文章编号:1000-582X(2013)04-001-10

线性系统 Luenberger 能观规范型的充要条件及特征

任夏楠[1],邓兆祥[1,2]

(1. 重庆大学 机械传动国家重点实验室,重庆 400044;
2. 中国汽车工程研究院股份有限公司 汽车噪声振动和安全技术国家重点实验室,重庆 400039)

摘　要:提出了一种完全能观线性 MIMO(multi-input multi-output)系统的能观矩阵的线性无关行向量的搜索方案,并基于此搜索方案提出了一种将完全能观线性 MIMO 系统化为 Luenberger 能观规范型的变换矩阵的构造方法。通过对几个定理的证明,阐述了此非奇异变换矩阵与 Luenberger 能观规范型的关系,提出了将 Luenberger 能观规范型按照结构的差异划分为广义和狭义 2 种规范型的观点,并给出了完全能观线性 MIMO 系统的广义和狭义 Luenberger 能观规范型实现的充要条件,用 3 个实例验证了上述观点和方法的正确性和可行性。同时给出了一种方法使得一类不满足 Luenberger 能观规范型实现条件的线性 MIMO 系统能够在不改变系统物理结构的前提下变换为 Luenberger 能观规范型,并通过 2 个实例的分析和比较对此方法进行了阐述。

关键词:龙柏格;能观规范型;能观性;线性系统

中图分类号:TP273　　　　**文献标志码**:A

Necessary and sufficient condition for the realization of Luenberger observable canonical form and its structure characteristics

REN Xianan[1], *DENG Zhaoxiang*[1,2]

(1. The State Key Laboratory of Mechanical Transmission, Chongqing University, Chongqing 400044, China;
2. State Key Laboratory of Vehicle NVH and Safety Technology, China Automotive Engineering Research Institute Co., Ltd., Chongqing 400039, China)

Abstract: An approach is put forward to find the linealy independent vector of the observability matrix of completely observable linear multi-input multi-output(MIMO) system. Based on this approach, a method is advanced to obtain the transformation matrix which can be used for transforming the linear MIMO system to its Luenberger observable canonical form. Through the proving of several theormes, the relation between the transformation matrix and Luenberger observable canonical form is exposited and the Luenberger observal form is divided into two classes, the generalized Luenberger observable canonical form and the special Luenberger observable canonical form, according to its structure difference. The necessary and sufficient condition for the realization of generalized and special Luenberger observable canonical form of completed observable linear MIMO system are given, and three examples are used to verify the correctness and feasibility of the above viewpoint and method. Meanwhile, another method is put forward to transform

收稿日期:2012-11-21

基金项目:重庆市科委科技攻关项目(CSTC2009AB6021)

作者简介:任夏楠(1983-),男,重庆大学博士研究生,主要从事汽车动力学及控制理论的研究,(Tel)13658376639;(E-mail)renxianan@gmail.com。

邓兆祥(联系人),男,重庆大学教授,博士生导师,(Tel)023-65105549;(E-mail)zxdeng@cqu.edu.cn。

a class of linear MIMO system, under the condition of unchanging its physical structure, which does not meet the above necessary and sufficient condition, to its Luenberger observable canonical form. Two examples are analyzed and compared to elaborate on the method.

Key words: Luenberger; observable canonical form; observability; linear systems

线性 MIMO 系统的 Luenberger 规范型广泛的应用于系统的极点配置、状态反馈控制以及线性 MIMO 系统的状态观测器的设计。

国内外关于 Luenberger 规范型的研究已经有相当长的时间，也取得了很多成果。早期的文献中对于 Luenberger 规范型的研究大都集中于完全能控 MIMO 系统的 Luenberger 能控规范型[1-10]。其中 Luenberger 给出了完全能控系统化为 Luenberger 能控规范型的方法和步骤，但却没有对 Luenberger 能观规范型进行讨论[1-4]。Kalman[5-6] 对线性系统的能控性和能观性进行了分析。Gilbert[7] 讨论了线性多变量系统的能控性和能观性及其相互关系，而没有具体探讨完全能观系统的规范型的结构。Jiang 等[10] 讨论了其规范型实现的充分必要条件，但也仅限于完全能控系统，并没有对能观系统进行讨论。最近的一些文献[11-15]按照对偶原理通过对能控规范型的结构的分析给出了相应的 Luenberger 能观规范型应该具有的基本结构特征，但是这种方法仅限于完全能控且完全能观系统，对于不完全能控系统并不适用。

总之，对于 Luenberger 规范型的研究起步很早，各个方面的研究已经也相当的成熟，但是还存在以下几个方面的不足。

首先，Luenberger 能观规范型实现的充分必要条件。当前对于 Luenberger 规范型的研究集中于 Luenberger 能控规范型的实现及其应用，相关文献指出只有在特定的条件下一个完全能控系统才能够变换为 Luenberger 能控规范型[10]，但是却鲜有文献对 Luenberger 能观规范型的实现的充要条件研究。其次，完全能观 MIMO 系统 Luenberger 能观规范型的实现方法。如果一个系统满足 Luenberger 能观测规范型实现的条件，其具体实现方法是一个必须要解决的问题。当前文献中对于将 MIMO 系统化为 Luenberger 能控规范型有一整套的方法和步骤[1-6]，但是却没有对 Luenberger 能观规范型的实现方法和实现步骤给出任何的结论。第三，Luenberger 能观规范型的结构特殊性及产生机理的分析。公开发表的文献中对于 Luenberger 能观规范型的定义有着细微的差异[1,10-12]，这些差异主要体现在其结构上，但并没有任何文献对这些差异及其形成的原因进行比较和分析。

针对上述问题，首先从完全能观线性 MIMO 系统时域理论出发，提出了一种线性系统能观测矩阵的线性无关行向量的搜索方案。其次，在此行向量搜索方案的基础之上提出了一种变换矩阵的构造方法，进而对系统的 Luenberger 能观规范型结构特征及其与变换矩阵的关系进行了分析。根据 Luenberger 能观规范型的结构特征，提出了将系统的 Luenberger 能观规范型按照结构的差异分为广义和狭义 2 种观点，给出了这 2 种能观规范型实现的充要条件以及狭义 Luenberger 能观规范型的实现的一个充分条件，同时提出了一种实现方法使得一类不满足 Luenberger 能观规范型实现条件的线性 MIMO 系统能够在不改变系统物理结构的前提下变换为 Luenberger 能观规范型，最后通过 5 个实例分别对上述观点和方法进行了验证，计算结果表明作者提出观点和实现方法是合理和可行的。

1 能观矩阵线性无关行向量的搜索方案

当前关于能观矩阵的线性无关行向量组的搜索方法的研究却很少，一些文献中只是说明其搜索方法与能控矩阵的搜索方法存在“对偶”关系[4]，但是却没有能够对这种“对偶”关系的给出具体的解释。作者在对前人研究工作的基础上对能观矩阵进行深入的研究，提出了一种能观矩阵的无关向量组的搜索方案，并给出了具体的步骤。

1.1 研究对象及其基本假设

考虑连续时间线性 MIMO 系统 $\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\}$，其状态空间描述为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u},$$
$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x},$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 系统矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times p$ 控制矩阵，$\boldsymbol{C}=[\boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{c}_p^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 为 $q\times n$ 输出矩阵，且其秩满足 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{C})=m\leqslant q$，其中 $\boldsymbol{c}_i, i=1,2,\cdots,q$ 表示 $\boldsymbol{C}$ 的行向量。表系统的能观矩阵为

$$\boldsymbol{Q}_o = [\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}\cdots(\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{n-1})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}。$$

基本假设：系统 $\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\}$ 为连续时间线性时不变系统，且完全能观。即矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 中的元素均为

常数，而且系统$\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\}$的能观测矩阵 $\boldsymbol{Q}_o$ 的秩满足条件 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{Q}_o)=n$。

1.2　能观矩阵线性无关行向量的搜索方案

由于矩阵 $\boldsymbol{Q}_o$ 满秩，所以该矩阵有且仅有 n 个线性无关的行向量。建立如下所示表格，表格由若干行和若干列组成，表格的第 i 行第 j 列元素代表由 $\boldsymbol{c}_i$ 与 $\boldsymbol{A}^j$ 的乘积 $\boldsymbol{c}_i\boldsymbol{A}^j$，$1\leqslant i\leqslant p$，$1\leqslant j\leqslant n$。可以看出，该表格的元素对应于矩阵 $\boldsymbol{Q}_o$ 的各个行向量。

表 1　能观测矩阵行向量搜索方案图

参量	第 1 列	第 2 列	第 3 列	…
第 1 行	$\boldsymbol{c}_1$	$\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{A}^2$	…
第 2 行	$\boldsymbol{c}_2$	$\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{A}^2$	…
第 3 行	$\boldsymbol{c}_3$	$\boldsymbol{c}_3\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{c}_3\boldsymbol{A}^2$	…
第 4 行	$\boldsymbol{c}_4$	$\boldsymbol{c}_4\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{c}_4\boldsymbol{A}^2$	…
…	…	…	…	…

具体的搜索步骤如下：

Step 1　由于 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{C})=m\leqslant q$，所以 $\boldsymbol{C}$ 中必有且仅有 m 个线性无关的行向量。对表格第一列，如果 $\boldsymbol{c}_1$ 不为零，则保留 $\boldsymbol{c}_1$，否则划去 $\boldsymbol{c}_1$，从上至下找出 m 个线性无关行向量并保留对应的元素，其余的划去。假设经过这一步剩余的这 m 个行向量分别处于第一列的第 $i_1,i_2,\cdots,i_m$ 行上，并表这 m 个行向量为 $\boldsymbol{c}_{i_1},\boldsymbol{c}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{c}_{i_m}$。

Step 2　转入第二列，对于 $i_1,i_2,\cdots,i_m$ 这些行的元素从上至下进行搜索。对每一格，判断其对应行向量与先前得到的线性无关行向量组是否线性相关，若线性相关则保留该元素，否则划去该元素。并且，如果已经划去某一个栅格，则所在行中位于其右边的所有行向量必然与先前得到的线性无关行向量为线性相关，就不再需要对相应行中的向量进行搜索，故将其全部划去。

Step 3　转入第三列，对于第三列的 $i_1,i_2,\cdots,i_m$ 这些行的元素从上至下进行搜索。对需要搜索的每一元素，判断其对应行向量与先前得到的线性无关行向量组是否线性相关，若线性相关则保留该该元素，否则划去该元素。

Step 4　采取与第三步类似的方法对其后的列进行搜索，直到找到第 n 个线性无关的行向量，搜索结束。搜索结束后的表格的示意图如下图所示，实际情况应该根据具体计算结果得出。

表 2　能观测矩阵行向量搜索结果图

参量	第 1 列	第 2 列	第 3 列	…
第 1 行	$\boldsymbol{c}_1$	$\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{A}^2$	…
第 2 行	$\boldsymbol{c}_2$	×	×	…
第 3 行	$\boldsymbol{c}_3$	$\boldsymbol{c}_3\boldsymbol{A}$	×	…
第 4 行	×	×	×	…
…	…	…	…	…

表格中所有保留的元素对应的行向量的总体就是 $\boldsymbol{Q}_o$ 的 n 个线性无关的行向量。进而对于表格中的各行，用 ν_{i_k} 来表示第 i_k 行中保留的栅格的个数，根据能观指数集的定义[11]可知$\{\nu_{i_1},\nu_{i_2},\cdots,\nu_{i_m}\}$就是系统的能观指数集。

2　非奇异变换矩阵的构造

若系统$\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\}$的输出矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的前 m 个行向量为线性无关，则可以通过上述搜索方案，找出能观性矩阵 $\boldsymbol{Q}_o$ 的 n 个线性无关的行向量，并组成非奇异矩阵

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{L}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{L}_{\nu_m}\end{bmatrix},\boldsymbol{L}_i=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_i\\ \boldsymbol{C}_i\boldsymbol{A}\\ \vdots\\ \boldsymbol{C}_i\boldsymbol{A}^{\nu_i-1}\end{bmatrix},i=1,2,\cdots,m。$$

表$\{\nu_1,\nu_2,\cdots\nu_m\}$为系统的能观指数集，设矩阵 $\boldsymbol{L}$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{L}^{-1}=[\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_m]$，其中 $\boldsymbol{\Phi}_i=[\boldsymbol{f}_{i1},\boldsymbol{f}_{i2},\cdots,\boldsymbol{f}_{i\nu_i}]$为 $n\times\nu_i$ 矩阵；$i=1,\cdots,m$，则有

$$\boldsymbol{L}_i\boldsymbol{F}_i=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{f}_{i1} & \cdots & \boldsymbol{C}_i\boldsymbol{f}_{i\nu_i}\\ \vdots & \cdots & \vdots\\ \boldsymbol{C}_i\boldsymbol{A}^{\nu_i-1}\boldsymbol{f}_{i1} & \cdots & \boldsymbol{C}_i\boldsymbol{A}^{\nu_i-1}\boldsymbol{f}_{i\nu_i}\end{bmatrix}=\boldsymbol{I}_{\nu_i\times\nu_i},\tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{I}_{\nu_i\times\nu_i}$ 为 $\nu_i\times\nu_i$ 单位矩阵。

$$\boldsymbol{L}_i\boldsymbol{F}_j=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{f}_{j1} & \cdots & \boldsymbol{C}_i\boldsymbol{f}_{j\nu_j}\\ \vdots & \cdots & \vdots\\ \boldsymbol{C}_i\boldsymbol{A}^{\nu_i-1}\boldsymbol{f}_{j1} & \cdots & \boldsymbol{C}_i\boldsymbol{A}^{\nu_i-1}\boldsymbol{f}_{j\nu_j}\end{bmatrix}=\boldsymbol{O}_{\nu_i\times\nu_j},\tag{2}$$

其中 $i\neq j$，$\boldsymbol{O}_{\nu_i\times\nu_j}$ 为 $\nu_i\times\nu_j$ 零矩阵。

构造矩阵 $\boldsymbol{T}=[\boldsymbol{T}_1\quad\cdots\quad\boldsymbol{T}_m]$，称为变换矩阵，其中 $\boldsymbol{T}_i=[\boldsymbol{f}_{i\nu_i},\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}_{i\nu_i},\cdots,\boldsymbol{A}^{\nu_i-1}\boldsymbol{f}_{i\nu_i}]$为 $n\times\nu_i$ 矩阵$(i=1,2,\cdots,m)$。

引理 1　矩阵 $\boldsymbol{T}=[\boldsymbol{T}_1\quad\cdots\quad\boldsymbol{T}_m]$非奇异。

证明：假设存在一组数 $k_{11},\cdots k_{1(\nu_1-1)},\cdots,k_{m(\nu_m-1)}$使得

$$\sum_{i=1}^{m}(k_{i1}\boldsymbol{f}_{i\nu_i}+k_{i2}A\boldsymbol{f}_{i\nu_i}+\cdots+k_{i\nu_i}\boldsymbol{A}^{\nu_i-1}\boldsymbol{f}_{i\nu_i})=0,\tag{3}$$

将式(3)两端各乘以 $\boldsymbol{C}_i$，利用式(1)和式(2)，得到 $k_{i\nu_i}\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{A}^{\nu_i-1}\boldsymbol{f}_{i\nu_i}=k_{i\nu_i}=0,i=1,2,\cdots,m$。

将式(3)两端各乘以 $\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{A}$，利用上面得到的结果将 $k_{i\nu_i}=0$ 带入，同样利用式(1)和式(2)，得到 $k_{i(\nu_i-1)}\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{A}^{\nu_i-1}\boldsymbol{f}_{i\nu_i}=k_{i(\nu_i-1)}=0,i=1,2\cdots,m$。

然后依次以 $\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{A}^3,\cdots,\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{A}^{\nu_i-1}$ 乘以式(3)的两端，并利用前一次的结果，最终可以得到

$$k_{i1}=k_{i2}=\cdots=k_{i\nu_i}=0,i=1,2,\cdots,m。$$

可以看出组成矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的各个行向量线性无关，所以矩阵 $\boldsymbol{T}$ 为非奇异矩阵，定理证毕。

3 Luenberger 能观规范型实现的条件及结构特征

Luenberger 能观规范型的实现其实就是通过寻找一种非奇异变换矩阵，将其变换为 Luenberger 能观规范型的表示形式。当前公开发表的文献中，对于线性系统 Luenberger 能观规范型的定义分为两种[1,9-11]，这两种定义有一些细微的差别，但是这两种细微的差别造成了其实现条件有很大的不同。通过定理 1 和定理 2 来阐述 Luenberger 能观规范型的基本结构特征。然后通过定理 3 引入广义和狭义 Luenberger 能观规范型的概念，分别讨论了其实现的充要条件，并对问题进行了进一步的探讨，提出了狭义 Luenberger 能观规范型实现的一个充分条件。

3.1 Luenberger 能观规范型的结构特征

定理 1 对于系统 $\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\}$，若矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的前 m 个行向量线性无关，则可构造非奇异矩阵 $\boldsymbol{T}$，使得 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\widetilde{\boldsymbol{A}}$，且 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 具有以下特殊形式

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\widetilde{\boldsymbol{A}}_{11} & \cdots & \widetilde{\boldsymbol{A}}_{1m}\\ \vdots & \cdots & \vdots\\ \widetilde{\boldsymbol{A}}_{m1} & \cdots & \widetilde{\boldsymbol{A}}_{mm}\end{bmatrix}_{n\times n},$$

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}_{ii}=\left[\begin{array}{ccc:c}0 & \cdots & 0 & *\\ \hdashline & & & *\\ & I_{\nu_i-1} & & \vdots\\ & & & *\end{array}\right]_{\nu_i\times\nu_i},i=1,2,\cdots,m;$$

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}_{ij}=\left[\begin{array}{c:c} & *\\ O_{\nu_i\times(\nu_j-1)} & \vdots\\ & *\end{array}\right]_{\nu_i\times\nu_j},$$

$$i\neq j,i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,m;$$

$\boldsymbol{I}_{\nu_i-1}$ 表示 ν_i-1 维单位矩阵，$\boldsymbol{O}_{\nu_i\times(\nu_j-1)}$ 表示 $\nu_i\times(\nu_j-1)$ 维零矩阵，$*$ 表示矩阵的元素没有特殊性，要根据具体情况进行计算。

证明 将 $n\times n$ 矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 按照如下方式分块

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}\widetilde{\boldsymbol{A}}_{11} & \cdots & \widetilde{\boldsymbol{A}}_{1m}\\ \vdots & \cdots & \vdots\\ \widetilde{\boldsymbol{A}}_{m1} & \cdots & \widetilde{\boldsymbol{A}}_{mm}\end{bmatrix}_{n\times n},$$ $\widetilde{\boldsymbol{A}}_{ij}$ 为 $\nu_i\times\nu_j$ 矩阵，表

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}_{ij}=\begin{bmatrix}a_{11}^{ij} & \cdots & a_{1\nu_j}^{ij}\\ \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{\nu_i1}^{ij} & \cdots & a_{\nu_i\nu_j}^{ij}\end{bmatrix},$$ a_{ks}^{ij} 表示矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_{ij}$ 的第 k 行第 s 列元素。构造矩阵 $\boldsymbol{T}=[\boldsymbol{T}_1\quad\cdots\quad\boldsymbol{T}_m]$，其中 $\boldsymbol{T}_i=[\boldsymbol{f}_{i\nu_i},\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}_{i\nu_i},\cdots,\boldsymbol{A}^{\nu_i-1}\boldsymbol{f}_{i\nu_i}]$ 为 $n\times\nu_i$ 矩阵($i=1,2,\cdots,m$)，由 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 得到 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}\widetilde{\boldsymbol{A}}$，根据分块矩阵相等的原理可知

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{\nu_i}a_{ks}^{ij}\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{f}_{i\nu_i}=\boldsymbol{A}^s\boldsymbol{f}_{j\nu_j},1\leqslant j\leqslant m,1\leqslant s\leqslant\nu_j$$

1)当 $1\leqslant s\leqslant\nu_j-1$ 时，有

$$\sum_{i=1,i\neq j}^{m}\sum_{k=1}^{\nu_i}a_{ks}^{ij}\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{f}_{i\nu_i}+\sum_{k=1}^{\nu_j}a_{ks}^{jj}\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{f}_{j\nu_j}=\boldsymbol{A}^s\boldsymbol{f}_{j\nu_j}。$$

将等式右边移到左边后合并同类项得到

$$\sum_{i=1,i\neq j}^{m}\sum_{k=1}^{\nu_i}a_{ks}^{ij}\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{f}_{i\nu_i}+\sum_{k=1,k\neq s+1}^{\nu_j}a_{ks}^{jj}\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{f}_{j\nu_j}+(a_{(s+1)s}^{jj}-1)\boldsymbol{A}^s\boldsymbol{f}_{j\nu_j}=0。$$

考虑到 $\boldsymbol{f}_{1\nu_1},\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}_{1\nu_1},\cdots,\boldsymbol{A}^{\nu_1-1}\boldsymbol{f}_{1\nu_1},\cdots,\boldsymbol{A}^{\nu_m-1}\boldsymbol{f}_{m\nu_m}$ 为线性无关向量组，所以当 $i\neq j$ 时 $a_{ks}^{ij}=0$；当 $i=j$ 时，$a_{ks}^{jj}=0,k\neq s+1,a_{(s+1)s}^{jj}=1$。

2)当 $s=\nu_j$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{\nu_i}a_{k\nu_j}^{ij}\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{f}_{i\nu_i}-\boldsymbol{A}^{\nu_j}\boldsymbol{f}_{j\nu_j}=0。$$

由于 $\boldsymbol{f}_{1\nu_1},\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}_{1\nu_1},\cdots,\boldsymbol{A}^{\nu_1-1}\boldsymbol{f}_{1\nu_1},\cdots,\boldsymbol{A}^{\nu_m-1}\boldsymbol{f}_{m\nu_m}$ 线性无关，而 $\boldsymbol{f}_{1\nu_1},\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}_{1\nu_1},\cdots,\boldsymbol{A}^{\nu_1-1}\boldsymbol{f}_{1\nu_1},\cdots,\boldsymbol{A}^{\nu_m-1}\boldsymbol{f}_{m\nu_m}$，$\boldsymbol{A}^{\nu_j}\boldsymbol{f}_{j\nu_j}$ 线性相关向量组，根据线性代数理论，方程组(4)的解 $a_{k\nu_j}^{ij},1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant k\leqslant\nu_i$ 存在且唯一。

综合以上的结论，可以将矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_{ij}$ 表示如下

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}_{ii}=\left[\begin{array}{ccc:c}0 & \cdots & 0 & *\\ \hdashline & & & *\\ & I_{\nu_i-1} & & \vdots\\ & & & *\end{array}\right]_{\nu_i\times\nu_i},i=j=1,\cdots,m,$$

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}_{ij}=\left[\begin{array}{c:c} & *\\ \boldsymbol{O}_{\nu_i\times(\nu_j-1)} & \vdots\\ & *\end{array}\right]_{\nu_i\times\nu_j},$$

$$i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,m,i\neq j。$$

定理证毕。

定理 2 对于系统 $\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\}$，若矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的前 m 个行向量线性无关，则存在非奇异矩阵 $\boldsymbol{T}$，使得 $\widetilde{\boldsymbol{C}}=$

$\boldsymbol{CT}$，且$\widetilde{\boldsymbol{C}}$的前 m 行满足：

1）当 $1\leqslant i<j\leqslant m$ 时

$$\widetilde{\boldsymbol{C}}_{ij}=\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{T}_j=[0,\cdots,0]_{1\times\nu_j}。$$

2）当 $j=i,i=1,\cdots,m$ 时

$$\widetilde{\boldsymbol{C}}_{ii}=\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{T}_i=[0,\cdots0,1]_{1\times v_i}=[0,\cdots0,1]_{1\times v_j}。$$

3）当 $m\geqslant i>j\geqslant 1$ 时

$$\widetilde{\boldsymbol{C}}_{ij}=\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{T}_j=\begin{cases}[0,\cdots,0]_{1\times\nu_j},\nu_i\geqslant\nu_j\\ [0,\cdots,0,t_{ij}]_{1\times\nu_j},\nu_i\leqslant\nu_j-1\end{cases}。$$

其中 t_{ij} 表示此元素的值不一定为零，要根据具体情况进行计算。

证明：

1）当 $i<j$ 时，若 $\nu_i\geqslant\nu_j$，由 $\boldsymbol{L}_i\boldsymbol{F}_j=\boldsymbol{O}_{\nu_i\times\nu_j}$ 得到 $\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{f}_{j\nu_j}=\cdots=\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{A}^{\nu_i-1}\boldsymbol{f}_{j\nu_j}=\boldsymbol{0}$，所以可以得到 $\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{T}_j=[0,\cdots,0]_{1\times v_j}$。若 $\nu_i<\nu_j$，则同样由 $\boldsymbol{L}_i\boldsymbol{F}_j=\boldsymbol{O}_{\nu_i\times\nu_j}$ 得到 $\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{f}_{j\nu_j}=\cdots=\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{A}^{\nu_i-1}\boldsymbol{f}_{j\nu_j}=\boldsymbol{0}$。由于矩阵 $\boldsymbol{L}$ 的 n 个行向量是采用搜索方法的步骤，用来表示 $\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{A}^k,\nu_i\leqslant k\leqslant\nu_j-1$ 的线性无关向量中不包含向量 $\boldsymbol{C}_j\boldsymbol{A}^{\nu_j-1}$。考虑到矩阵 $\boldsymbol{L}$ 中除了 $\boldsymbol{C}_j\boldsymbol{A}^{\nu_j-1}$ 之外其它的行向量均满足与 $\boldsymbol{f}_{j\nu_j}$ 正交，所以 $\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{f}_{j\nu_j}=0,\nu_i\leqslant k\leqslant\nu_j-1$。所以 $\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{T}_j$ 的各个元素均为 0，即 $\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{T}_j=[0,\cdots,0]_{1\times v_j}$。

2）当 $i=j$ 时，$\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{T}_i=[\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{f}_{i1},\cdots,\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{A}^{\nu_i-1}\boldsymbol{f}_{i\nu_i}]_{1\times v_i}$ 由于 $\boldsymbol{L}_i\boldsymbol{F}_i=I_{\nu_i\times\nu_i}$，所以 $\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{f}_{ik}=0,1\leqslant k\leqslant\nu_i$，即 $\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{T}_i=[0,\cdots0,1]_{1\times v_i}=[0,\cdots0,1]_{1\times v_j}$。

3）当 $i>j$ 时

若 $\nu_i\geqslant\nu_j$，由 $\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{f}_{j\nu_j}=\cdots=\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{A}^{\nu_i-1}\boldsymbol{f}_{j\nu_j}=0$，可知 $\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{T}_j$ 的各个元素均为 0，即 $\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{T}_j=[0,\cdots,0]_{1\times v_j}$。

若 $\nu_i<\nu_j$ 即 $\nu_i\leqslant\nu_j-1$，首先由 $\boldsymbol{L}_i\boldsymbol{F}_j=\boldsymbol{O}_{\nu_i\times\nu_j}$ 知 $\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{f}_{j\nu_j}=\cdots=\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{A}^{\nu_i-1}\boldsymbol{f}_{j\nu_j}=0$。其次，根据搜索方案的特性对于 $\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{A}^k,\nu_i\leqslant k\leqslant\nu_j-2$ 这些行向量来说，用来线性表示这些向量的线性无关向量组中不包含向量 $\boldsymbol{C}_j\boldsymbol{A}^{\nu_j-1}$，而用来表示 $\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{A}^{\nu_j-1}$ 的线性无关行向量中必然包含 $\boldsymbol{C}_j\boldsymbol{A}^{\nu_j-1}$。由于矩阵 $\boldsymbol{L}$ 中的行向量除了 $\boldsymbol{C}_j\boldsymbol{A}^{\nu_j-1}$ 之外其它的均与 $\boldsymbol{f}_{j\nu_j}$ 正交，而对于 $\boldsymbol{C}_j\boldsymbol{A}^{\nu_j-1}$ 满足 $\boldsymbol{C}_j\boldsymbol{A}^{\nu_j-1}\boldsymbol{f}_{j\nu_j}=1$。用 t_{ij} 来表示 $\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{A}^{\nu_j-1}$ 的所有线性无关向量中 $\boldsymbol{C}_j\boldsymbol{A}^{\nu_j-1}$ 的系数，则对于 $\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{A}^k$，当 $\nu_i\leqslant k\leqslant\nu_j-2$ 时满足 $\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{f}_{j\nu_j}=0$，而 $\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{A}^{\nu_j-1}\boldsymbol{f}_{j\nu_j}=t_{ij}$，即 $\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{T}_j=[0,\cdots,0,t_{ij}]_{1\times\nu_j}$。定理证毕。

3.2　广义和狭义 Luenberger 能观规范型实现的充要条件

定理 3　对于完全能观线性时不变系统$\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\}$，$\mathrm{rank}(\boldsymbol{C})=m\leqslant q$，如果矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的前 m 行为线性无关，即此系统输出矩阵 $\boldsymbol{C}$ 中顺序最大线性无关行向量组所含向量个数等于矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的秩。那么存在线性非奇异变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{T}\tilde{\boldsymbol{x}}$，使得系统$\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\}$化为系统$\{\widetilde{\boldsymbol{A}},\widetilde{\boldsymbol{B}},\widetilde{\boldsymbol{C}}\}$，且系统矩阵$\widetilde{\boldsymbol{A}}$和输出矩阵$\widetilde{\boldsymbol{C}}$具有如下特殊形式

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\widetilde{\boldsymbol{A}}_{11}&\cdots&\widetilde{\boldsymbol{A}}_{1m}\\ \vdots&\cdots&\vdots\ \widetilde{\boldsymbol{A}}_{m1}\end{bmatrix}_{n\times n},$$

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}_{ii}=\left[\begin{array}{ccc:c}0&\cdots&0&*\\ \hdashline &&&*\\ &I_{\nu_i-1}&&\vdots\\ &&&*\end{array}\right]_{\nu_i\times\nu_i},i=1,\cdots,m$$

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}_{ij}=\left[\begin{array}{c:c}&*\\ \boldsymbol{O}_{\nu_i\times(\nu_j-1)}&\vdots\\ &*\end{array}\right]_{\nu_i\times\nu_j},i\neq j,$$

$$i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,m$$

$$\widetilde{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\widetilde{\boldsymbol{C}}_1\\ \widetilde{\boldsymbol{C}}_2\end{bmatrix}_{q\times n},$$

$$\boldsymbol{C}_1=\begin{bmatrix}\widetilde{\boldsymbol{C}}_{11}&\cdots&\widetilde{\boldsymbol{C}}_{1m}\\ \vdots&\cdots&\vdots\\ \widetilde{\boldsymbol{C}}_{m1}&\cdots&\widetilde{\boldsymbol{C}}_{mm}\end{bmatrix}_{m\times n},\widetilde{\boldsymbol{C}}_{ij}\text{ 为 }\nu_j\text{ 维行向量},$$

$$\widetilde{\boldsymbol{C}}_{ii}=[0\quad\cdots\quad0\quad1]_{1\times\nu_i},i=1,\cdots,m,$$

$$\widetilde{\boldsymbol{C}}_{ij}=[0\quad\cdots\quad0]_{1\times\nu_j},i<j,i=1,\cdots,m,$$

$$\widetilde{\boldsymbol{C}}_{ij}=\begin{cases}[0,\cdots,0]_{1\times\nu_j},i>j,\nu_i\geqslant\nu_j\\ [0,\cdots,0,t_{ij}]_{1\times\nu_j},i>j,\nu_i\leqslant\nu_j-1,\end{cases}$$

$i=1,\cdots,m$，t_{ij} 表示此元素的值不一定为零。

证明：

必要性：若系统$\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\}$的输出矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的前 m 行线性无关，则可以按照提出的方法和步骤构造出非奇异变换矩阵 $\boldsymbol{T}=[\boldsymbol{T}_1\quad\cdots\quad\boldsymbol{T}_m]$。然后根据定理 1 和定理 2 即可证明变换后的系统矩阵和输出矩阵具有上述的形式。

充分性：如果系统能够通过非奇异变换矩阵化为 Luenberger 能观规范型，则系统的输出矩阵的秩与变换前系统输出矩阵的秩相同，即 $\mathrm{rank}\,\widetilde{\boldsymbol{C}}=\mathrm{rank}\boldsymbol{C}=m$。由于$\widetilde{\boldsymbol{C}}$是由 $\boldsymbol{C}$ 右乘以非奇异矩阵 $\boldsymbol{T}$ 得到的（$\widetilde{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{T}$），所以$\widetilde{\boldsymbol{C}}$与 $\boldsymbol{C}$ 的行向量有着相同的线性相关性。由于$\widetilde{\boldsymbol{C}}$的前 m 个行向量线性无关，所以 $\boldsymbol{C}$ 的前 m 个行向量也是线性无关的，定理证毕。

相关文献中把定理 3 中的系统$\{\widetilde{\boldsymbol{A}},\widetilde{\boldsymbol{B}},\widetilde{\boldsymbol{C}}\}$称为系统$\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\}$的 Luenberger 能观规范型[10]，也有的文献中仅仅把当 $\boldsymbol{C}_{ij}=[0,\cdots,0]_{1\times\nu_j},i=1,2,\cdots,m$ 时的系统$\{\widetilde{\boldsymbol{A}},\widetilde{\boldsymbol{B}},\widetilde{\boldsymbol{C}}\}$称为系统$\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\}$的能观规范型[1,9]，为了将其区分开来，根据其结构特征做如下

的定义：

若对于定理三的系统$\{\tilde{\boldsymbol{A}},\tilde{\boldsymbol{B}},\tilde{\boldsymbol{C}}\}$，矩阵$\tilde{\boldsymbol{C}}$所有的$\tilde{\boldsymbol{C}}_{ij}$，$i=1,2,\cdots,m$均满足$\tilde{\boldsymbol{C}}_{ij}=[0,\cdots,0]_{1\times\nu_j}$，则称系统$\{\tilde{\boldsymbol{A}},\tilde{\boldsymbol{B}},\tilde{\boldsymbol{C}}\}$为系统$\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\}$的狭义 Luenberger 能观规范型。否则，称为系统的广义 Luenberger 能观规范型。进而，由此定义，结合定理 2、定理 3 可以得到如下结论：

定理 4 对于完全能观线性时不变系统$\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\}$，$\mathrm{rank}(\boldsymbol{C})=m\leqslant q$，能够将此系统化为狭义 Luenberger 能观规范型的充要条件是：

1)矩阵$\boldsymbol{C}$的前m行为线性无关，即此系统输出矩阵$\boldsymbol{C}$中顺序最大线性无关行向量组所含向量个数等于矩阵$\boldsymbol{C}$的秩。

2)对于系统$\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\}$及其能观测指数集$\{\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_m\}$，当$i>j$，且$\nu_i\leqslant\nu_j-1$时，用来表示$\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{A}^{\nu_j-1}$的线性无关向量中$\boldsymbol{C}_j\boldsymbol{A}^{\nu_j-1}$的系数必须为零，即$t_{ij}=0$。

3.3 狭义 Luenberger 能观规范型实现的充分条件

由于定理 4 的条件非常的苛刻，所以对于系统$\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\}$，它的狭义 Luenberger 能观测规范型一般是不存在的。但是笔者通过研究发现，如果系统$\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\}$的能观测矩阵$\boldsymbol{Q}_o$的线性无关行向量的搜索方案能够使得该系统的能观测指数满足一定的条件，那么该系统的狭义 Luenberger 能观规范型就一定存在。

定理 5 对于完全能观线性时不变系统$\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\}$，$\mathrm{rank}(\boldsymbol{C})=m\leqslant q$，如果满足定理 3 的条件的同时，按照提出的搜索方案搜索能观测矩阵的线性无关行向量时，搜索结果使得其能观测指数还满足$\nu_1\leqslant\nu_2\leqslant\cdots\leqslant\nu_m$，那么必可以将该系统化为狭义 Luenberger 能观规范型。

证明 首先根据定理 3，利用所提出的实现方法一定可以将系统$\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\}$化为广义 Luenberger 能观规范型。

如果系统$\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\}$的能观测指数还满足$\nu_1\leqslant\nu_2\leqslant\cdots\leqslant\nu_m$，那么根据定理 3 的结论有：$\tilde{\boldsymbol{C}}_{ij}=[0,\cdots,0]_{1\times\nu_j}$，$i>j$，$i=1,2,\cdots,m$。根据狭义 Luenberger 能观规范型的定义可知，此时系统$\{\tilde{\boldsymbol{A}},\tilde{\boldsymbol{B}},\tilde{\boldsymbol{C}}\}$是系统$\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\}$的狭义 Luenberger 能观规范型，定理证毕。

4 实例分析

通过 3 个实例的分析对作者在上一节所提出的观点和方法进行了验证。继而提出了一个新的方法将不满足定理 3 的线性 MIMO 系统变换为 Luenberger 能观规范型，并用另 2 个实例验证了该方法正确性和可行性。

例 1：对于如下线性 MIMO 系统$\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\}$，判断其 Luenberger 能观规范型是否存在，若不存在说明原因，若存在将其化为 Luenberger 能观规范型。

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&1&1&0&0&0\\1&2&0&0&0&0\\0&0&1&-2&0&1\\0&-2&1&0&1&1\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&3\\1&-2&3\\1&2&4\\-1&-2&3\\1&0&-2\end{bmatrix}\boldsymbol{u},$$

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}0&2&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&1\\1&2&0&0&0&0\\0&2&0&1&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}。$$

解：首先计算出该系统的能观测矩阵$\boldsymbol{Q}_o$的秩为$\mathrm{rank}(\boldsymbol{Q}_o)=6$，由此判断该系统为完全能观。矩阵$\boldsymbol{C}$的秩为：$\mathrm{rank}(\boldsymbol{C})=3$，但是矩阵$\boldsymbol{C}$的前 3 行为线性相关，即

$$\mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix}0&2&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&1\end{bmatrix}\right)=2\neq\mathrm{rank}(\boldsymbol{C})。$$

根据定理 3，由于该系统的输出矩阵$\boldsymbol{C}$的前 3 行线性相关，所以其广义和狭义 Luenberger 能观规范型是不存在的。换句话说，一个系统如果连广义 Luenberger 能观测规范型存在的条件都无法满足的话，则其狭义 Luenberger 规范型肯定不存在。

例 2：对于如下线性 MIMO 系统$\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\}$，判断其 Luenberger 能观规范型是否存在，若不存在说明原因，若存在则将其化为 Luenberger 能观规范型。

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&1&1&0&0&0\\1&2&0&0&0&0\\0&0&1&-2&0&1\\0&-2&1&0&1&1\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&3\\1&-2&3\\1&2&4\\-1&-2&3\\1&0&-2\end{bmatrix}\boldsymbol{u},$$

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&1\\1&2&0&0&0&0\\0&2&0&1&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}。$$

解：首先计算出该系统的能观测矩阵$\boldsymbol{Q}_o$的秩为

$\text{rank}(\boldsymbol{Q}_o)=6$，所以该系统完全能观。矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的秩为 $\text{rank}(\boldsymbol{C})=3$，而且前 3 行线性无关，即

$$\text{rank}\left(\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&1\end{bmatrix}\right)=3=\text{rank}(\boldsymbol{C})。$$

根据定理 3 该系统的广义 Luenberger 能观规范型存在。利用所提出的该系统的能观测矩阵 $\boldsymbol{Q}_o$ 的关行向量的搜索方案，最终确定其线性无关行向量为：$\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{C}_2,\boldsymbol{C}_3,\boldsymbol{C}_3\boldsymbol{A}$，所以该系统的能观测数为：$v_1=3,v_2=1,v_3=2$。但是由于 $v_3>v_2$，根据定理 4 可知该系统的狭义 Luenberger 能观规范型不存在。根据第二小节所提出的构造方法，构造出非奇异变换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 为

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&1&2&-1&0&0\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&1&0&0&1\\-\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&3&1&0\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-1&0&0\end{bmatrix}。$$

最终得到变换后的系统 $\{\tilde{\boldsymbol{A}},\tilde{\boldsymbol{B}},\tilde{\boldsymbol{C}}\}$ 为

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}=\left[\begin{array}{ccc|c|cc}0&0&\frac{14}{3}&3&0&2\\1&0&-\frac{8}{3}&0&0&2\\0&1&2&0&0&0\\\hline 0&0&1&2&0&0\\\hline 0&0&\frac{8}{9}&-4&0&\frac{5}{3}\\0&0&\frac{2}{3}&0&1&0\end{array}\right]\tilde{\boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix}3&6&-3\\-1&0&6\\1&0&0\\0&2&3\\1&-4&-6\\\frac{2}{3}&4&5\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

$$\tilde{\boldsymbol{y}}=\left[\begin{array}{ccc|c|cc}0&0&1&0&0&0\\\hline 0&0&0&1&0&0\\\hline 0&0&\frac{1}{3}&0&0&1\\\hline 0&0&1&2&0&0\\0&0&\frac{4}{3}&1&0&1\end{array}\right]\tilde{\boldsymbol{x}}$$

变换后的系统 $\{\tilde{\boldsymbol{A}},\tilde{\boldsymbol{B}},\tilde{\boldsymbol{C}}\}$ 的输出矩阵 $\tilde{\boldsymbol{C}}$ 中由于 $\tilde{\boldsymbol{C}}_{13}=\begin{bmatrix}0&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$，所以该系统只满足广义 Luenberger 规范型的定义而不满足狭义 Luenberger 能观规范型的定义，也就是说该系统不存在狭义的 Luenberger 能观规范型，这就验证了定理 3 和定理 4 的正确性。

可以看出狭义 Luenberger 能观规范型是广义 Luenberger 能观测规范型的特殊情况，能够变换为狭义 Luenberger 能观规范型的系统，肯定是满足其广义 Luenberger 规范型存在的充要条件的，但是一个系统如果满足了广义 Luenberger 能观规范型存在的条件，其狭义 Luenberger 能规范型也不一定存在，要看其是否满足进一步的条件即定理 4 或者定理 5 所提出的条件。

例 3：对于如下线性 MIMO 系统 $\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\}$，判断其 Luenberger 能观规范型是否存在，若不存在说明原因，若存在将其化为 Luenberger 能观规范型。

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&1&1&0&0&0\\1&-2&0&0&0&0\\0&0&1&-2&0&1\\0&1&1&0&1&1\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\1&-2&3\\1&0&4\\-1&2&0\\1&0&-2\end{bmatrix}\boldsymbol{u},$$

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&-1&0&0&0\\0&1&0&1&0&1\\0&-1&-1&0&0&0\\0&1&0&1&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x},$$

解：首先判断该系统为完全能观。矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的秩为 $\text{rank}(\boldsymbol{C})=3$，而且其前三行为线性无关，即

$$\text{rank}\left(\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&-1&0&0&0\\0&1&0&1&0&1\end{bmatrix}\right)=3=\text{rank}(\boldsymbol{C})。$$

根据定理 3 可知系统的广义 Luenberger 能观规范型存在。根据提出的方法确定系统能观测矩阵 $\boldsymbol{Q}_o$ 线性无关行向量为：$\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}_2,\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}_3,\boldsymbol{C}_3\boldsymbol{A}$，所以该系统的能观测数为：$v_1=v_2=v_3=2$。进而根据定理五可知该系统的狭义 Luenberger 规范型存在，根据所提出的构造方法，构造出非奇异变换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 为

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0\\\frac{1}{2}&-1&0&0&0&0\\\frac{1}{2}&-1&0&-1&0&0\\\frac{1}{3}&1&\frac{1}{3}&0&0&1\\\frac{5}{6}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&1&0\\-\frac{5}{6}&0&-\frac{1}{3}&0&0&0\end{bmatrix},$$

最终得到变换后的系统$\{\tilde{\boldsymbol{A}},\tilde{\boldsymbol{B}},\tilde{\boldsymbol{C}}\}$为

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 0 & 5 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{4}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0\end{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix}2 & 4 & 2\\ 1 & 0 & 0\\ -8 & -10 & 1\\ -1 & 4 & -2\\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3}\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}\boldsymbol{u},$$

$$\tilde{\boldsymbol{y}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}},$$

可以看出，系统$\{\tilde{\boldsymbol{A}},\tilde{\boldsymbol{B}},\tilde{\boldsymbol{C}}\}$的结构符合狭义Luenberger 规范型的定义，所以通过所提出的方法可以将系统$\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\}$的狭义 Luenberger 能观规范型，从而验证了定理5的正确性。

事实上对于一般的系统，很难保证输出矩阵$\boldsymbol{C}$的前m个行向量线性无关，这时根据定理3，该系统连广义 Luenberger 能观规范型都不存在。但是，由于系统的状态空间描述只是对研究对象的一种描述方法，如果从状态变量和输出变量的选择顺序上来看，同一个对象的状态空间描述能够有很多种，这样就可以换一种状态空间描述方式，将其变换为 Luenberger 能观规范型。

定理6 对于完全能观系统$\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\}$，如果矩阵$\boldsymbol{C}$的秩为$\mathrm{rank}(\boldsymbol{C})=m$，但是其前$m$个行向量线性相关，那么就通过初等行变换将其前$m$个行向量线性无关，状态空间描述上表示为将系统的输出方程两端各左乘以一个初等换法矩阵，物理上相当于对系统输出向量的各个输出分量进行重新编号，实际并未改变系统，其过程如下图所示

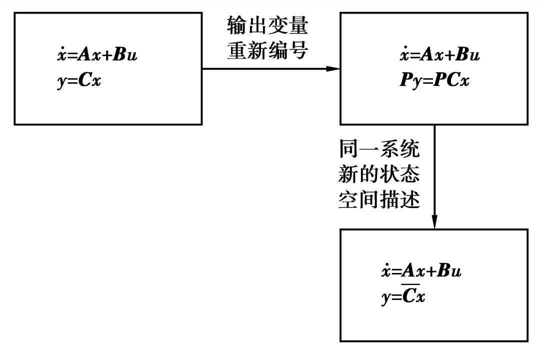

图1 同一物理系统的不同状态空间描述

由于此变换不改变其系统的能观测性，系统$\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\bar{\boldsymbol{C}}\}$同样是是完全能观测的，所以可以将该系统化为 Luenberger 能观测规范型。

例4：对于例1中的系统$\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\}$，该系统虽然完全能观，但是由于其输出矩阵$\boldsymbol{C}$的结构不满足定理3的条件，其 Luenberger 能观规范型是不存在的。问能否通过对输出矩阵$\boldsymbol{C}$进行合理的换行，将换行后的系统变换为 Luenberger 能观规范型。

解：由于$\mathrm{rank}(\boldsymbol{C})=3$，所以存在非奇异矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{PC}=\bar{\boldsymbol{C}}$，且$\bar{\boldsymbol{C}}$的前3行为线性无关。选取矩阵$\boldsymbol{P}$为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}。$$

此时的系统$\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\bar{\boldsymbol{C}}\}$可以表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & -2 & 3\\ 1 & 2 & 4\\ -1 & -2 & 3\\ 1 & 0 & -2\end{bmatrix}\boldsymbol{u},$$

$$\bar{\boldsymbol{y}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}。$$

根据定理3系统$\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\bar{\boldsymbol{C}}\}$的广义 Luenberger 能观规范型存在，按照前述的方法确定其线性无关行向量为：$\bar{\boldsymbol{C}}_1,\bar{\boldsymbol{C}}_2,\bar{\boldsymbol{C}}_2\boldsymbol{A},\bar{\boldsymbol{C}}_2\boldsymbol{A}^2,\bar{\boldsymbol{C}}_3,\bar{\boldsymbol{C}}_3\boldsymbol{A}$，即该系统的能观测数为：$v_1=1,v_2=3,v_3=2$，但是由于$v_2>v_1$，根据定理4可知该系统的狭义 Luenberger 能观规范型不存在。根据所提出的构造方法，构造出非奇异变换矩阵$\boldsymbol{T}$为

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & 1\\ -1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2}\\ 3 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}。$$

最终得到变换后的系统$\{\tilde{\boldsymbol{A}},\tilde{\boldsymbol{B}},\tilde{\boldsymbol{C}}\}$为

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 1\\ 2 & 0 & 0 & \frac{9}{2} & 0 & 8\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{13}{4} & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{8} & 1 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix}0 & 2 & 3\\ \frac{3}{2} & 22 & 17\\ -2 & -14 & -\frac{21}{2}\\ 2 & 4 & 5\\ -\frac{3}{4} & 5 & \frac{15}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{9}{4}\end{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{u}},$$

$$\tilde{\boldsymbol{y}}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 1\\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}}。$$

可以看出，系统$\{\tilde{\boldsymbol{A}},\tilde{\boldsymbol{B}},\tilde{\boldsymbol{C}}\}$的结构符合广义 Luenberger 能观规范型的定义，这就验证了定理 5 的正确性。一个真实的物理系统，可以通过改变其输出顺序的方法而改变其状态空间的描述方式同时保证物理系统本身没有任何变化，而这种输出变量顺序的改变只要求保证其前 m 行为线性无关就可以，所以其初等行变换矩阵的选择也是有多种的，那么变换后该物理系统的状态空间描述不同，其 Luenberger 能观规范型也是不同的。

例 5：对于例 1 中的系统$\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\}$，选取与例 4 不同的初等行变换矩阵 $\boldsymbol{P}$，并将换行后的系统变换为其 Luenberger 能观规范型。

解：选取初等行变换矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

此时，变换后的系统的状态矩阵和控制矩阵都与例 4 相同，其输出矩阵$\bar{\boldsymbol{C}}$为

$$\bar{\boldsymbol{C}}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

按照前几个例子的计算步骤，最终确定其线性无关行向量为：$\bar{\boldsymbol{C}}_1,\bar{\boldsymbol{C}}_2,\bar{\boldsymbol{C}}_2A,\bar{\boldsymbol{C}}_2\boldsymbol{A}^2,\bar{\boldsymbol{C}}_3,\bar{\boldsymbol{C}}_3\boldsymbol{A}$，进而根据所提出的构造方法，构造出非奇异变换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 为

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 1\\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}。$$

最终得到变换后的系统$\{\tilde{\boldsymbol{A}},\tilde{\boldsymbol{B}},\tilde{\boldsymbol{C}}\}$为

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 2\\ 1 & 0 & 0 & \frac{9}{2} & 0 & 8\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{13}{4} & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{8} & 1 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix}0 & 4 & 6\\ \frac{3}{2} & 22 & 17\\ -2 & -14 & -\frac{21}{2}\\ 2 & 4 & 5\\ -\frac{3}{4} & 5 & \frac{15}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{9}{4}\end{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{u}}。$$

$$\tilde{\boldsymbol{y}}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 1\\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}}。$$

可以看出，该系统的结构与例 4 的结构有着较大的差异，但是实际上这 2 种状态空间描述都对应着同一个物理对象。

5　结　论

从线性 MIMO 系统时域理论出发，提出了一种

线性系统能观测矩阵的线性无关行向量的搜索方案，并在此行向量搜索方案的基础之上提出了变换矩阵的构造方法，进而对系统的 Luenberger 能观规范型结构特征及其与变换矩阵的关系进行了分析，根据 Luenberger 能观规范型的结构特征，提出了将系统的 Luenberger 能观规范型按照结构的差异分为广义和狭义 2 种的观点，给出了这 2 种能观规范型实现的充要条件以及狭义 Luenberger 能观规范型的实现的一个充分条件并做了详细的证明，并通过 3 个实例的分析和比较对作者所提出的观点和实现方法进行了验证。进而给出了当系统不满足 Luenberger 能观规范型实现的条件时，在不改变物理系统的前提下，可以通过改变输出变量顺序来改变系统的状态空间描述，从而使得变换后的系统满足 Luenberger 能观规范型实现的条件的方法，并通过两个实例的分析和比较阐述了该方法的有效性。

参考文献：

[1] Luenberger D G. Canonical forms for linear multivariable systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1967, 12(3): 290-293.

[2] Luenberger D G. Observers for multivariable systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1966, 11(2): 190-197.

[3] Luenberger D G. An introduction to observers [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1971, 16(6): 596-603.

[4] Kalman R E. Canonical structure of linear dynamic systems [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of United States of America, 1962, 48(4): 596-600.

[5] Kalman R E, Ho Y C, Narendra K S. Controllability of linear dynamical systems [J]. Contributions to Differential Equations, 1961, 1(3): 189-213.

[6] Kalman R E. Mathematical descriptions of linear dynamical systems [J]. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series A: Control, 1963, 1(2): 152-192.

[7] Gilbert E. Controllability and observability in multivariable control systems [J]. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series A: Control, 1963, 2(1): 128-151.

[8] Morgan B S, Jr. The synthesis of linear multivariable systems by state-variable feedback [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1964, 9(4): 405-411.

[9] Luo Z. Transformations between canonical forms for multivariable linear constant systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1977, 22(2): 252-256.

[10] 江宁强，宋文忠. MIMO 系统转化为 Luenberger 能控规范型的条件[J]. 控制理论与应用，2007，24(5)：866-868.
JIANG Ningqiang, SONG Wenzhong. Restraint on MIMO system in being transformed into the Luenberger's canonical form [J]. Control Theory and Applications, 2007, 24(5): 866-868.

[11] 郑大钟. 线性系统理论[M]. 2 版. 北京：清华大学出版社，2005.

[12] 刘豹. 现代控制理论[M]. 2 版. 北京：机械工业出版社，2005.

[13] 韩肖宁，董达生. 线性系统能控性和能观性的几何判据：核空间、象空间、不变子空间的基本概念[J]. 电力学报，2008，23(1)：21-25.
HAN Xiaoning, DONG Dasheng. The geometric criteria on controllability and observability of linear system: the basic concept of kernel space, image space and invariant space [J]. Journal of Electric Power, 2008, 23(1): 21-25.

[14] Petersen I R. A kalman decomposition for robustly unobservable uncertain linear systems [J]. Systems and Control Letters, 2008, 57(10): 800-804.

[15] Pruneda R E, Solares C, Conejo A J, et al. An efficient algebraic approach to observability analysis in state estimation [J]. Electric Power System Research, 2010, 80(3): 277-286.

（编辑 侯 湘）