

文章编号: 1000-582X(2012)06-015-06

利用顶点预测方法实现三维网格的保形简化

段黎明^a, 吴志芳^{a,b}, 张霞^{a,b}

(重庆大学 a. ICT 研究中心; b. 机械工程学院, 重庆 400044)

摘要: 针对产品的三维表面用三角网格来表示时, 三角形数量巨大的问题, 提出了一种基于顶点预测的三角形折叠简化方法。首先根据网格模型的每一个顶点与其周边元素之间的几何拓扑关系, 运用投影预测方法来预测三角形折叠的折叠点坐标, 然后运用线性插值算子对折叠点坐标进行调整。为进一步保证简化后模型的质量, 在采用距离误差控制的同时, 引入了角度误差控制方法。实验结果表明, 该简化算法在减少模型的三角形数量的同时, 有效地保持模型特征, 保证了模型表面的光顺。

关键词: 三维计算机图形学; 拓扑关系; 网格简化; 三角形折叠; 顶点预测; 特征保持

中图分类号: TP751.1

文献标志码: A

Feature-preserving mesh simplification using vertex estimation method

DUAN Li-ming^a, WU Zhi-fang^{a,b}, ZHANG Xia^{a,b}(a. ICT Research Center; b. College of Mechanical Engineering,
Chongqing University, Chongqing 400044, P. R. China)

Abstract: This paper proposes a new feature-preserving algorithm of triangular mesh simplification based on vertex estimation. According to the topological relationship between a vertex and its neighborhood elements, the projection prediction method is applied to predict the new vertex. Ultimately, the linear interpolation operator is used to rectify the position of this new vertex. To insure the quality of model surfaces, both the distance error control and the angle error control are introduced. The experimental results show the presented algorithm works well to keep model feature and insure model surface smoothness in the course of mesh simplification.

Key words: three dimensional computer graphics; topology; mesh simplification; triangle collapse; vertex estimation; feature-preserving

物体的三维表面用三角网格模型来表示时, 三角形数量往往非常庞大, 给模型的处理、传输和绘制带来了不便。因此, 必须对三角网格进行精简。针对三维网格数据的精简, 人们提出了多种简化算法, 这些算法大致可以分为 3 类: 几何元素删除法^[1-2]、网格重新划分法^[3-4]和几何元素折叠法^[5-12]。几何元素折叠法包括边折叠、三角形折叠、四边形折叠和

n 边形折叠。其中, 基于三角形折叠的简化方法, 由于不需重新三角剖分、简化速度快、稳定性好等特点, 被广泛用于三维网格简化。

针对基于三角形折叠简化方法的研究, 已取得了一些成果。1994 年, Hamann 首先提出基于三角形折叠的网格简化方法, 该方法以三角形三个顶点曲率的平均值作为该三角形的折叠权重, 权重最小

收稿日期: 2011-12-24

基金项目: 重庆市科技攻关项目(CSTC2009AC3047)

作者简介: 段黎明(1964-), 男, 重庆大学教授, 博士生导师, 主要从事工业 CT 技术及应用、逆向设计、制造自动化研究,
(Tel)023-86394823; (E-mail) duanliming163@163.com。

的三角形首先被折叠^[5]。之后的许多简化方法都与这种方法类似。1997年 Garland 和 Heckbert 提出了基于边折叠的二次误差度量方法(Quadric Error Metrics, QEM)^[8],通过使顶点到平面的距离平方和最小化来确定顶点的位置,由于其简化后网格质量好等特点,该方法已成为基于边折叠的网格简化经典算法。1998年,周昆等将 QEM 方法引入到三角形折叠法中^[9],并取得较好的简化效果。2009年,周元峰等对周昆的方法进行修改,提出了体积平方度量下的简化方法^[10],以简化时体积的变化来衡量网格简化质量。这些算法大多只讨论简化操作对模型精度的影响,而未考虑模型简化后特征保持和模型光滑的要求。2004年, Cohen 提出了一种基于法向量误差度量的误差控制方法^[11],但由于该方法主要针对网格区域划分的网格简化,增加了其应用复杂性。2009年, Diaz 提出一种新的基于高斯球采样点的网格简化方法,该方法将 Cohen 的法向量误差度量方法用于控制相邻面片的曲率变化^[12]。本文提出在三角形折叠网格简化中引入顶点预测方法,并将角度误差控制与距离误差控制相结合,这样不仅严格控制了模型简化产生的误差,而且还有效地保持了模型的特征,保证了简化后模型的质量。

1 三角形折叠法

图 1 为三角形折叠法示意图。如图 1 所示,三角形 T 是一个待折叠三角形,简化操作过程中,三角形 T 的 3 个顶点被合并成一个新的顶点 v (即折叠点),同时与三角形 T 共边的 3 个三角形 (T_0 、 T_1 和 T_2) 被删除。即每次折叠操作使模型的顶点数减少两个,三角形数量减少 4 个。三角形折叠法就是通过这种方式来实现模型的数据简化。

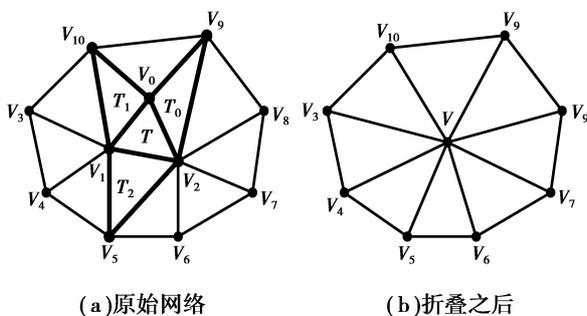


图 1 三角形折叠

三角形折叠方法涉及的两个主要问题是:①如何确定折叠点的坐标;②如何控制折叠操作所引起的误差。三角形折叠的首要问题是确定折叠点的坐

标。文中根据模型元素之间的几何拓扑关系,运用顶点预测方法来确定折叠点的坐标。在误差控制方面,采用了距离误差控制方法,还引入了角度误差控制方法。

2 顶点预测

根据曲面理论,无论简单基本曲面还是复杂的自由曲面都在一定区域内保持其信息的连续性。网格模型是曲面模型的离散化,网格模型同样具有这种局部连续性特点。因此网格上的每一特征都可视为具有一定连贯性的局部网格区域,特征范围内的任一顶点或任一三角形都不是孤立存在的,它与其周围的顶点和三角形有着密切的联系。这种局部连续性特点已被运用于网格模型的网格光滑上,并取得良好的效果^[13]。将这种特点运用于三维网格模型的简化,这种新的简化方法很好地保留了模型的特征。

如图 2 所示,在顶点 v 的周边三角形中,以顶点 v 为顶点的三角形集合称为顶点 v 的一阶邻域三角形(First Order Triangle, FOT),如图 2 中的三角形 $T_0 \sim T_4$;与顶点 v 的一阶邻域三角形外环顶点有共同顶点的外环三角形集合的并集称为顶点 v 的二阶邻域三角形(Second Order Triangle, SOT),如图 2 中的三角形 $T_5 \sim T_{18}$ 。

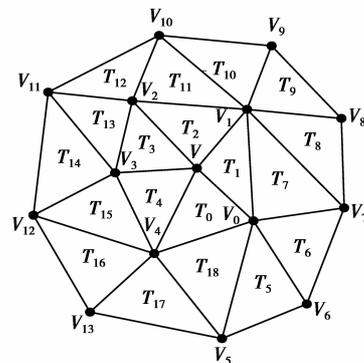


图 2 邻域三角形和邻域顶点

在顶点 v 的周边顶点中,顶点 v 一阶邻域三角形的外环顶点集合的并集称为顶点 v 的一阶邻域顶点(First Order Vertex, FOV),如图 2 中的顶点 $v_0 \sim v_4$;顶点二阶邻域三角形的外环顶点集合称为顶点 v 的二阶邻域顶点(Second Order Vertex, SOV),如图 2 中的顶点 $v_5 \sim v_{13}$ 。

该方法在确定折叠点位置时充分考虑待折叠三角形三个顶点的 FOV 顶点、SOV 顶点和 SOT 三角形的连续性特点^[14-15]。由于顶点的 SOT 三角形包含了该顶点的 FOV 顶点和 SOV 顶点,因此顶点的

SOT 三角形包含了该顶点周边区域的信息,具有很好的局部特征保持的作用。利用 SOT 三角形这种特点,通过两步来确定折叠点的位置。

第一步:投影预测折叠点

预测折叠点的过程中,首先确定待折叠三角形每个顶点各自的投影平面集合,然后分别计算每个顶点在其投影平面集合上的投影点集合,将这些投影点的坐标加权平均作为该顶点的投影平均值,最后将这 3 个顶点投影平均值的加权平均作为待折叠三角形的预测点坐标。

三角形的一阶邻域三角形集合 C 是以该三角形的 3 个顶点为顶点的三角形集合的并集。在进行三角形折叠操作时,如果一个三角形既是待折叠三角形一个顶点的 SOT 三角形,又是待折叠三角形的一阶邻域三角形,则该三角形所在平面即为该顶点的投影平面。

如图 3 所示,对于待折叠三角形 T ,其一阶邻域三角形为 $T_0 \sim T_{11}$,而顶点 $v_0(x_0, y_0, z_0)$ 的投影平面为三角形 $T_0 \sim T_6$ 的所在平面集合 $P\{p_0, p_1, p_2, \dots, p_6\}$ 。根据空间几何投影原理,可得顶点 v_0 在其投影平面集合的投影点 $v'_0, v'_1, v'_2, \dots, v'_6$ 。因此,顶点 v_0 在其投影平面集合的投影平均值

$$\{v\}_0^p = \frac{\sum_{i=0}^6 \omega_i \{v\}'_i}{\sum_{i=0}^6 \omega_i} \quad (1)$$

ω_i 为高斯度量系数。运用高斯误差函数为每个投影点分配权重,网格顶点距离投影 SOT 三角形越近, ω_i 的值就越大,该三角形对该顶点的影响也就越大。

$$\omega_i = e^{-\|c_i - v\|^2 / \sigma^2} \quad (2)$$

$c_0, c_1, c_2, \dots, c_6$ 分别为投影平面对应的 SOT 三角形内切圆圆心。 $\|c_i - v\|$ 表示为顶点 v 到对应 SOT 三角形内切圆圆心的距离, σ 是 $\|c_i - v\|$ 对折叠点的影响因子。

同理计算得三角形 T 另外两个顶点 v_1 和 v_2 的投影平均值分别为 v_1^p 和 v_2^p 。则三角形的折叠点为

$$v_p = \frac{v_0^p \gamma_0 + v_1^p \gamma_1 + v_2^p \gamma_2}{\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2} \quad (3)$$

其中 $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ 为 3 个顶点的权重,可根据 3 个顶点的特点而定。最简单情况下, $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ 都取 1.0。

第二步:线性插值法修正折叠点。

由于第一步预测的折叠点 v_p 可能会偏离待折叠三角形较远,而使模型局部特征被过分放大,引起

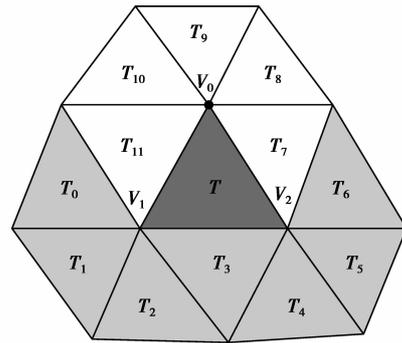


图 3 待折叠三角形的一阶邻域三角形

模型表面凹凸不平。因此,文中采用线性插值算子来对新点进行修正,最终得到折叠点 v 坐标。

$$v = v_p + \lambda(v_c - v_p) \quad (4)$$

式中 v_c 为待折叠三角形的中心, λ 是线性插值算子的系数,取值范围在 0 到 1.0 之间。

3 误差控制

三角形折叠操作必然产生折叠误差。折叠误差包括距离误差、角度误差(法向量角度变化误差)和体积误差等。在有关网格简化的文献中基本上只考虑运用距离误差来控制简化精度,即使折叠点到相关平面的距离最小,而很少考虑到三角形折叠引起的其他三角形法向量变化。

通过每一个待折叠三角形 T ,得到其一阶邻域三角形集合 C 。三角形折叠的距离误差 L 为折叠点到该集合中三角形所在平面的距离的最大值,这个距离越小越好。待折叠三角形的一阶邻域三角形集合 C 中的三角形,折叠前后法向量之间夹角的最大值称为三角形折叠的角度误差 α (或称法向量角度变化误差)。

对三角形折叠引起的距离误差进行控制能够有效地保证模型简化的精度,但对于保持模型光滑的要求来说,只进行距离误差控制是不够的。光滑性好的三角网格模型中,相邻三角片之间的法向量应有一定联系性^[16]。距离误差控制并不能有效地控制面片法向量的变化。三角形法向量变化大会引起模型表面曲率突变,从而破坏模型的特征,影响模型表面的光滑度。例如对于一些面积较小或扁平状的三角形,在折叠过程中,即使其中一个顶点移动很小一段距离也可能导致三角形的法向量产生极大的变化。因此把角度误差和距离误差有效的结合,将使网格简化在保持精度的同时,很好地保留模型的特征。

文献[11]利用三角形法向量与目标区域平均法

向量的差距来衡量网格简化的质量,文献[12]以相邻三角形的法向量差距来判断简化操作进行与否。这两种方法分别适用于其特定的简化方法(即区域划分方法和高斯球采样点方法)。文中的角度误差控制方法作为距离误差控制方法的辅助措施,通过限制一阶邻域三角形简化前后的角度变化来保证简化效果,其实现方法比文献[11]和文献[12]更为快捷方便,适用范围更为宽泛。

3.1 角度误差与距离误差

从图 4 可以看出每次折叠操作距离误差 L 和角度误差 α 两者的相互关系。以待折叠三角形 T 的一个一阶邻域三角形 T_0 为例,已知底边 AB (该边不受本次折叠操作影响)长为 L_{AB} ,折叠操作后三角形 T_0 的面积 A_0 。如图 4(a)所示, n_0, n'_0 分别为三角形 T_0 折叠前后的法向量^[17]。如图 4(b)所示,三角形折叠后折叠点 V 到边 AB 的距离为 h_0 。运用空间几何原理可计算得,折叠操作在一阶邻域三角形 T_0 上产生的角度误差 α_0 和距离误差为 L_0 分别为

$$\alpha_0 = \arccos(n_0 \cdot n'_0), \quad (5)$$

$$L_0 = h_0 \sin \alpha_0 = \frac{2A_0}{L_{AB}} \sin \alpha_0. \quad (6)$$

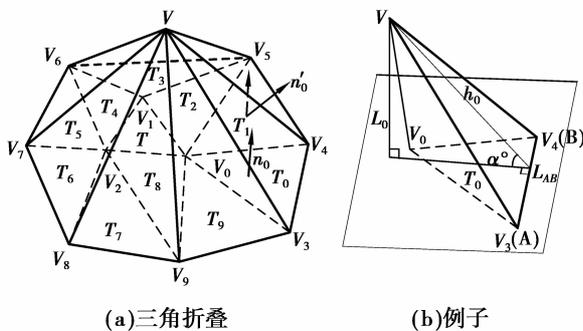


图 4 角度误差和距离误差

同理,可计算出折叠操作在其他一阶邻域三角形上产生的距离误差 $L_1 \cdots L_n$ 和角度误差 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 。因此,对待折叠三角形进行折叠操作所引起的距离误差 L 和角度误差 α 分别为

$$L = \max[L_0, L_1 \cdots L_n], \quad (7)$$

$$\alpha = \max[\alpha_0, \alpha_1 \cdots \alpha_n]. \quad (8)$$

3.2 误差控制

角度误差与距离误差两者相互联系,但它们对模型简化的影响不同,应独立控制。该方法以距离误差控制为主,依三角形折叠引起的距离误差大小的次序进行三角形折叠;以满足角度误差控制为必要条件,折叠过程中,应使折叠引起的距离误差小于

指定的距离误差阈值 L_t ,还应保证产生的角度误差小于指定的角度误差阈值 α_t 。

网格中诸如圆角、圆孔等曲率变化大的细小特征都是由一些较小三角形拼接而成,由于角度误差对于小三角形的有效控制,角度误差的引入将有利于保持这些细小特征。此外,由于待折叠三角形的一阶邻域三角形集合 C 中的每个三角形折叠前后法向量夹角受角度误差阈值的限制,因此可以有效避免折叠操作后三角形时发生翻转。

4 算法描述

简化操作前应设定好相关参数、距离阈值 L_t 和角度阈值 α_t 。相关参数设置, σ 取 1.0 附近的值, $\lambda \in [0, 1]$, L_t 一般取 0~1.0 mm 之间的值, α_t 取 0 到 90°。

按照折叠距离误差的大小对三角形进行排序,每次简化操作都提取列表中距离误差最小的三角形进行折叠操作。算法实现过程如下:

步骤 1:对于初始网格中的每一个三角形,根据式(1)~(4)计算其折叠点的坐标。

步骤 2:根据式(5)~(8),计算每个三角形的折叠距离误差和角度误差,按照距离误差由小到大,将三角形存入到三角形误差列表中。

步骤 3:从三角形折叠列表中取出距离误差最小的三角形,进行三角形处理。

①如果折叠该三角形引起的角度误差和距离误差分别小于给定的角度阈值和距离阈值,则删除该三角形及与其共边的三角形,更新该三角形的一阶邻域三角形的信息和三角形折叠列表。

②如果折叠该三角形引起的角度误差大于给定的角度阈值,距离误差小于给定的距离阈值,则不对该三角形进行处理,转步骤 3。

③如果折叠该三角形引起的角度误差和距离误差分别大于给定的角度阈值和距离阈值,则结束简化。

步骤 4:如果达到预定的简化数量,简化操作结束;否则转步骤 3。

5 实例及比较

图 5 中的实例——化油器图像网格模型是由工业 CT 断层图像采用 MC (Marching Cubes)^[18]算法重建而得的,由 480 750 个三角形(240 351 个点)组成。文中的实例都是采用相同的简化参数进行简化的:参数 σ 取 1.0, λ 取 0.4, L_t 为 0.1 mm, α_t 为 10°。从图 5(c)和(d)可以看出,即使删减了 75%和 95%的三角形,化油器网格模型上的圆柱面、倒圆面等特征还是被较好地保持了。

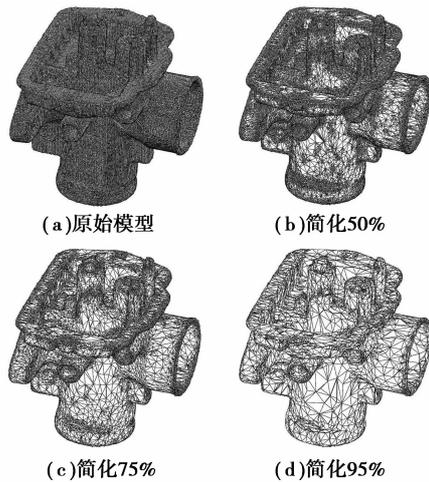


图 5 实例简化效果

文献[9]提出的基于 QEM 的三角形折叠简化方法,被广泛运用于模型简化,具有典型性。为反映本文所引入算法的简化效果,将文中提出的方法与文献[9]方法进行比较。简化效果比较,如图 6 所示。图 6(b)和 6(e)是采用文献[9]方法简化 95%后的茶壶模型,图 6(c)和 6(f)是运用文中所引入方法简化 95%之后的化油器模型,对比两者可以看出,后者的表面比前者的更加光滑平整,三角形间的过渡更为平滑,模型中的细小特征也保持得更好,而且简化后的模型未出现三角形翻转的现象。

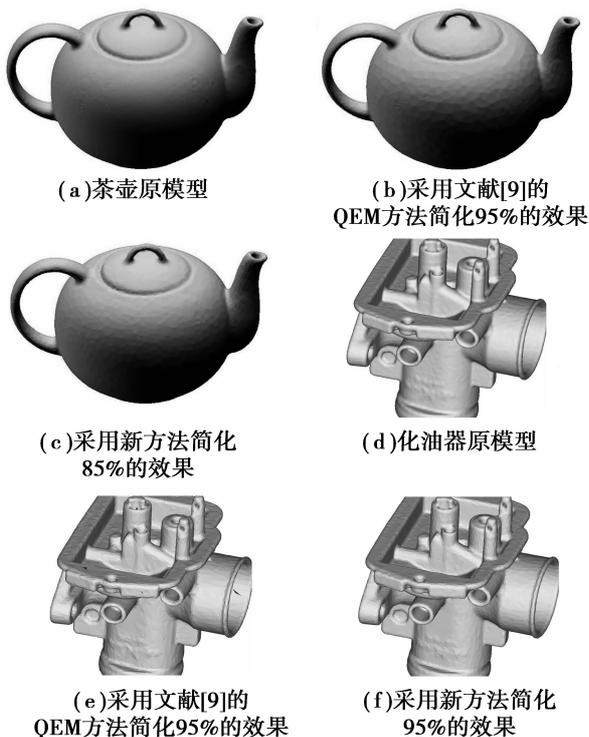


图 6 简化方法的效果比较

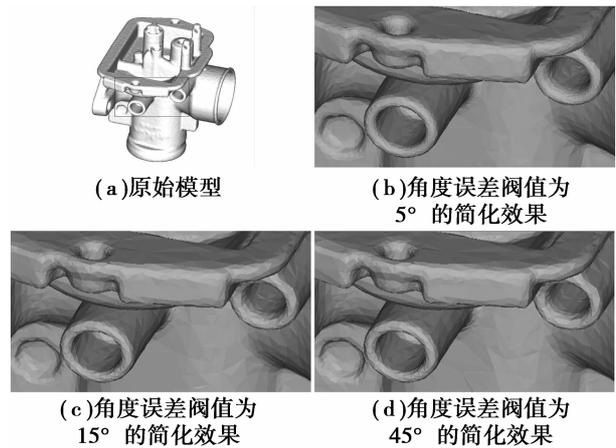


图 7 角度误差控制的效果比较

角度误差控制具有保持特征和防止面片翻转的作用,图 7 是反映的是取不同角度误差阈值情况下的化油器网格模型的简化效果。图中的实例距离误差阈值 L_i 都为 0.2 mm。图 7(b)、7(c)和 7(d)的角度误差阈值 α_i 分别为 5° 、 15° 和 45° 。通过对比图 7(b)和 7(c)可以看出,角度误差阈值较小时,网格模型的特征保持得更好,模型的表面也更为光滑。但是,如果将角度误差阈值设置的过小将影响网格简化的效率,反之,随着角度误差阈值的增大,角度误差控制对特征的保持作用将逐渐减弱,但仍能有效抑制面片的翻转。例如对比图 7(c)和 7(d),虽然前者在曲率较小网格区域相对光滑,但在曲率大的细小特征区域两者的区别并不大。因此,根据大量实验验证,一般将角度误差阈值设置在 5° 到 15° 之间可取得较好的简化效果。

6 结 论

文中的顶点预测方法,利用网格特征区域内顶点与其 SOT 三角形的连贯性特点来预测折叠点的位置,并用线性插值算子来对折叠点位置进行调节,有效地保持了模型的特征。根据折叠点到待折叠三角形的一阶邻域三角形的距离误差大小来判定三角形被折叠的优先次序。通过限制待折叠三角形的一阶邻域三角形法向量折叠前后的夹角来实现角度误差控制,保证模型的光滑。采用文中的误差控制方法可以有效地控制简化引起的距离误差和角度误差。实验结果表明,笔者引入的顶点预测方法和误差控制方法,能够很好地保持模型的特征,保证网格表面的光滑。

参考文献:

- [1] SCHROEDER W J, ZARGE J A, LORENSEN W E. Decimation of triangle meshes [J]. *Computer Graphics*, 1992, 26(2): 65-70.
- [2] COLOMBO A, CUSANO C, SCHETTINI R. Semantic 3D face mesh simplification for transmission and visualization [C]// *Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Multimedia and Expo*, July 9-12, Toronto, ON, Canada. [S. l.]: IEEE Computer Society, 2006: 157-160.
- [3] CHOI H K, KIM H S, LEE K H. A mesh simplification method using noble optimal positioning [J]. *Advances in Geometric Modeling and Processing*, 2008, 4975: 512-518.
- [4] BOUBEKEUR T, ALEXA M. Mesh simplification by stochastic sampling and topological clustering [J]. *Computers and Graphics Journal*, 2009, 33(3): 241-249.
- [5] HAMANN B. A data reduction scheme for triangulated surfaces [J]. *Computer Aided Geometric Design*, 1994, 11(2): 197-214.
- [6] TANG H, SHU H Z, DILLESEGER J L, et al. Moment-based metrics for mesh simplification [J]. *Computers and Graphics*, 2007, 31(5): 710-718.
- [7] CHEN H H, LUO X N, ZHOU S, et al. A novel approach for 3D mesh simplification [J]. *Journal of Information and Computational Science*, 2007, 4(1): 7-14.
- [8] GARLAND M, HECKBERT P S. Surface simplification using quadric error metrics [C]// *Proceedings of the 24th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, Aug. 3-8, 1997, Los Angeles, CA, USA. New York: ACM Press, 1997: 209-216.
- [9] 周昆, 潘志庚, 石教英. 基于三角形折叠的网格简化算法 [J]. *计算机学报*, 1998, 21(6): 506-513.
ZHOU KUN, PAN ZHI-GENG, SHI JIAO-YING. Mesh simplification algorithm based on triangle collapse [J]. *Chinese Journal of Computers*, 1998, 21(6): 506-513.
- [10] 周元峰, 张彩明, 贺平. 体积平方度量下的特征保持网格简化方法 [J]. *计算机学报*, 2009, 32(2): 203-212.
ZHOU YUAN-FENG, ZHANG CAI-MING, HE PING. Feature preserving mesh simplification algorithm based on square volume measure [J]. *Chinese Journal of Computers*, 2009, 32(2): 203-212.
- [11] COHEN STEINER D, ALLIEZ P, DESBRUN M. Variational shape approximation [J]. *ACM Transaction on Graphics*, 2004, 23(3): 905-914.
- [12] DIAZ GUTIERREZ P, BOSCH J, PAJAROLA R, et al. Streaming surface sampling using Gaussian ϵ -nets [J]. *The Visual Computer*, 2009, 25(5-7): 411-421.
- [13] 胡国飞, 彭群生. 基于顶点预测的特征保持网格光顺算法 [J]. *浙江大学学报: 工学版*, 2004, 38(12): 1535-1539.
HU GUO-FEI, PENG QUN-SHENG. Feature-preserving mesh smoothing algorithm based on vertex estimation [J]. *Journal of Zhejiang University: Engineering Science*, 2004, 38(12): 1535-1539.
- [14] 神会存, 李建华, 周来水. 三角网格模型顶点法矢与离散曲率计算 [J]. *计算机工程与应用*, 2005, 41(26): 12-15.
SHEN HUI-CUN, LI JIAN-HUA, ZHOU LAI-SHUI. Estimation of triangular mesh vertex normal vector and discrete curvature [J]. *Computer Engineering and Applications*, 2005, 41(26): 12-15.
- [15] 神会存, 周来水, 安鲁陵, 等. 曲面三角网格模型顶点法矢计算与交互式分割 [J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2005, 17(5): 1030-1034.
SHEN HUI-CUN, ZHOU LAI-SHUI, AN LU-LING, et al. Vertex normal calculation on interactive segmentation of triangle mesh [J]. *Journal of Computer-aided Design & Computer Graphics*, 2005, 17(5): 1030-1034.
- [16] 尹旺中, 周来水, 神会存, 等. 基于三角片法矢调整的三角网格模型光顺 [J]. *机械科学与技术*, 2006, 25(4): 410-414.
YIN WANG-ZHONG, ZHOU LAI-SHUI, SHEN HUI-CUN, et al. Triangle mesh smoothing based on triangle normal vector modification [J]. *Mechanical Science and Technology*, 2006, 25(4): 410-414.
- [17] 阎树田, 李清泉, 沙成梅. 三维测量数据的一种三角网格精简方法的研究 [J]. *兰州理工大学学报*, 2007, 33(1): 40-43.
YAN SHU-TIAN, LI QING-QUAN, SHA CHENG-MEI. Research of a method for three-dimensional measured data reduction with triangular meshes [J]. *Journal of Lanzhou University of Technology*, 2007, 33(1): 40-43.
- [18] RAMAN S, WENGER R. Quality isosurface mesh generation using an extended marching cubes lookup table [J]. *Computer Graphics Forum*, 2008, 27(3): 791-798.

(编辑 张小强)