分布



(b)与工作辊接触区 Z 方向位移分布



(c)与支承辊接触区Z方向位移分布



(d)支承辊Z方向位移分布

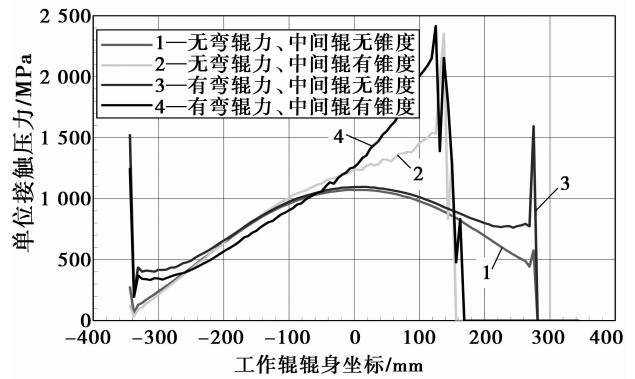
图 12 轧辊接触区竖直位移分布

利用 Taylor 级数多极边界元法计算在工作辊上施加 150 kN 正弯辊力,中间辊带有 1:300 锥度时,辊间接触压力和辊系弹性变形。计算结果如图 13 和图 14 所示。

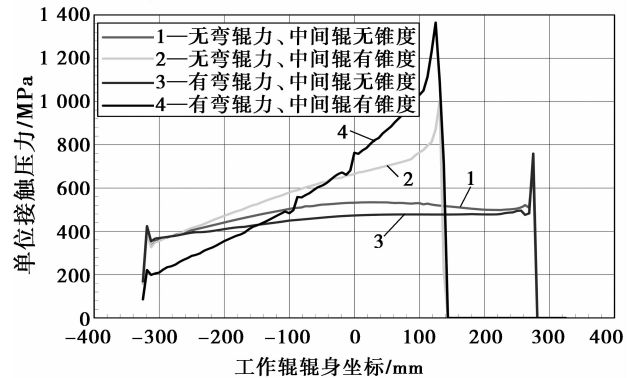
由图 13 可以看出:中间辊带有锥度时,接触区长度较短,接触压力的分布很不均匀,接触压力将在过渡位置产生峰值压力,使该区域位置单位压力增大;另外,弯辊力使工作辊与中间辊之间的压力产生一定的增大,两者均容易发生接触疲劳破坏。由图 14 可以看出:弯辊和中间辊的锥形对于理论的辊缝形状具有明显的改善,当弯辊和中间辊锥形联合作用时,计算理论辊缝形状最好。

轧件的凸度定义为厚度与指定边部厚度之差。中间辊横移和弯辊是 HC 轧机的两大板形控制手段。本算例分析在中间辊带有锥度和施加弯辊力后,轧辊的变形情况。不同中间辊形和弯辊力情况下计算得到的轧件断面理论凸度如图 15 所示。图中“W”表示在工作辊上施加了正弯辊力。

由图 15 可以看出:在没有施加弯辊力时,中间辊为平辊时板凸度最大;中间辊一端的锥度能够提高板形改善的效果。施加弯辊力后,板凸度发生明显



(a)工作辊与中间辊接触区接触压力分布



(b)支承辊与中间辊接触区接触压力分布

图 13 考虑弯辊力和不同中间辊辊形时的接触压力分布

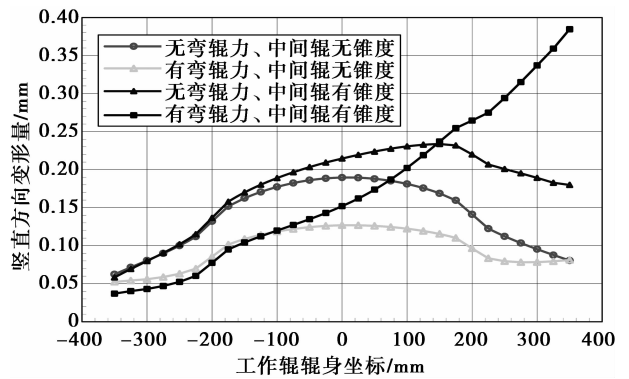
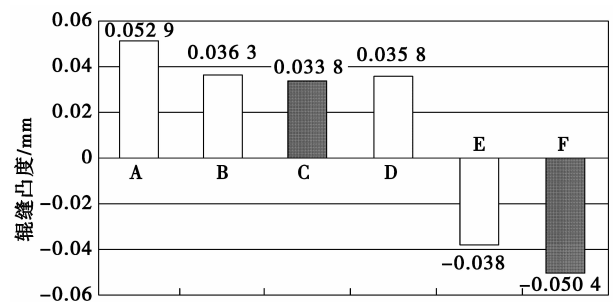


图 14 考虑弯辊力和不同中间辊辊形时的辊缝曲线形状



A—平辊;B—锥度 1:300;C—锥度 1:150;
 D—HC 轧机控制策略;E—锥度 1:300(W);
 F—锥度 1:150(W)

图 15 不同 HC 轧机控制策略条件下的辊缝板凸度

变化,中间辊为平辊时板凸度减小;中间辊有锥度的板凸度变化最为显著,由正变为负。由此可见:弯辊力对于板形的控制效果是非常明显的,中间辊的横向移动和液压弯辊配合使用,可以极大地提高轧机的板形控制能力。

3 结 论

基于快速多极算法的思想,利用基本解的 Taylor 级数展开与 GMRES 迭代求解算法相结合,开发了 Taylor 级数多极边界元法。对轧辊弹性变形算例进行了求解,通过与传统边界元法相比较,证明了该方法的正确性和高效性。对 HC 轧机辊间接触压力分布和辊系弹性变形的分析,数值结果与实际 HC 轧机的设计理念相符,验证了中间移辊和施加弯辊力后辊缝和理论板凸度的变化情况。数值算例证明了 Taylor 级数多极边界元法的正确性和有效性,适合于大规模轧制工程问题的求解。

参考文献:

- [1] YAO Z H, WANG H T, WANG P B, et al. Investigations on fast multipole BEM in solid mechanics [J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2008, 38(1): 1-17.
- [2] GREENGARD L, ROKHLIN V. A fast algorithm for particle simulations [J]. Journal of Computational Physics, 1987, 73(2): 325-348.
- [3] LIU D Y, SHEN G X. Three-dimensional elastic multipole BEM and computation of roller deformation field [C]// Proceedings of the Third International Conference on Boundary Element Techniques, September 10-12, 2002, Beijing, China. [S. l.]: Tsinghua University Press & Springer-Verlag, 2002: 83-88.
- [4] 王海涛,姚振汉. 快速多极边界元法在大规模传热分析中的应用[J]. 工程力学, 2008, 25(9): 23-27.
WANG HAI-TAO, YAO ZHEN-HAN. Application of fast multipole boundary element method on large scale thermal analysis [J]. Engineering Mechanics, 2008, 25(9): 23-27.
- [5] 刘德义,申光宪. 三维弹性快速多极边界元法[J]. 计算力学学报, 2004, 21(4): 464-469.
LIU DE-YI, SHEN GUANG-XIAN. Three-dimensional elastic fast multipole BEM [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2004, 21(4): 464-469.
- [6] 束学道,李传民,刘德义,等. 板带轧制压力多极边界元法解析[J]. 塑性工程学报, 2008, 15(1): 123-136.
SHU XUE-DAO, LI CHUAN-MIN, LIU DE-YI, et al. The pressure analysis of rolling strip with multipole BEM [J]. Journal of Plasticity Engineering, 2008, 15(1): 123-136.
- [7] 束学道,李传民,刘德义,等. 多极边界元法及在轧制工程中的应用[J]. 钢铁研究学报, 2008, 20(1): 25-28.
SHU XUE-DAO, LI CHUAN-MIN, LIU DE-YI, et al. Multipole BEM and its application in rolling engineering [J]. Journal of Iron and Steel Research, 2008, 20(1): 25-28.
- [8] 桂海莲,黄庆学,马立峰,等. 多极边界元法在轧件矫直变形分析中的应用[J]. 重庆大学学报, 2010, 33(5): 95-99.
GUI HAI-LIAN, HUANG QING-XUE, MA LI-FENG, et al. Application of FM-BEM in rolled piece deformation analysis of straightening process [J]. Journal of Chongqing University, 2010, 33(5): 95-99.
- [9] FU Y H, KLIMKOWSKI K J, RODIN G J, et al. A fast solution method for three-dimensional many-particle problems of linear elasticity [J]. International Journal of Numerical Methods in Engineering, 1998, 42(7): 1215-1229.
- [10] PEIRCE A P, NAPIER J A L. A spectral multipole method for efficient solutions of large scale boundary element models in elastostatics [J]. International Journal of Numerical Methods in Engineering, 1995, 38(7): 4009-4034.
- [11] YAMADA Y, HAYAMI K. A multipole boundary element method for two dimensional elastostatics [R]. Tokyo: Department of Mathematical Engineering and Information Physics, Faculty of Engineering, University of Tokyo, 1995: 1-20.
- [12] PEAULT B, CHARDORD P, GOMEZ J E, et al. A multipole direct and indirect BEM for 2D cavity flow at low Reynolds number [J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 1997, 19(1): 17-31.
- [13] POPOV V, POWER H. An $O(N)$ Taylor series multipole boundary element method for three-dimensional elasticity problems [J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2001, 25(1): 7-18.
- [14] ZHAO L B, YAO Z H. Fast multipole BEM for 3-D elastostatic problems with applications for thin structures [J]. Tsinghua Science and Technology, 2005, 10(1): 67-75.
- [15] CHEN Z J, XIAO H. The vectorization expressions of Taylor series multipole-BEM for 3D elasticity problems [J]. Computational Mechanics, 2009, 43(2): 297-306.
- [16] CHEN Z J, XIAO H, YANG X, et al. Taylor series multipole boundary element-mathematical programming method for 3D multi-bodies elastic contact problems [J]. International Journal of Numerical Methods in Engineering, 2010, 83(2): 135-173.
- [17] 陈泽军. 三维弹性接触 Taylor 级数多极边界元法理论与应用研究[D]. 秦皇岛: 燕山大学, 2009.

(编辑 王维朗)