

文章编号: 1000-582X(2012)06-043-05

# 速度相关摩擦力条件下曲面接触问题有限元分析

唐进元<sup>a,b</sup>, 周 炜<sup>a,b</sup>, 陈思雨<sup>a,b</sup>

(中南大学 a. 高性能复杂制造国家重点实验室; b. 机电工程学院, 湖南 长沙 410083)

**摘 要:** 在弹性范围内对速度相关摩擦力条件下的曲面接触问题进行研究, 给出有限元混合求解方法, 用 FORTRAN 编制计算程序, 并以直齿圆柱单齿对啮合模型为例在平面应力和准静态条件下进行求解, 计算结果表明: 速度对摩擦力的作用影响到接触力的分布与啮合节点对的接触状态, 考虑速度对摩擦的影响对于接触的准确求解是必要的。用 Ansys 对所给算例进行验证, 结果表明本文算法和编制程序的正确性。

**关键词:** 接触; Stribeck 摩擦模型; 有限元混合法

**中图分类号:** TH132.417

**文献标志码:** A

## Analysis of frictional contact problem for curved surface coupling with velocity using finite element algorithm

TANG Jin-yuan<sup>a,b</sup>, ZHOU Wei<sup>a,b</sup>, CHEN Si-yu<sup>a,b</sup>

(a. State Key Laboratory of High-performance Complex Manufacturing; b. School of Mechanical and Electrical Engineering, Central South University, Changsha 410083, Hunan, P. R. China)

**Abstract:** The mixed finite element algorithm is used to solve contact problems coupling with friction decided by velocity for curved surface in elastic field. The computational procedure is designed with the aid of Fortran language, and the technique is employed to account for the contact problems of one pair of meshing teeth in the plane stress and quasi-static situation. The result indicates that the influence of velocity on friction affects the distribution of contact force as well as the meshing node pair's contact status, and the consideration of the relation between velocity and friction is essential for the contact problem solutions. Ultimately the example is validated by the Ansys software.

**Key words:** contact; Stribeck friction model; the mixed finite element algorithm

曲面接触问题普遍存在于日常生活和工业生产中, 如人体关节之间的运动, 齿轮啮合传动等等。两曲面接触问题的研究是机械科学领域的基础研究工作, 该问题的研究对掌握复杂曲面的疲劳寿命机理、探索曲面零件工作时的振动噪声与曲面微观结构规律等有较大意义。

当接触的两曲面沿接触面有相对运动或相对运

动趋势时, 会在接触面间产生摩擦力。最初的接触分析从材料力学和弹性力学原理出发, 旨在获得封闭的解析规律<sup>[1-2]</sup>, 对接触体间的摩擦效应通常不予考虑。随后兴起的接触问题数值解法<sup>[3]</sup>考虑到了物体接触时的摩擦作用, 不过处理时认为摩擦力是与速度无关的<sup>[4-5]</sup>。针对物体接触时的干摩擦情形, 文献<sup>[6]</sup>提到一种非线性 Stribeck 摩擦模型, 认为摩擦力与接触体间的相对切向速度有关。文献<sup>[7]</sup>就不

收稿日期: 2012-01-18

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(973 计划)资助项目(2011CB706800)

作者简介: 唐进元(1962-), 男, 中南大学教授, 主要从事齿轮动力学、数字化制造研究, (Tel)0731-88877746;  
(E-mail) jytangcsu@163.com。

同接触条件下 Stribeck 摩擦和其它摩擦模型进行了对比分析。由于接触体间的相对切向速度与摩擦力相关,因此物体接触时的相互作用也会受其相对切向速度的影响。

目前在 ABQUES 等商用软件中,可以采用用户自定义函数描述速度与摩擦系数的关系,然后采用拉格朗日<sup>[8-10]</sup>或罚函数法<sup>[11-13]</sup>进行求解,但是基于 Stribeck 摩擦模型的接触分析文献却尚未见到。作者进行算法研究、自编程序计算等工作的目的在于针对含表面形貌性能要求的螺旋锥齿轮等复杂曲面零件特定对象,形成自己的计算软件包,便于特定问题的处理。

有限元混合法是由大连理工大学的陈万吉教授于 1981 年提出的一种处理接触问题的有限元方法<sup>[14]</sup>,后来重庆大学的李润方等人针对此法也进行了研究<sup>[15]</sup>。文中基于有限元混合法原理,编制程序对速度相关摩擦力条件下的曲面接触问题在线弹性范围内进行探讨,并以直齿圆柱齿轮单对轮齿啮合为例,求解平面应力特征和准静态条件下接触齿对间的相对切向速度对接触力以及节点接触状态的影响,最后用 Ansys 对所给算例进行验证。

## 1 接触问题中速度相关摩擦力接触模型的求解原理

具有相对切向速度的两接触体  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$  接触示于图 1,其中 CP 为接触点,  $v_r$  为接触点对的相对切向速度。接触体  $\Omega_i$  在  $t$  时刻的动力平衡方程为

$$m_i \mathbf{a}_{i(t)} + \mathbf{c}_i \mathbf{v}_{i(t)} + \mathbf{k}_{i(t)} \boldsymbol{\delta}_{i(t)} = \mathbf{P}_{i(t)} + \mathbf{F}_{i(t)}, (i = 1, 2). \quad (1)$$

式中  $m, c, k$  分别为接触体的质量, 阻尼和刚度矩阵;  $a, v, \delta$  分别为接触体的加速度, 速度和位移矢量;  $P, F$  分别为接触体的外载和接触力矢量。

根据文献[6],两接触体的相对切向速度  $v_r$  与摩擦系数  $\mu$  对应的关系见图 2,其中  $v_m$  为摩擦系数  $\mu$  取极小值  $\mu_m$  时对应的相对速度,  $\mu_s$  为相对速度为 0 时的摩擦系数。由于接触体的相对切向速度  $v_r$  随时间变化,对应时刻的摩擦系数  $\mu$  也随之改变,反映到动力平衡方程式(1)中的接触力矢量便成为速度的函数。

求解时首先根据上一时刻的速度确定当前时刻对应的摩擦系数,通过接触算法求得接触力矢量  $F$ ,再应用动力平衡方程的解法如 Newmark- $\beta$  法对方程(1)进行求解得到当前时刻的位移、速度与加速度,更新摩擦系数,继续循环求解。

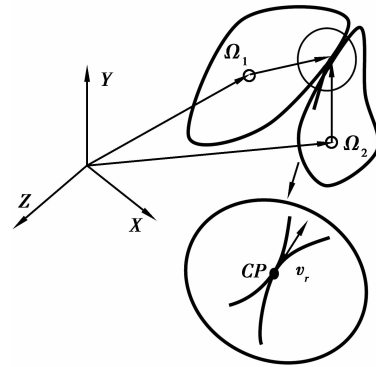


图 1 具有相对切向速度的两物体接触

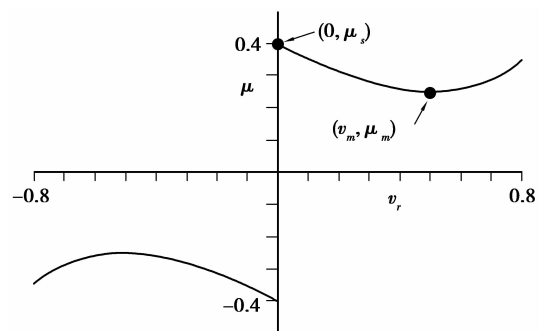


图 2 摩擦系数  $\mu$  随相对切向速度  $v_r$  变化曲线

## 2 曲面接触问题的有限元混合方法求解步骤

有限元混合法是将系统的刚度方程凝缩到接触边界,形成关于接触内力的柔度方程,整个接触迭代过程只需修改柔度矩阵,通过迭代求解直至解答与假设的接触状态相符,具体计算步骤如下:

1)几何建模与网格划分。为了反映接触曲面的特点,划分网格时选择相应阶次的等参元及足够数目的单元逼近曲面的几何形状。

2)形成系统质量矩阵  $m$ , 阻尼矩阵  $c$ , 刚度矩阵  $k$ 。

3)计算等效节点力:将两接触体上的力(包括惯性力、阻尼力和外载)等效为节点载荷。

4)计算假设接触节点对的初始间隙。

5)计算外载引起的接触点对相对间距:置接触力为 0 求解刚度方程得到。

6)形成系统柔度矩阵:置外载为 0, 分别在各个接触点对自由度上施加成对单位载荷求得接触点对各个自由度上的相对间距,并组装为系统柔度矩阵。

7)假设接触点对的接触状态,由当前时刻速度对应的摩擦系数结合接触定解条件,在接触点对局

部坐标系下求解接触点对相对间距方程。

8) 迭代求解至结果与假设状态相符。

当不计方程(1)中的惯性及阻尼项时,仍考虑当前时刻速度对摩擦的影响,原方程退化为准静态平衡方程(2)

$$k_{i(t)} \delta_{i(t)} = P_{i(t)} + F_{i(t)}, (i = 1, 2). \quad (2)$$

方程(2)的求解类似于方程(1)的解答,此时只需形成刚度矩阵,在计算步骤 2)中忽略惯性与阻尼力,同时在求解步骤 4)和 5)时若出现刚体位移,则需要作刚体位移处理,再结合整体平衡条件求解平衡方程(2)。上述求解均未考虑塑性变形及摩擦引起不可逆性的影响,当计及这些因素时,需要采用分级加载并借助增量法求解,在此不再论述。

### 3 曲面接触问题的有限元混合程序编制

利用有限元混合法编制程序求解曲面接触问题,主要包括前处理、求解和后处理 3 个部分,各部分的功能为:

1) 前处理。包括选择合适单元和数目进行网格划分,几何材料信息输入,节点单元信息处理,质量、阻尼与刚度矩阵的计算,应变与应力矩阵的计算。

2) 求解。线性方程组的求解(根据假设接触节点对其接触状态,利用高斯消元法求解刚度方程获得系统柔度矩阵,求解接触节点对的相对间距方程,求解系统的总位移场)。

3) 后处理。由位移和应力应变矩阵求得系统的应力应变,数据结果文件的输出,求解结果的云图或等值线显示,其它分析功能扩展。

其中,曲面接触问题的有限元混合程序编制关键技术主要有:

1) 几何建模及其网络的自动划分,包括控制所选单元对曲面几何特征的模拟,同时生成用于求解的节点单元信息文件。

2) 接触搜索算法,求解可能接触节点对的柔度矩阵及可能出现的刚体位移的处理。

3) 有限元求解接触算法,局部坐标系下迭代求解接触点对的相对间距方程,直至求解结果与假设状态符合。

4) 程序的后处理,包括结果图像显示,对结果数据进行分析提取。

5) 高效率算法及其稳定性的实现,对于大规模问题考虑其动态、塑性等复杂条件时保证算法的高效率及稳定性是程序编制的意义所在。

6) 程序的可扩展性,与其它应用程序接口的

实现。

## 4 算例

利用编制的有限元程序,以直齿圆柱齿轮单对轮齿啮合为例,在平面应力特征和准静态条件下求解,探讨接触齿对间的相对切向速度对接触力和节点接触状态的影响。

### 4.1 单齿啮合有限元模型

齿轮啮合单齿接触有限元模型如图 3 所示,用三角形单元离散并细化可能接触区的网格,其边界截取范围及约束方式参看文献[16]。图中  $\Omega_1$ 、 $\Omega_2$  分别表示主从动轮的啮合轮齿, $\Omega_1$  划分为 81 个节点、128 个单元, $\Omega_2$  划分为 84 个节点、128 个单元; $q$  为主动轴上扭矩等效到  $\Omega_1$  圆形边界上的均布载荷,且  $q=1\ 000\ \text{N/mm}$ ;约束  $\Omega_1$  圆形边界上节点的径向自由度和  $\Omega_2$  两侧面及底面上节点的所有自由度。主从动轮几何、材料参数相同并取为如下:齿数  $Z=61$ ,模数  $m=4$ ,齿宽  $B=40\ \text{mm}$ ,弹性模量  $E=2.1 \times 10^5\ \text{MPa}$ ,泊松比  $\mu=0.3$ 。

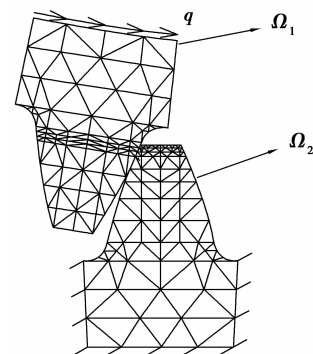


图 3 单齿啮合有限元模型

采用图 2 中论述的相对切向速度与摩擦系数的关系,取相对速度  $v_r$  分别为 0、0.1、0.3、0.5 和 0.7 m/s,对应的摩擦系数是 0.4、0.355 6、0.281 2、0.25 和 0.290 8;同时为比较分析 Stribeck 摩擦和库伦摩擦对接触的影响,取库伦摩擦系数为  $\mu_s=0.4$ ,应用有限元混合法求解。

### 4.2 结果验证与分析

#### 4.2.1 结果验证

为验证文中有限元混合算法求解的有效性,在 Ansys 中建立同样的单齿接触模型,调用增广的拉格朗日乘法,法向接触刚度因子设为 1 000 进行求解。二者在啮合齿对相对切向速度为 0 时(摩擦系数  $\mu_s=0.4$ )的计算结果对比见表 1,相对切向速度为 0.3 m/s 时的计算结果见表 2。

从表 1 和表 2 可知,2 种方法在接触区域均得到两个接触点对,且接触点对的接触内力大小相近,接触状态相符,由此表明文中有限元混合算法求解齿轮接触的算例是可信的。

表 1 有限元混合算法与 Ansys 计算结果对比( $v_r=0$ )

算法名	接触点对 1			接触点对 2		
	法向接触力/N	切向摩擦力/N	接触状态	法向接触力/N	切向摩擦力/N	接触状态
有限元混合法	-4 050.3	1 293.4	连续	-7 651.2	1 718.8	连续
Ansys	-4 056.9	1 296.8	连续	-7 663.5	1 679.1	连续

表 2 有限元混合算法与 Ansys 计算结果对比( $v_r=0.3$  m/s)

算法名	接触点对 1			接触点对 2		
	法向接触力/N	切向摩擦力/N	接触状态	法向接触力/N	切向摩擦力/N	接触状态
有限元混合法	-3 636.2	1 022.5	滑动	-6 859.1	1 668.7	连续
Ansys	-4 044.4	1 137.3	滑动	-7 649.7	1 746.9	连续

4.2.2 结果分析

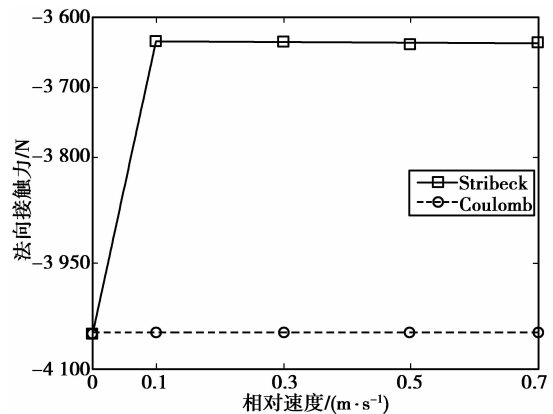
利用有限元混合法对建立的单齿啮合模型进行求解,计算所得接触区接触点对接触状态与啮合齿对的相对切向速度的关系见表 3。分析可知,由于啮合齿对相对切向速度的变化引起摩擦系数改变,使得接触点对的接触状态呈现变化。当啮合齿对相对切向速度引起摩擦系数变大时,接触点对趋于连续的接触状态,同理,啮合齿对相对切向速度对应的小摩擦系数使接触点对趋于滑动,这是因为较小的摩擦系数导致静摩擦转入动摩擦的极限摩擦力变小,故小摩擦系数条件下接触点对易于滑动。

啮合齿对相对切向速度对接触点对间接触内力和齿对间接接触合力的影响,以及 Stribeck 摩擦模型和库伦摩擦模型的对比结果示于图 4—5,其中法向接触力为负表示压力。由图可见,Stribeck 摩擦和库伦摩擦条件下的接触力分布有所不同;Stribeck 摩擦条件下,啮合齿对相对切向速度通过影响摩擦系数而对接触点对间的接触内力以及齿对间接合力产生影响;不同接触点对间的摩擦力随摩擦系数的变化规律不一样,但法向压力变化趋于一致,并且可以看出,在相对切向速度从 0 变化到 0.1 m/s 时,法向接触力变小,这是因为与其抗衡的摩擦力矩变小的缘故;另外啮合齿对间的摩擦合力随摩擦系数

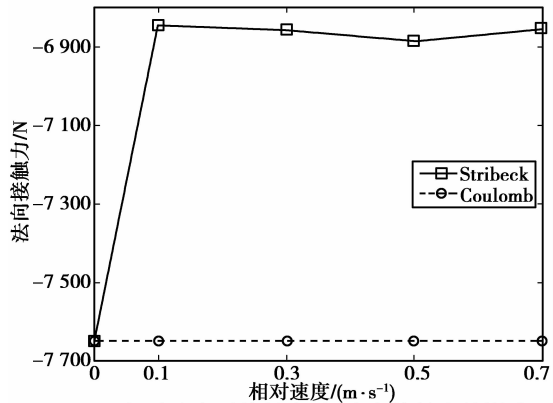
增大呈递增的趋势。

表 3 接触点对接触状态与啮合齿对相对切向速度的关系

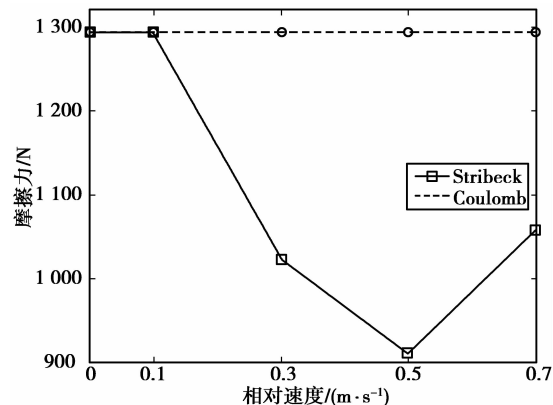
相对速度(摩擦系数)	接触点对 1	接触点对 2
0(0.4)	连续	连续
0.1(0.355 6)	滑动	连续
0.3(0.281 2)	滑动	连续
0.5(0.25)	滑动	滑动
0.7(0.290 8)	滑动	连续



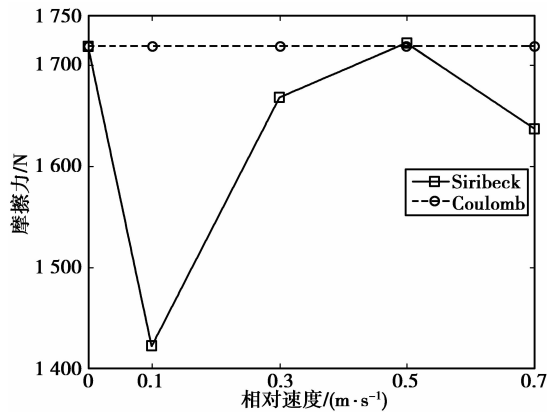
(a) 相对速度对接触点对1法向接触力的影响



(b) 相对速度对接触点对2法向接触力的影响

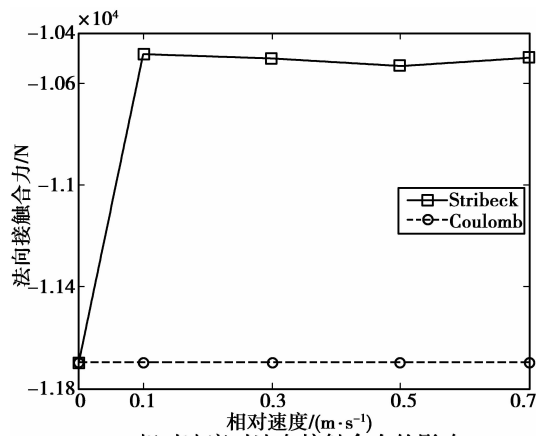


(c) 相对速度对接触点对1切向摩擦力的影响

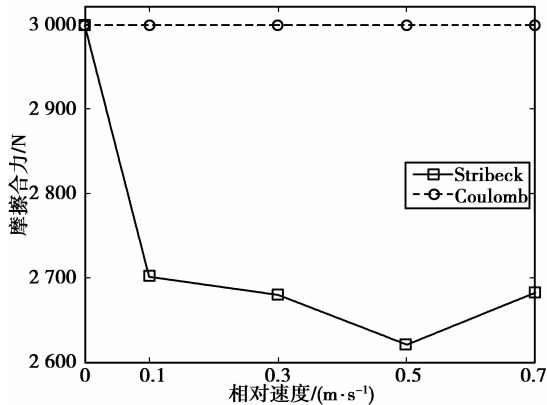


(d) 相对速度对接触点对2切向摩擦力的影响

图 4 啮合齿对相对切向速度对接触点对间接触内力的影响



(a) 相对速度对法向接触合力的影响



(b) 相对速度对切向摩擦合力的影响

图 5 啮合齿对相对切向速度对接触合力的影响

## 5 结 论

利用有限元混合法解决了速度相关摩擦力条件下的曲面接触数值计算问题,并以直齿圆柱齿轮接触为例在平面应力和准静态条件下进行计算,得到一些有参考价值的结果,结论如下:

1) Stribeck 摩擦和库伦摩擦条件下的接触力分布有所不同, Stribeck 摩擦模型反映了接触体相对

切向速度对摩擦系数的影响,能更准确地描述物体之间的接触;

2) 接触体间的相对切向速度影响接触点对的接触状态和接触力分布,这种影响源于摩擦系数随接触体间相对切向速度变化而作的改变。当接触体间相对切向速度引起摩擦系数改变时,不同接触点对间的摩擦力变化趋势不同,而法向压力变化趋于一致。此外,接触体间相对切向速度引起摩擦系数增大时,接触体间的摩擦合力增大,而接触点对滑动趋势减弱;

3) 通过 Ansys 软件的验证,表明本文的接触问题有限元分析与程序编制是成功的,研究工作是动态、塑性、速度相关摩擦力条件下的曲面接触问题研究的前期准备。

## 参考文献:

- [1] ANTOINE J F, VISA C, SAUVEY C, et al. Approximate analytical model for Hertzian elliptical contact problems [J]. *Journal of Tribology*, 2006, 128 (3): 660-664.
- [2] MA L F, KORSUNSKY A M. Analytical solution for sliding rounded-edge contact [J]. *Journal of Elasticity*, 2006, 82(1): 9-30.
- [3] 韩青, 张毅刚, 赵凯红. 结构工程中接触问题的数值计算方法 [J]. *北京工业大学学报*, 2006, 32 (4): 321-326.
- [4] HAN QING, ZHANG YI-GANG, ZHAO KAI-HONG. A numerical method of the contact problems in structural engineering [J]. *Journal of Beijing University of Technology*, 2006, 32(4): 321-326.
- [5] TAMAI T. Friction and contact resistance through true contact interface [J]. *IEICE Transactions on Electronics*, 2006, 89(8): 1122-1128.
- [6] IVANOCHKIN P G, KOLESNIKOV V I, FLEK B M, et al. Contact strength of a two-layer covering under friction forces in the contact region [J]. *Mechanics of Solids*, 2007, 42(1): 157-165.
- [7] THOMSEN J J, FIDLIN A. Analytical approximations for stick - slip vibration amplitudes [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2003, 38 (3): 389-403.
- [8] ANDERSSON S, SODERBERG A, BJORKLUND S. Friction models for sliding dry, boundary and mixed lubricated contacts [J]. *Tribology International*, 2007, 40(4): 580-587.

(下转第 52 页)

- of radiation problems in EMC[C]//Proceedings of the 9th International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory, Oct. 11-14, 2004, Tbilisi, Georgia. [S.l.]: IEEE Press, 2004: 65-68.
- [8] ALA G, DI PIAZZA M C, TINE G, et al. Evaluation of radiated EMI in 42-V vehicle electrical systems by FDTD simulation [J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2007, 56(4): 1477-1484.
- [9] SALIO S, CANAVERO F, LECOINTE D, et al. Crosstalk prediction on wire bundles by Kriging approach [C] // Proceedings of IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility, Aug. 21-25, 2000, Washington, DC, USA. [S.l.]: IEEE Press, 2000, 1:197-202.
- [10] LIU G P, POMMERENKE D J, DREWNIAK J L, et al. Anticipating vehicle-level EMI using a multi-step approach [C] // Proceedings of the 2003 IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility, Aug. 18-22 2003, Boston, MA, USA. [S.l.]: IEEE Press, 2003, 1: 419-424.
- [11] SUN S S, LIU G P, DREWNIAK J L, et al. Hand-assembled cable bundle modeling for crosstalk and common-mode radiation prediction [J]. IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, 2007, 49(3): 708-718.
- [12] WU M L, BEETNER D, HUBING T, et al. Estimation of the statistical variation of crosstalk in wiring harnesses [C] // Proceedings of IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility, Aug. 18-22, Detroit, MI, USA. [S.l.]: IEEE Press, 2008: 1-7.
- [13] WU M L, BEETNER D G, HUBING T H, et al. Statistical prediction of "reasonable worst-case" crosstalk in cable bundles [J]. IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility 2009, 51(3): 842-850.
- [14] 孙佳伟, 张敏. 汽车电缆线束的电磁兼容仿真分析[DB/OL]. (2006). <http://www.cst-china.cn>.
- [15] SMITH W T, PAUL C R, SAVAGE J S, et al. Crosstalk modeling for automotive harnesses [J]. IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility, Aug. 22-26, 1994, Chicago, IL, USA. [S.l.]: IEEE Press, 1994: 447-452.
- [16] BELLAN D, PIGNARI S A. Estimation of crosstalk in nonuniform cable bundles [C] // Proceedings of the 2005 IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility, Aug. 8-12, 2005, Chicago, IL, USA. [S.l.]: IEEE Press, 2005, 2: 336-341.

(编辑 张小强)

~~~~~

(上接第 47 页)

- [8] GONZALEZ J A, PARK K C, FELIPPA C A. Partitioned formulation of frictional contact problems using localized lagrange multipliers [J]. Communications in Numerical Methods in Engineering, 2006, 22(4): 319-333.
- [9] GONZALEZ J A, PARK K C, FELIPPA C A, et al. A formulation based on localized lagrange multipliers for BEM-FEM coupling in contact problems[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2008, 197(6-8): 623-640.
- [10] YANG T S, SPILKER R L. A lagrange multiplier mixed finite element formulation for three-dimensional contact of biphasic tissues[J]. Journal of Biomechanical Engineering, 2007, 129(3): 457-471.
- [11] AHN J, STEWART D E. An euler-bernoulli beam with dynamic frictionless contact; penalty approximation and existence[J]. Numerical Functional Analysis and Optimization, 2007, 28 (9-10): 1003-1026.
- [12] KESHAVARZ S, KHOEI A R, KHALOO A R. Contact friction simulation in powder compaction process based on the penalty approach [J]. Materials and Design, 2008, 29(6): 1199-1211.
- [13] KHOEI A R, TAHERI MOUSAVI S M. Modeling of large deformation - large sliding contact via the penalty X-FEM technique [J]. Computational Materials Science, 2010, 48(3): 471-480.
- [14] 陈万吉. 弹性接触问题有限元分析的一个新方法[J]. 机械工程学报, 1981, 9(4): 43-54.  
CHEN WAN-JI. A new method for analysis of elastic contact problems using finite element methods [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 1981, 9 (4): 43-54.
- [15] 林腾蛟, 李润方, 陶泽光. 齿轮传动三维间隙非线性冲击—动力接触特性数值仿真[J]. 机械工程学报, 2000, 36(6): 55-58.  
LIN TENG-JIAO, LI RUN-FANG, TAO ZE-GUANG. Numerical simulation of 3-D gap type nonlinear dynamic contact-impact characteristics for gear transmission[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2000, 36(6): 55-58.
- [16] 李润方. 齿轮传动的刚度分析和修形方法[M]. 重庆: 重庆大学出版社, 1998.

(编辑 张小强)