

文章编号: 1000-582X(2012)11-034-06

# 威布尔分布随机载荷下齿轮弯曲疲劳试验分析

胡建军<sup>1,2a</sup>, 许洪斌<sup>2b</sup>, 高孝旺<sup>2b</sup>, 祖世华<sup>2b</sup>

(1. 重庆大学 机械工程学院, 重庆 400044; 2. 重庆理工大学 a. 材料科学与工程学院;  
b. 汽车零部件制造及检测技术教育部重点实验室, 重庆 400054)

**摘要:** 根据齿轮传动过程中普遍承受的三参数威布尔分布载荷谱, 编制了试验用随机变幅疲劳载荷谱, 在 MTS 电液伺服疲劳试验机上利用成组试验方法完成了该随机载荷作用下齿轮弯曲疲劳试验, 得到了特定变异系数三参数威布尔分布载荷谱下齿轮弯曲强度的 S-N 曲线。试验结果证明, 在服从三参数威布尔分布随机载荷谱下, 随机变幅疲劳试验得出的轮齿疲劳寿命远低于恒载疲劳试验得出的疲劳寿命。对随机载荷下的齿轮设计的疲劳极限的理论值进行了预测, 并与试验结果进行了比较。随机载荷下的理论值与试验结果相吻合, 因此可以通过随机载荷谱的载荷比例系数去推断随机载荷下齿轮弯曲疲劳强度值。

**关键词:** 齿轮; 随机载荷; 弯曲疲劳; 威布尔分布

**中图分类号:** TH132.4; TH122

**文献标志码:** A

## Experimental study of gear bending fatigue strength under random load according to three-parameter Weibull distribution

HU Jianjun<sup>1,2a</sup>, XU Hongbin<sup>2b</sup>, GAO Xiaowang<sup>2b</sup>, ZU Shihua<sup>2b</sup>

(1. College of Mechanical Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China;  
2a. College of Material Science and Engineering; 2b. Key Laboratory of Manufacture and Test Techniques for Automobile Parts, Ministry of Education, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054, China)

**Abstract:** Random-amplitude fatigue load spectrum for experiments is made according to the ubiquitous three-parameter Weibull distribution in gear transmission. Gear bending fatigue test under the random load is carried out on a MTS electro-hydraulic servo material fatigue tester by using group testing method, and the S-N curve of gear bending strength under three-parameter Weibull distribution with specific variation coefficients is obtained. The fatigue test results show the gear's endurance life under random load is far less than that under constant load when the load submits to three-parameter Weibull distribution random load spectrum. The theoretical value of fatigue limit for gear under random load is predicated and compared with test results. The theoretical value is in accordance with the test results. Therefore, the fatigue strength of gear bending under random load can be deduced according to the load ratio coefficient of random load spectrum.

**Key words:** gear; random load; bending fatigue; Weibull distribution

**收稿日期:** 2012-06-28

**基金项目:** 国家科技支撑计划资助项目(2006BAA01A12)

**作者简介:** 胡建军(1974-), 男, 副教授, 重庆大学博士研究生, 从事模具 CAD/CAM、数字化制造及表面工程技术研究。  
许洪斌(联系人), 男, 重庆理工大学教授, 博士, (E-mail) cqxuhb@yahoo.com。

齿轮传动具有效率高、结构紧凑、传动比准确、承载能力高、寿命长等优点,是装备中应用极为广泛的主要机械传动形式。在齿轮传动系实际工作中,承受冲击载荷、磨损等各种复杂的随机载荷,故障发生率很高,如传动齿的疲劳断齿等。这些齿轮所承受的是大量不可重复的动态随机载荷。因此在设计和使用过程中尽管安全系数足够,仍会出现很多典型的破坏。因此在设计的最初阶段,对于随机载荷的进行分析十分必要<sup>[1]</sup>。

随机载荷条件下齿轮寿命预测和疲劳设计的关键是载荷谱的分析。典型的载荷谱包含工作状况的全部载荷信息,但其交流困难,不能直接用于齿轮传动零件的疲劳寿命分析和疲劳设计,只能使用统计方法进行描述。对于齿轮的疲劳强度和可靠性设计而言,最主要的是幅值的变化,常用的统计方法是计数法<sup>[2]</sup>。

目前,齿轮随机变幅弯曲疲劳试验相关文献也很少。Anno 等<sup>[3]</sup>研究了随机载荷下 Miner 疲劳累积理论应用在齿轮上的有效性,但是他们的研究结果认为 Miner 能否应用于齿轮疲劳寿命的计算需要进一步的研究。Hanumanna 等<sup>[4]</sup>研究制作了用于随机载荷下齿轮弯曲疲劳试验的试验台,并进行了两种随机载荷和恒载荷下齿轮的弯曲疲劳试验,与基于 Miner 理论的计算结果进行了比较,恒载荷疲劳试验结果与理论结果吻合较好,但随机载荷疲劳试验的结果与理论分析结果相差较大。Hanumanna 在试验中仅对每种工况选取了一个试件进行试验,没有考虑试件分散性的影响,这样得出的结果缺乏足够的可靠性。

随机载荷可以看作是连续的随机变量,对齿轮而言,其分布形式可分为正态分布、指数分布、三参数威布尔分布及极值分布等。而三参数威布尔分布可以看作随机变量较普遍分布形式。这里对威布尔分布随机载荷作用下齿轮轮齿的弯曲疲劳性能开展试验研究,得到试验结果,对试验数据进行分析,并将试验结果和理论结果进行了比较<sup>[5-6]</sup>。

## 1 随机载荷下的等效当量载荷

### 1.1 等效当量载荷

随机载荷与循环载荷是两类性质完全不同的载荷。对于损伤累积的效应来说,虽然在瞬时或较长时间间隔内二者造成的损伤不同,但从总的效果来看,两类载荷作用下的最终结果都将导致构件的损伤达到临界值而发生失效,因此研究循环载荷与随机载荷对疲劳损伤的等效性具有明显的现实意义。文献<sup>[7]</sup>利用 Miner 线性疲劳累积损伤理论和

齿轮材料的 P-S-N 曲线,推导了随机载荷为连续分布时的等效当量载荷的表达式为

$$F_{10} = \left( \int_{\sigma_{\min}}^{\sigma_{\max}} f(\sigma) \cdot [F(\sigma)]^m \right)^{\frac{1}{m}}, \quad (1)$$

式中:  $f(\sigma)$  为随机载荷的概率密度函数;  $m$  为材料指数。

### 1.2 载荷比例系数

随机载荷服从三参数威布尔分布,其概率密度函数为

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \left( \frac{x - \epsilon}{\beta} \right)^{\alpha-1} \cdot e^{-\left(\frac{x-\epsilon}{\beta}\right)^\alpha}, \quad (2)$$

式中:  $\alpha$  为载荷谱的形状参数;  $\beta$  为载荷谱的尺度参数;  $\epsilon$  为载荷谱的位置参数。

当随机载荷服从三参数威布尔分布时,载荷谱的均值载荷为  $\mu$ , 等效力为  $S_D$ , 即  $F_{10}$ 。定义载荷比例系数  $k$ , 则

$$k = \frac{S_D}{\mu} = \frac{\left( \int_{\sigma_{\min}}^{\sigma_{\max}} f(\sigma) \cdot [F(\sigma)]^m \right)^{\frac{1}{m}}}{\mu}. \quad (3)$$

载荷比例系数  $k$  反映了随机载荷的等效载荷与均值载荷之间的偏离程度。

随机载荷可以看作是在载荷时间历程中, 载荷幅值围绕某一均值载荷上下波动, 可以通过采集载荷谱, 利用参数估计方法确定载荷分布参数。对于随机载荷服从三参数威布尔分布, 利用参数估计法确定随机载荷的形状参数  $\alpha$ , 位置参数和尺度参数  $\beta$ <sup>[8]</sup>。

确定三参数威布尔分布参数后, 载荷谱的均值载荷  $\mu$  的计算式为

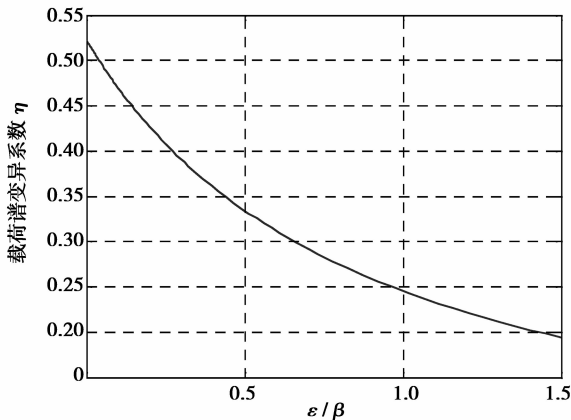
$$\mu = \epsilon + \beta \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right). \quad (4)$$

载荷谱的方差  $\delta$  为

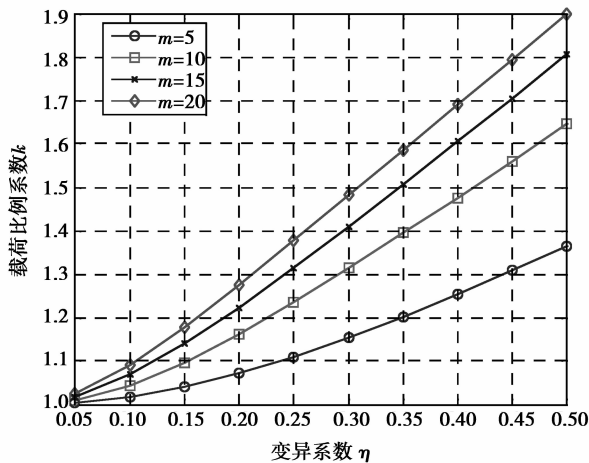
$$\delta = \beta \sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)}. \quad (5)$$

它反映了载荷谱总体载荷偏离均值载荷的程度, 其中  $\Gamma$  为伽马函数, 只与载荷谱的形状参数有关。定义变异系数  $\eta = \delta/\mu$ , 它反映了载荷的波动程度。

变异系数  $\eta$  可以表示为形状参数、位置参数和尺度参数的函数, 形如  $\eta = f(\alpha, \beta, \epsilon)$ 。如果形状参数一定, 该式可变形为  $\eta = f(\epsilon/\beta)$ , 即变异系数  $\eta$  为参数  $\epsilon/\beta$  比值的单值函数。图 1 表示变异系数  $\eta$  随参数  $\epsilon/\beta$  的变化规律, 变异系数  $\eta$  随着  $\epsilon/\beta$  比值的增大而减小, 即载荷谱的波动程度随参数  $\epsilon/\beta$  比值的增大而减小。随机载荷的参数变化对载荷谱的波动程度有很大影响, 也就是对齿轮的寿命有很大影响。

图 1 变异系数随  $\varepsilon/\beta$  的变化 ( $\alpha=2$ )

载荷谱的变异系数和载荷比例系数均反映了载荷的波动程度,图 2 建立了载荷比例系数  $k$  和载荷谱变异系数  $\eta$  之间的关系曲线。随着变异系数  $\eta$  (载荷的波动程度) 的增大,载荷比例系数  $k$  越大。当变异系数一定时,材料常数  $m$  越大,载荷比例系数越大<sup>[9]</sup>。

图 2 载荷比例系数随变异系数  $\eta$  的变化 ( $\alpha=2$ )

## 2 试验方案

### 2.1 试验齿轮及热处理

试验齿轮参数按照《齿轮弯曲疲劳强度试验方法》(GB/T 1430—1993) 设计。渐开线齿轮,模数  $m=3$  mm,齿数  $z=19$ ,齿宽  $b=12$  mm,节圆压力角  $\alpha=20^\circ$ ,螺旋角  $\beta=0^\circ$ ,变位系数  $x=0$ ,齿高  $h=1.25$  m,  $a_0=0.3$  m,齿根圆角  $\rho_{a0}=0.3$  m,齿根圆角粗糙度  $Rz \leq 10$   $\mu\text{m}$ ,精度等级为 GB10095 的 7 级。

齿轮材料 20CrMnMo,热处理工艺为渗碳淬火,齿面硬度 58~62HRC,芯部硬度 30~42HRC。

### 2.2 试验平台及方法

1) 试验采用常规成组试验法,试验取 4 个应力级,每个应力级不少于 5 个试验点,最低应力级至少

有一个试验点越出(即  $\geq 3 \times 10^6$  次),试验采用双齿加载形式。

2) 恒载试验在 PLG-200 高频疲劳试验机上进行(如图 3 所示),随机载荷下的轮齿试验在 MTS 公司生产的 MTS880 电液伺服材料疲劳试验机上进行(如图 4 所示)。负荷满量程为  $\pm 500$  kN,负荷加载精度  $\leq \pm 0.5\%$ ,根据试件的不同加载频率范围为 0.1~200 Hz。

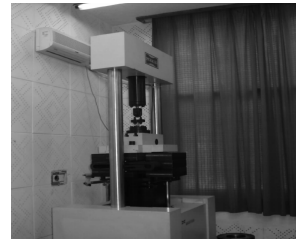


图 3 PLG-200 高频疲劳试验机



图 4 MTS880 电液伺服材料试验机

### 2.3 随机载荷谱的编制

1) 选择形状参数  $\alpha$  为 2,这里参考的是风能资源评估,目前,国际上广泛应用的风速概率分布模型为双参数威布尔分布,在中国风资源气象条件的实际评估过程中,大量的威布尔参数的评估结果得出形状参数  $\alpha$  大致为 1.7~2.4。而风机生产商对于风机各项指标的设计又以形状参数等于 2 的风速威布尔分布(瑞利分布)为依据。

2) 取  $\sigma=\mu$  时,形状参数  $\alpha=2$  时,此时可以得到  $\varepsilon=1.43\beta$ ,即  $\mu=2.3162\beta$ ,即给定一个确定的均值  $\mu$  就可根据上述关系式得到尺度参数  $\beta$  和位置参数  $\varepsilon$  的值。

3) 取累积概率为 99.57% 的载荷值为载荷谱的为最大载荷,则载荷谱区间为  $[1.43\beta, 3.76\beta]$ 。并假定在一段载荷谱内应力的循环次数为 1000 次,将整个区间 20 等分,并将每个小区间的中值载荷作为这一级载荷的代表值,并根据每个区间出现的概率作为该级载荷出现的次数。

三参数威布尔分布下各级疲劳载荷在一个作用间隔内的次数的柱状图如图 5 所示。可以很直观地看出,所取载荷呈现一种明显的偏态分布。图 6 为由 MTS 液压伺服疲劳试验机实际产生的随机变幅疲劳载荷谱片段。

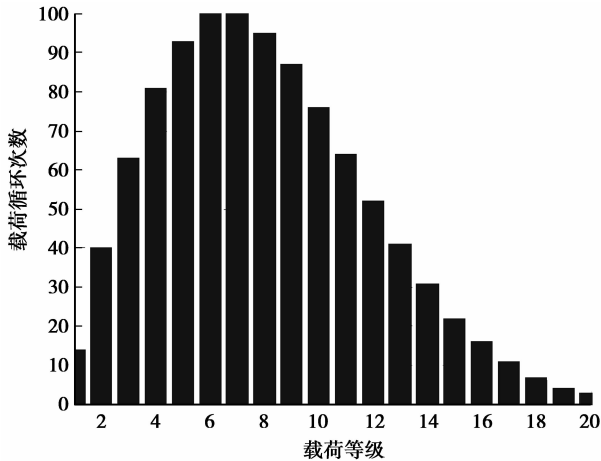


图 5 载荷在一个作用间隔内的次数

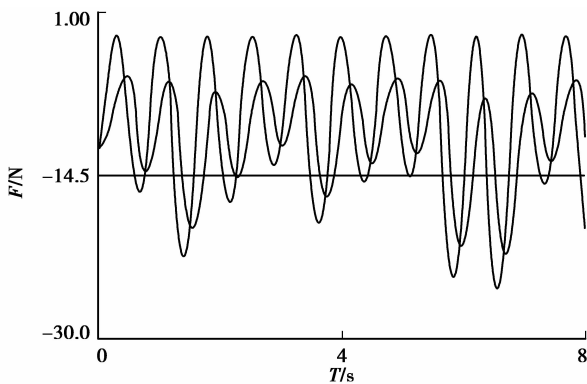


图 6 载荷谱文件生成的加载波形

### 3 试验结果

#### 3.1 疲劳试验结果

恒载条件下的 4 级应力水平及试验的结果见表 1, 随机载荷下弯曲疲劳寿命试验结果如表 2 所示。

表 1 轮齿失效寿命(恒幅工况)

序号	疲劳寿命( $\times 10^5$ )			
	647 MPa	623 MPa	602 MPa	578 MPa
1	0.36	0.53	0.65	0.95
2	0.49	0.58	1.36	1.32
3	0.50	0.69	1.45	2.87
4	0.56	1.04	1.62	2.98
5	1.80	1.11	1.87	3.87
6			$\geq 30.0$	$\geq 30.0$
7				$\geq 30.0$

表 2 轮齿失效寿命(随机工况)

序号	疲劳寿命( $\times 10^5$ )			
	600.5 MPa	539.4 MPa	478.5 MPa	431.8 MPa
1	0.95	1.14	5.66	10.16
2	1.00	1.96	6.23	12.31
3	1.13	2.65	6.48	15.12
4	1.32	3.74	6.84	19.74
5	1.89	7.63	9.00	21.25
6				$\geq 30.00$

#### 3.2 R-S-N 的拟合及修正

将各应力级的相同可靠度的疲劳寿命在双对数坐标系中最小二乘法线性拟合,在剔除有寿命超出点的高可靠度失真 S-N 曲线后,以余下的 S-N 曲线为基础选取寿命水平,对不同可靠度的疲劳强度进行分布类型检验和参数估计。这里取寿命为  $1 \times 10^6$ 、 $0.5 \times 10^6$ 、 $0.1 \times 10^6$ 、 $0.05 \times 10^6$  的疲劳强度值在双对数坐标系中最小二乘法进行拟合,可得到 R-S-N 线簇,如图 7、8 所示<sup>[10-11]</sup>。

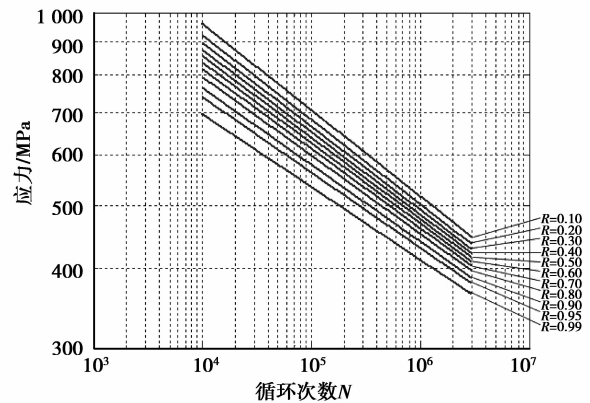


图 7 最终 R-S-N 线簇的拟合结果(随机载荷)

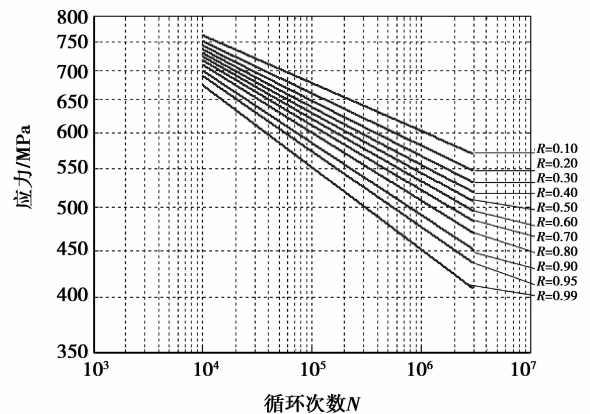


图 8 R-S-N 曲线簇的拟合结果(恒载荷下)

### 4 分析与讨论

#### 4.1 试验结果的对比分析

把两种工况下的 S-N 曲线放于同一坐标系下进行比较,如图 9 所示。从图中可以看出,由随机变幅疲劳试验得出的轮齿疲劳强度低于由疲劳载荷上限值取为载荷谱均值的等幅疲劳试验得出的疲劳强度。其对比如表 3 所示。

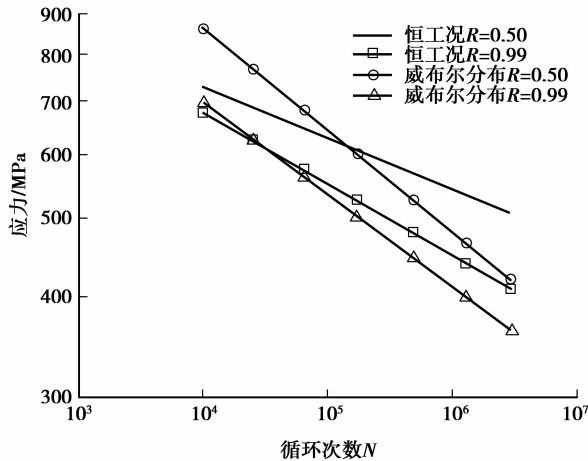


图 9 不同工况下 R-S-N 曲线比较

表 3 试验结果比较

可靠度/%	疲劳强度/MPa		$\frac{\sigma'_{Flim} - \sigma_{Flim}}{\sigma_{Flim}} / \%$
	$\sigma_{Flim}$	$\sigma'_{Flim}$	
50	507	415	-18.20
90	451	386	-14.40
99	410	364	-11.20

疲劳损伤的基本特征是疲劳累积损伤过程的不可逆性和疲劳累积损伤的随机性。疲劳损伤的随机性由内在分散性和外在分散性两大原因引起的。内在分散性是指是由材料微结构的不均匀性、构成物质的不均匀性、缺陷分布的不均匀性等内部因素引起的不确定性；外在分散性是由外载荷的随机性、试验件几何尺寸、服役条件等引起的不确定。假如材料在循环载荷作用  $n$  次后的疲劳损伤称之为瞬时累积损伤  $D(n)$ ，其是内在和外在分散性的综合体现。设内在分散性为随机变量  $D(1)$ ，外在分散性为随机变量  $D(2)$ ，则瞬时累积损伤  $D(n)$  是  $D(1)$  和  $D(2)$  的和，即  $D(n) = D(1) \cup D(2)$ 。内在分散性是材料固有的，外在分散性并不是材料的固有特性， $D(n)$  的分散性主要体现在外载荷的随机性，包含随机排列和外载荷大小的随机分布。从这个意义上来讲，由于随机载荷外在分散性用随机变量  $D(2)$  所产生额外的损伤，相同均值载荷作用下，随机载荷产生的损伤要比恒载大，因而随机载荷下齿轮的弯曲疲劳强度会降低<sup>[12-13]</sup>。

#### 4.2 随机载荷下的齿轮的疲劳极限的理论值

对于服从随机载荷的情况，把齿轮经历选定循环基数  $N_0$  次循环而没有发生破坏，相对应的随机载荷的均值定义为齿轮在这种载荷分布下的疲劳极限。假定随机载荷服从  $\sigma F = f(\sigma F)$  的分布，根据恒幅载荷下齿轮材料的 S-N 曲线和 Miner 疲劳累积理论，经过  $N_0$  次循环所造成的疲劳损伤为

$$D = \int_{\sigma_{lim}}^{\sigma_{max}} \frac{N_0 f(\sigma F) [F(\sigma)]^m}{C} d\sigma F, \quad (6)$$

式中  $m, C$  均为材料常数。

在这样的平均应力水平下刚好不发生破坏，即  $D \leq D_{CR}$ 。则齿轮设计的疲劳极限的理论值为  $S'_{lim} = E(S)$ 。  $E(S)$  表示随机载荷的均值水平。

随机载荷服从三参数威布尔分布的概率密度函数式(2)代入式(6)中，即

$$D_{CR} = \int_{\sigma_{lim}}^{\sigma_{max}} \frac{N_0 \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x-\epsilon}{\beta}\right)^{\alpha-1} \cdot e^{-\left(\frac{x-\epsilon}{\beta}\right)^\alpha} [F(\sigma)]^m}{C} d\sigma. \quad (7)$$

因为  $S'_{lim} = E(S) = \mu$ ，所以问题归结为已知  $D_{CR}$ ，求载荷谱均值  $\mu$  的问题。此方程可采用迭代方法用 Mathematic 进行求解。

#### 4.3 试验结果与理论结果比较

根据恒幅载荷下的试验结果，把中值 S-N 曲线数据  $\sigma_{Flim} = 507$  MPa,  $m = 15.6$  和正态分布概率分布函数代入公式(7)进行迭代计算，得到理论上的疲劳极限，随机载荷下实验和理论强度如表 4 所示。

表 4 试验结果与理论计算结果的比较

疲劳强度/MPa		$\frac{\sigma_{理论} - \sigma'_{Flim}}{\sigma'_{Flim}} / \%$
$\sigma'_{Flim}$	$\sigma_{理论}$	
415	417	0.48

从表 4 可以看出，试验结果与理论分析吻合较好，这说明随机载荷下的疲劳强度通过理论分析得到是可靠的。

#### 4.4 载荷比例系数与疲劳极限比例系数

在图 2 中，对变异系数对载荷比例系数的影响趋势进行了分析。当材料常数  $m$  一定时，随着变异系数  $\eta$  的增大，载荷比例系数  $k$  呈增大趋势。定义疲劳极限比例系数为

$$k' = \frac{\sigma_{恒}}{\sigma_{随机理论值}}. \quad (8)$$

疲劳极限比例系数为恒载荷下齿轮弯曲疲劳强度与随机载荷下齿轮弯曲疲劳强度理论值之间的比值。当形状参数  $\alpha$  等于 2 时，不同的变异系数可以求得不同的载荷谱参数，不同的载荷谱参数可以由式(6)求出不同的疲劳强度的理论值，即不同的变异系数对应不同的疲劳极限比例系数。将载荷比例系数和疲劳极限比例系数在同一个坐标系中表示出来，如图 10 所示，其中材料常数  $m$  为 15.6<sup>[14-15]</sup>。

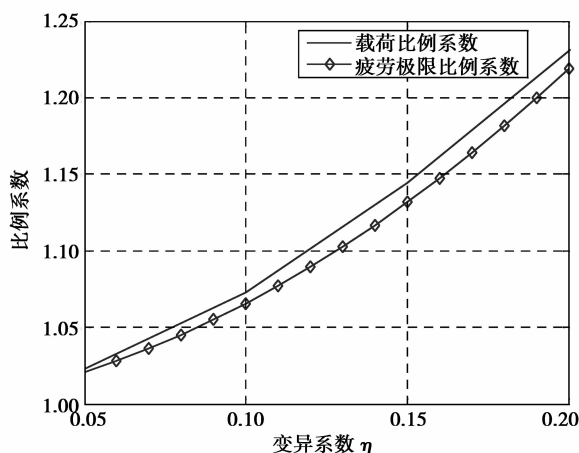


图 10 变异系数对比例系数的影响趋势 ( $m=15.6$ )

在图 10 中,随着变异系数的增大,即载荷的波动程度增大,载荷比例系数与疲劳极限比例系数都呈增大趋势,当变异系数一定时,载荷比例系数略大于疲劳极限比例系数,但他们之间的相对差不超过 1%。因此可以利用随机载荷谱的载荷比例系数去推断随机载荷下齿轮弯曲疲劳强度的理论值<sup>[16]</sup>。

## 5 结 论

1) 三参数威布尔分布下可靠度为 0.5 时的齿轮弯曲疲劳强度相对于恒载下降了 18.2%;可靠度为 0.99 时,相对于恒载荷下降了 11.2%。

2) 疲劳累积法则进行计算,随机载荷服从三参数威布尔分布,且形状参数为 2,变异系数为 0.2 时,齿轮弯曲疲劳极限的理论值为 417 MPa。实验弯曲疲劳极限为 415 MPa,试验结果与理论计算结果相吻合。

3) 当变异系数一定时,载荷与疲劳极限比例系数差别不大于 1%,因此可以通过随机载荷谱的载荷比例系数推断随机载荷下齿轮弯曲疲劳强度值。

### 参考文献:

- [1] Syzrantseva K V. Development of a method to calculate the strength reliability of tooth gears based on the fatigue resistance when the teeth bend[J]. Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2009, 38(6): 552-556.
- [2] 祖世华. 随机载荷下齿轮弯曲疲劳强度的研究[D]. 重庆:重庆工学院,2008.
- [3] Anno Y, Hayashi K, Harda H. Bending fatigue strength of spur of gear teeth under random loading bull[J]. Japan Society Mechanical Engineering, 1974, 17(111):1192.
- [4] Hanumanna D, Narayanan S, Krishnamurthy S. Bending fatigue testing of gear teeth under random

loading[J]. Journal of Mechanical Engineering Science, 2001, 215(7):773-784.

- [5] 高孝旺,许洪斌. 服从威布尔分布的随机载荷等效力特性[J]. 重庆工学院学报:自然科学版,2008,22(12): 30-33.  
GAO Xiaowang, XU Hongbin. Study of equivalent characteristic under random load subjected to Weibull Distribution [J]. Journal of Chongqing Institute of Technology: Natural Science Edition. 2008, 22(12): 30-33.
- [6] 高孝旺. 随机载荷呈威布尔分布的齿轮弯曲疲劳强度的研究[D]. 重庆:重庆工学院,2008.
- [7] Mayer H, Ede C, Allison J E. Influence of cyclic loads below endurance limit or threshold stress intensity on fatigue damage in cast aluminium alloy 319-T7 [J]. International Journal of Fatigue, 2005, 27(2): 129-141.
- [8] Podrug S, Jelaska D, Glodež S. Influence of different load models on gear crack path shapes and fatigue lives[J]. Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, 2008, 31(5): 327-339.
- [9] 朱德臣,汪建文. 风工况双参数威布尔分布 k 值影响研究[J]. 太阳能, 2007(6): 34-35.  
ZU Dechen, WANG Jianwen. Study on the effects of k for two-parameter Weibull Distribution in wind resource assessment[J]. Solar Energy, 2007(6): 34-35.
- [10] Hu J J, Xu H B, Zu S H, et al. Realization and analysis of bending fatigue strength test for gears under random loading[J]. Advanced Materials Research, 2011, 291/292/293/294: 1297-1302.
- [11] Temmel C, Karlsson B, Leicht V. Bending fatigue of gear teeth of conventional and isotropic steels [J]. Haertere-Technische Mitteilungen, 2009, 64(2): 80-88.
- [12] Tao J X, Smith S, Duff A. The effect of overloading sequences on landing gear fatigue damage [J]. International Journal of Fatigue, 2009, 31(11/12): 1837-1847.
- [13] Miura H, Osada T, Suda N, et al. Effects of rolling on the tooth root bending fatigue strength of sintered ferrous alloy gears[J]. Japan Society of Powder and Powder Metallurgy, 2009, 56(5): 344-349.
- [14] 许洪斌,祖世华. 随机载荷条件下齿轮弯曲疲劳强度[J]. 重庆工学院学报:自然科学版, 2007, 21(11): 49-51.  
XU Hongbin, ZU Shihua. Bending fatigue strength of gear under random loads [J]. Journal of Chongqing Institute of Technology: Natural Science Edition, 2007, 21(11): 49-51.
- [15] Wang G J, Jiang M H, Zhu S S, et al. Using multiaxial fatigue method to predict gear bending fatigue life[J]. Key Engineering Materials, 2010, 419/420: 201-204.
- [16] Lalonde S, Guilbault R. Prediction of thin-rimmed gear crack propagation from a factorial design approach[J]. Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, 2011, 34(7): 470-486.