

doi: 10.11835/j.issn.1000-582X.2013.07.022

含裂纹结构的区间局部正交无网格伽辽金法分析

周立明, 孟广伟, 刘昕晖, 周振平

(吉林大学 机械科学与工程学院, 长春 130022)

摘要:为了解决含裂纹结构中因材料特性和载荷的不确定性因素给结构设计及计算带来的困难,基于区间数学理论,结合了摄动法、内积空间及无网格伽辽金法,提出基于局部正交的区间无网格伽辽金法。该方法在计算过程中只需节点信息,无需单元信息,采用局部加权正交基函数作为基函数,其导数形式简单且具有通式,又可避免矩阵 $A(x)$ 求逆,编程简单,并推导出区间局部正交无网格平衡方程,利用区间参数摄动法求解平衡方程,还详细推导出区间 J 积分公式,并将其应用到含裂纹结构的不确定性问题中,通过算例验证了本方法的正确性和有效性。

关键词:区间参数;内积空间;区间分析;区间局部正交无网格伽辽金法

中图分类号:O344 **文献标志码:**A **文章编号:**1000-582X(2013)07-127-06

Interval local orthogonal element-free Galerkin method for the plane with cracks

ZHOU Liming, MENG Guangwei, LIU Xinhui, ZHOU Zhenping

(College of Mechanical Science and Engineering, Jilin University, Changchun 130022, China)

Abstract: In order to solve the problem that some structural parameters have errors or uncertainties which are caused by manufacture, installation, measurement or computation in structural analysis and design, an interval local orthogonal element-free Galerkin method (ILOEFGM) is proposed. Based on the interval mathematics, inner product space, perturbation theory, element-free Galerkin method (EFGM) are employed to deduce ILOEFGM equilibrium equations, and the parameter perturbation of interval number is used to solve the ILOEFGM equilibrium equations. As an application of the method, a numerical example based on the problem for plane with cracks is given. The calculated results show that the method is effective.

Key words: interval parameters; inner product space; interval analysis; interval local orthogonal element-free Galerkin method

在实际工程结构中,由于各种因素的影响,常存在一些不可避免的不确定性^[1],如载荷、物理和几何参数、边界条件和系统的失效条件等。处理不确定性问题的数值计算方法主要有随机有限元法^[2]、模糊有限元法^[3]及区间有限元法^[4-7]。随机算法需要

知道不确定参数的概率统计特性,模糊算法求解速度慢,区间算法可以在不知道不确定变量概率分布的情况下定量地考察不确定参数对结构响应的影响,对小范围不确定问题非常有效。由于有限元法基于单元,需要单元信息,前处理工作量大,后处理

收稿日期:2013-02-01

基金项目:吉林省科技厅基金项目(201205011,201215048)

作者简介:周立明(1959-),吉林大学机械学院讲师,主要从事固体计算力学方面的研究。

周振平(联系人),吉林大学机械学院教授,主要从事工程结构优化方面的研究,(E-mail)zhouzhp@jlu.edu.cn。

过程较为复杂,当求解涉及特大变形问题如金属冲压成型、高速冲击和爆炸、流固耦合、动态裂纹扩展等问题时,其网格会产生严重的畸变,对解的精度影响较大。针对于有限元算法存在的这些缺陷,国际计算力学界从 20 世纪 90 年代开始兴起了无网格法^[8-12]的研究热潮。

无网格法具有抗畸变能力强,精度高,后处理方便,可消除体积自锁现象,收敛快等优点。目前应用无网格法解决计算不确定性问题的文章还较少;马丽红等^[13]只给出了近似估算 Winkler 地基板弯曲问题的区间无网格方法,针对含裂纹结构中不存在不确定因素的研究分析还未见报导。笔者基于区间数学理论、结合无网格伽辽金法与内积空间,提出区间局部正交无网格伽辽金法,该方法基函数采用了局部加权正交基函数,其导数具有通式,避免了矩阵 $\mathbf{A}(x)$ 求逆,区间平衡方程采用区间数分解方法求解,还对区间 J 积分公式进行了详细推导,最后对含不确定性问题的共线双边裂纹受均布拉伸有限方板进行了研究。

1 移动最小二乘法

无网格伽辽金法根据移动最小二乘法(moving least square, MLS)产生的光滑函数来近似场函数。假设函数 $u(x)$ 在求解区域 $\Omega \subseteq R^K$ ($K=1,2,3$) 内的近似函数 $u^h(x)$ 为

$$u(x) \cong u^h(x) = \sum_{i=1}^m p_i(x) a_i(x) = \mathbf{p}^T(x) \mathbf{a}(x), \quad (1)$$

式中: $p_i(x)$ 为基函数, $a_i(x)$ 为待定系数, m 为基函数的项数。

二次基函数为

$$\mathbf{p}^T(x) = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2], m = 6(2D). \quad (2)$$

为模拟裂纹尖端区域应力场具有 $r^{-0.5}$ 的奇异性,基函数中引入奇异项^[14],

$$\mathbf{p}^T(x) = \left[1 \quad x \quad y \quad \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \quad \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \right. \\ \left. \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta \quad \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right] \quad m = 7, \quad (3)$$

式中: r 为某点距离裂尖的长度, θ 为该点与裂纹尖端的连线和裂纹线的夹角。

系数 $a_i(x)$ 由加权最小二乘法得到,误差泛函为

$$\mathbf{J}(x) = \sum_{I=1}^n w(x-x_I) [u^h(x_I) - u(x_I)]^2 = \\ \sum_{I=1}^n w(x-x_I) \left[\sum_{i=1}^m p_i(x) a_i(x) - u_I \right]^2, \quad (4)$$

式中: n 是对应于 x 点的权函数 $w(x-x_I) \neq 0$ 的节点数目, u_I 则是 $x=x_I$ 处的节点位移值。

为了使求解的误差最小,令 $\mathbf{J}(x)$ 取值最小,其极值条件为 $\frac{\partial \mathbf{J}(x)}{\partial a_j} = 0$ 。

$$\text{即 } \frac{\partial \mathbf{J}(x)}{\partial a_j} = \mathbf{A}(x) \mathbf{a}(x) - \mathbf{B}(x) \mathbf{u} = 0, \quad (5)$$

式中: $\mathbf{A}(x) = \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{P} =$

$$\sum_{I=1}^n w(x-x_I) \mathbf{p}^T(x_I) \mathbf{p}(x_I), \quad (6)$$

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{P}^T \mathbf{W} = [\mathbf{B}_1(x) \cdots \mathbf{B}_I(x) \cdots \mathbf{B}_n(x)], \quad (7)$$

$$\mathbf{B}_I(x) = \mathbf{p}(x_I) w(x-x_I). \quad (8)$$

由此,可以得到

$$\mathbf{a}(x) = \mathbf{A}^{-1}(x) \mathbf{B}(x) \mathbf{u}. \quad (9)$$

将式(9)代入(1)式得

$$u^h(x) = \Phi(x) \mathbf{u}, \quad (10)$$

$$\text{式中: } \Phi(x) = \mathbf{p}^T(x) \mathbf{A}^{-1}(x) \mathbf{B}(x). \quad (11)$$

权函数采用如下形式:

$$w(x-x_I) = \begin{cases} \frac{(1+\beta^2 r^2)^{-\frac{1+\beta}{2}} - (1+\beta^2)^{-\frac{1+\beta}{2}}}{1 - (1+\beta^2)^{-\frac{1+\beta}{2}}}, & r \leq 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases}. \quad (12)$$

式中: $r = \frac{d_I}{d_{ml}}$, $d_I = |x-x_I|$, d_{ml} 为节点 I 的影响域半径, $d_{ml} = \text{scale} \times c_I$, c_I 为节点 x 与其他节点之间的最大距离, scale 为尺度因子,文中取 $\beta = 2$ 。

2 局部加权正交基函数

为提高移动最小二乘法拟合函数的计算精度,程玉民等^[9]为克服病态方程的带来的计算问题,提出采用加权正交基函数,张建辉等^[15]对采用了加权正交基函数的无网格伽辽金法的形函数及其导函数进行了推导,形式复杂,因此文中给出局部加权正交基函数。

设 $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是内积空间中 v 中非零向量序列,若有

$$(v_i, v_j) = \sum_{k=1}^N v_i(x_k) w_k v_j(x_k) = \begin{cases} \neq 0 & i = j \\ = 0 & i \neq j \end{cases}, \quad (13)$$

则称 $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 v 中关于点集 $\{x_k\}$ 带权 $\{w_k\}$ 正交向量序列(正交系)。

无网格伽辽金法采用 $\{v_k\}$, $k=1,2,\dots,n$, 作为基函数,从而(5)式可变为

$$\begin{bmatrix} (v_1, v_1) & (v_1, v_2) & \cdots & (v_1, v_n) \\ (v_2, v_1) & (v_2, v_2) & \cdots & (v_2, v_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (v_n, v_1) & (v_n, v_2) & \cdots & (v_n, v_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (v_1, u_I) \\ (v_2, u_I) \\ \vdots \\ (v_n, u_I) \end{bmatrix}. \quad (14)$$

根据正交向量的性质有:

$$\begin{bmatrix} (v_1, v_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (v_2, v_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (v_n, v_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (v_1, u_I) \\ (v_2, u_I) \\ \vdots \\ (v_n, u_I) \end{bmatrix} \quad (15)$$

从而得到

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(v_1, v_1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{(v_2, v_2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{(v_n, v_n)} \end{bmatrix} \quad (16)$$

局部加权正交基函数 $v_n(\mathbf{x})$, 使用 Schmidt 方法构造,

$$v_1(\mathbf{x}) = 1, \quad (17)$$

$$v_n(\mathbf{x}) = p_n(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k^{(n)} v_k(\mathbf{x}). \quad (18)$$

局部加权正交基函数保证其仅在节点影响域内正交, 因此在正交化过程中产生的系数 $\alpha_k^{(n)}$ 为常数, 无需对 $\alpha_k^{(n)}$ 求导, 从而局部加权正交基函数求导形式简单, 且有通项:

$$\left. \begin{aligned} v_n(x) &= p_n(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k^{(n)} v_k(x) \\ v_{n,i}(x) &= p_{n,i}(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k^{(n)} v_{k,i}(x) \\ \alpha_k^{(n)} &= \frac{(p_n, v_k)}{(v_k, v_k)} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

由式(19)得, 局部加权正交基函数的 1 阶导数表达式非常简洁, 2 阶导数(20)式、3 阶导数(21)式与 1 阶导数的表达式在表达形式上都是一样的, 因此, 编程也得到了简化。

$$v_{n,ij}(\mathbf{x}) = p_{n,ij}(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k^{(n)} v_{k,ij}(\mathbf{x}), \quad (20)$$

$$v_{n,ijm}(\mathbf{x}) = p_{n,ijm}(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k^{(n)} v_{k,ijm}(\mathbf{x}). \quad (21)$$

3 离散方案

移动最小二乘法不具有插值特性, 笔者计算时采用罚函数法来施加位移边界条件。对于 $a \in a^I$, 由最小势能原理得弹性体平衡控制方程的 Galerkin 离散形式为

$$\mathbf{K}(a) \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(a), \quad (22)$$

式中:

$$\mathbf{K}_{IJ}(a) = \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \mathbf{D}(a) \mathbf{B}_J d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_u} \Phi_I \mathbf{S} \Phi_J d\Gamma, \quad (23)$$

$$\mathbf{F}_I(a) = \int_{\Omega} \Phi_I \mathbf{b}(a) d\Omega + \int_{\Gamma_t} \Phi_I \bar{\mathbf{t}}(a) d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_u} \Phi_I \bar{\mathbf{S}} \mathbf{u} d\Gamma. \quad (24)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$s_i = \begin{cases} 1 & \text{if } u_i \text{ is prescribed on } \Gamma_u \\ 0 & \text{if } u_i \text{ is not prescribed on } \Gamma_u \end{cases} \quad i = 1, 2, \quad (26)$$

式中: $\bar{\mathbf{u}}$ 和 $\bar{\mathbf{t}}$ 分别为边界上给定的位移和面力; $\mathbf{D}(a)$ 为平面问题的弹性矩阵, \mathbf{B} 为应变矩阵, \mathbf{b} 为体力; 罚系数 α 为 $10^5 \sim 10^8$ 倍的弹性模量。采用背景网格算法对式(23)、(24)进行积分。

当 a 在 a^I 内活动时, \mathbf{K} 和 \mathbf{F} 也分别在 $\mathbf{K}(a^I)$ 和 $\mathbf{F}(a^I)$ 中变化。对式(22)应用函数的自然区间扩张原理可以得到

$$\mathbf{K}(a^I) \tilde{\mathbf{u}}^I = \mathbf{F}(a^I). \quad (27)$$

式(27)为静力区间无网格平衡方程, 其基本问题就变成求解所有可能组合所决定的位移集合 Γ ,

$$\Gamma = \{ \tilde{\mathbf{u}} : \mathbf{K} \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{F}, \tilde{\mathbf{u}} \neq 0, \mathbf{K} \in \mathbf{K}(a^I), \mathbf{F} \in \mathbf{F}(a^I) \}. \quad (28)$$

则 $\tilde{\mathbf{u}}^I$ 的区间形式为

$$\tilde{\mathbf{u}}^I = [\underline{\tilde{\mathbf{u}}}, \bar{\tilde{\mathbf{u}}}], \quad (29)$$

式中:

$$\underline{\tilde{\mathbf{u}}} = \min\{\mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}, \mathbf{K} \in \mathbf{K}(a^I), \mathbf{F} \in \mathbf{F}(a^I)\}, \quad (30)$$

$$\bar{\tilde{\mathbf{u}}} = \max\{\mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}, \mathbf{K} \in \mathbf{K}(a^I), \mathbf{F} \in \mathbf{F}(a^I)\}. \quad (31)$$

考虑到不确定参数 a 在小范围变化, 令

$$\mathbf{K}^m = \mathbf{K}(a^m), \mathbf{K}'_{,i}(a^m) = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial a_i} \Big|_{a=a_i}, \mathbf{F}^m = \mathbf{F}(a^m),$$

$$\mathbf{F}'_{,i}(a^m) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial a_i} \Big|_{a=a_i}, (i = 1, 2, \dots, n). \quad (32)$$

式中: \mathbf{F}^m 、 \mathbf{K}^m 分别为均值载荷列阵和均值整体刚度矩阵, a^m 为 a 的均值, n 为区间参数个数。

将含有区间变量的载荷列阵 $\mathbf{F} \in \mathbf{F}(a^I)$ 和刚度矩阵 $\mathbf{K}(a^I)$ 在 $a = a^m$ 处进行 Taylor 展开, 忽略高阶微量, 可得

$$\mathbf{K}(a^I) = \mathbf{K}^m + \sum_{i=1}^n \Delta a_i^I \cdot \mathbf{K}'_{,i}(a^m) = \mathbf{K}^m + \Delta \mathbf{K}^I, \quad (33)$$

$$\mathbf{F}(a^I) = \mathbf{F}^m + \sum_{i=1}^n \Delta a_i^I \cdot \mathbf{F}'_{,i}(a^m) = \mathbf{F}^m + \Delta \mathbf{F}^I, \quad (34)$$

式中, Δa^I 为 a 的离差区间。

由区间无网格控制方程, 有

$$(\mathbf{K}^m + \Delta \mathbf{K}^I)(\tilde{\mathbf{u}}^m + \Delta \tilde{\mathbf{u}}^I) = (\mathbf{F}^m + \Delta \mathbf{F}^I). \quad (35)$$

根据区间分解形式的唯一性,有

$$\tilde{u}^m = (\mathbf{K}^m)^{-1} \mathbf{F}^m, \quad (36)$$

$$\Delta \tilde{u}^I = (\mathbf{K}^m)^{-1} \Delta \mathbf{F}^I - (\mathbf{K}^m)^{-1} \Delta \mathbf{K}^I \tilde{u}^m. \quad (37)$$

将 $\Delta \mathbf{F}^I$ 和 $\Delta \mathbf{K}^I$ 代入到式(34)得

$$\Delta \tilde{u}^I = (\mathbf{K}^m)^{-1} \sum_{i=1}^n \Delta a_i^I \mathbf{F}'_{,i}(a^m) - (\mathbf{K}^m)^{-1} \sum_{i=1}^n \Delta a_i^I \mathbf{K}'_{,i}(a^m) \tilde{u}^m, \quad (38)$$

$$\Delta \tilde{u} = \Delta a_i \left| (\mathbf{K}^m)^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbf{F}'_{,i}(a^m) - (\mathbf{K}^m)^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbf{K}'_{,i}(a^m) \tilde{u}^m \right|. \quad (39)$$

于是结构静力位移的上下界分别为

$$\tilde{u}^I = [\underline{\tilde{u}}, \bar{\tilde{u}}] = [\tilde{u}^m - \Delta \tilde{u}, \tilde{u}^m + \Delta \tilde{u}], \quad (40)$$

式中: \tilde{u}^m 、 $\Delta \tilde{u}$ 为广义位移的均值和离差。 ϵ^I 、 σ^I 可同理得到。

\tilde{u}^I 为广义位移,所以

$$u^I = \Phi(x) \tilde{u}^I. \quad (41)$$

4 区间 J 积分理论

1968 年 Rice^[16] 提出了 J 积分公式。考虑二维裂纹体,如图 1 所示,绕裂尖取任意封闭光滑回路 Γ :回路由裂纹下表面某点开始,沿裂纹尖端逆时针方向进行,终止于上表面任一点,J 积分具有守恒性,定义如下:

$$\mathbf{J} = \int_{\Gamma} (\mathbf{W} dy - \vec{T} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} ds). \quad (42)$$

式中: \vec{T} 为回路 Γ 上的应力分量, \mathbf{W} 为板的应变能密度, \vec{u} 为回路 Γ 上的位移分量,ds 为回路 Γ 上的弧元。

将含有区间变量的 $\mathbf{J}(a^I)$ 在 $a = a^m$ 处进行 Taylor 展开,忽略高阶微量,可得

$$\mathbf{J}(a^I) = \mathbf{J}^m + \sum_{i=1}^n \Delta a_i^I \cdot \mathbf{J}'_{,i}(a^m) = \mathbf{J}^m + \Delta \mathbf{J}^I, \quad (43)$$

$$\mathbf{J}'_{,i}(a^m) = \frac{\partial \mathbf{J}^m}{\partial a_i} \Big|_{a=a_i}. \quad (44)$$

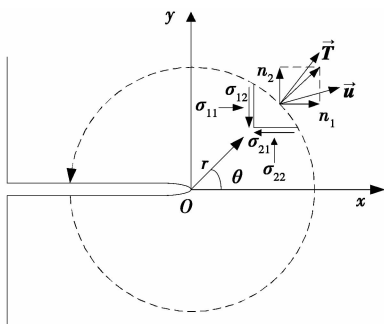


图 1 裂纹尖端 J 积分回路

在计算时采用矩形闭合曲线,如图 2 所示,利用 x 轴的对称关系,令

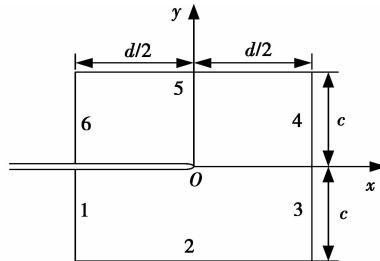


图 2 矩形闭合曲线

$$\mathbf{J}^m = \mathbf{J}_W^m - \mathbf{J}_T^m, \quad (45)$$

$$\mathbf{J}_W^m = 2 \left[\int_0^c \mathbf{W}_4^m dy + \int_c^0 \mathbf{W}_6^m dy \right], \quad (46)$$

$$\mathbf{J}_T^m = 2 \left[\int_0^c \left(-\sigma_x^m \epsilon_x^m - \tau_{xy}^m \frac{\partial v^m}{\partial x} \right)_6 ds + \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \left(\tau_{xy}^m \epsilon_x^m + \sigma_y^m \frac{\partial v^m}{\partial x} \right)_5 ds + \int_0^c \left(\sigma_x^m \epsilon_x^m + \tau_{xy}^m \frac{\partial v^m}{\partial x} \right)_4 ds \right], \quad (47)$$

$$\Delta \mathbf{J}^I = \sum \Delta a_i^I \mathbf{J}'_{,i}(a^m), \quad (48)$$

$$\Delta \mathbf{J} = \Delta a_i \left| \sum \mathbf{J}'_{,i}(a^m) \right|, \quad (49)$$

$$\mathbf{J}^I = [\underline{\mathbf{J}}, \bar{\mathbf{J}}] = [\mathbf{J}^m - \Delta \mathbf{J}, \mathbf{J}^m + \Delta \mathbf{J}]. \quad (50)$$

在线弹性情况下,若泊松比 μ 不为区间变量,则 K_I^I 与 J^I 积分有简单的关系,即

$$\text{平面应力: } K_I^I = \sqrt{E^I J^I}. \quad (51)$$

$$\text{平面应变: } K_I^I = \sqrt{\frac{E^I J^I}{1 - \mu^2}}. \quad (52)$$

5 共线双边裂纹有限方板

共线双边裂纹有限方板受均布拉伸作用,如图 3 所示。方板长 $l=20$ m,裂纹长度 $a=5$ m,泊松比 $\mu=0.3$,在板上下两端受均布拉应力 P ,载荷 P 和弹性模量 E 均值分别为 $E^m=1\ 000$ MPa, $P^m=1.0$ MPa,离差分别为 $\Delta E=100$ MPa, $\Delta P=0.1$ MPa,平面应变问题。取该结构左上四分之一作为计算模型(该构件具有双向对称性),如图 4 所示,在其底部和右侧施加对称边界条件,布置 472 个节点。由 $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$ 所围成的长 $c=4.0$ m,宽度 $b=2.0$ m 区域用来求解 J 积分,积分时该区域内采用 8×8 的高斯点,其他处使用 4×4 的高斯点。在距裂尖 $0.1a$ 范围内采用完全扩展基函数^[17],远离裂尖处采用式(2),罚函数为 $\alpha = 10^6 E^m$, scale=3.5。

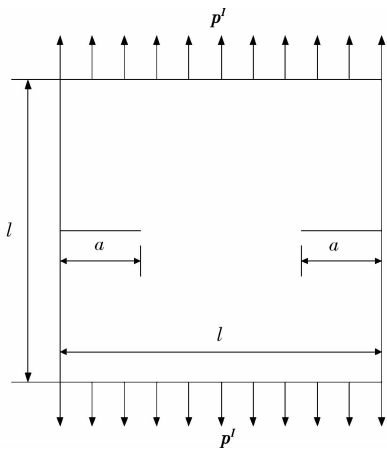


图 3 共线双边裂纹有限方板

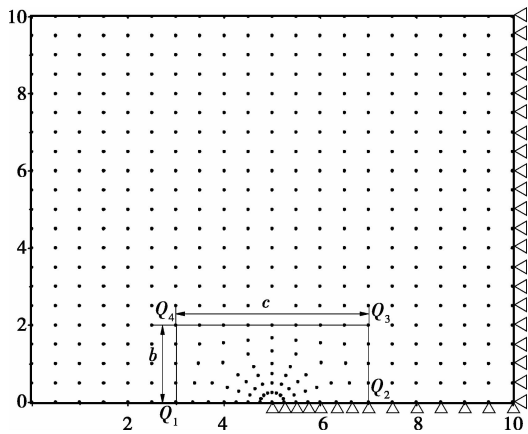


图 4 计算节点布置示意图、对称边界条件和 J 积分区域

求得应力强度因子区间 $K_I^l = [4.394\ 9, 5.366\ 0]$ $\text{MPa}\sqrt{m}$, 当区间变量离差 $\Delta P=0, \Delta E=0$ 时, $K_I^m = 4.880\ 4\ \text{MPa}\sqrt{m}$, 与确定结构下的理论解 $K_I = 4.958\ 2\ \text{MPa}\sqrt{m}$, 误差仅为 1.57%。图 5 所示为裂纹长度与裂纹尖端正前方的径向应力区间 $[\underline{\sigma}_{rr}, \bar{\sigma}_{rr}]$ ($\theta = 0$) 随着 r/a (r 为某点到裂纹距离, a 为裂纹长度) 的变化关系。由图中可得 r/a 为 0.002 处的应力区间为 $[18.939\ 4, 23.132\ 9]$, 曲线 $\underline{\sigma}_{rr}$ 和曲线 $\bar{\sigma}_{rr}$ 很好的模拟出了裂尖应力场 $\frac{1}{\sqrt{r}}$ 的奇异性。图 6 为径向应力区间 $[\underline{\sigma}_{rr}, \bar{\sigma}_{rr}]$ 、周向应力区间 $[\underline{\sigma}_{\theta\theta}, \bar{\sigma}_{\theta\theta}]$ 、和剪应力区间 $[\underline{\sigma}_{r\theta}, \bar{\sigma}_{r\theta}]$ 与角 θ 的变化关系 ($\frac{r}{a} = 0.1$)。

6 结 语

笔者基于区间数学理论、结合无网格伽辽金法和内积空间提出了区间局部正交无网格伽辽金法, 该方法不需单元信息, 只需节点信息, 采用了局部加

权正交基函数作为基函数, 其导数具有通式, 可避免矩阵求逆, 编程简单, 并推导了区间局部正交无网格平衡方程, 进一步推导出了区间 J 积分公式, 并将其应用到含裂纹结构的不确定性问题中, 通过算例验证了本方法的正确性。

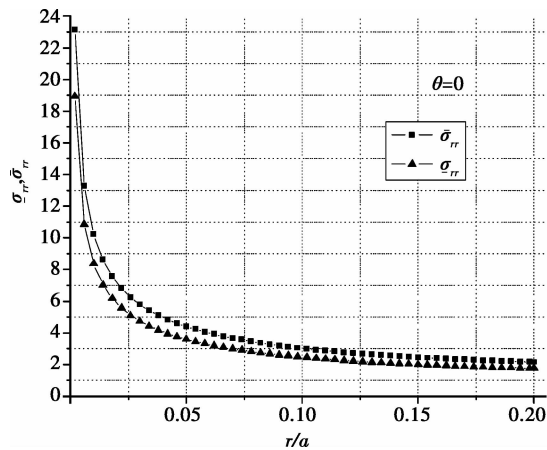


图 5 裂纹尖端正前方应力区间 $[\underline{\sigma}_{rr}, \bar{\sigma}_{rr}]$ ($\theta = 0$)

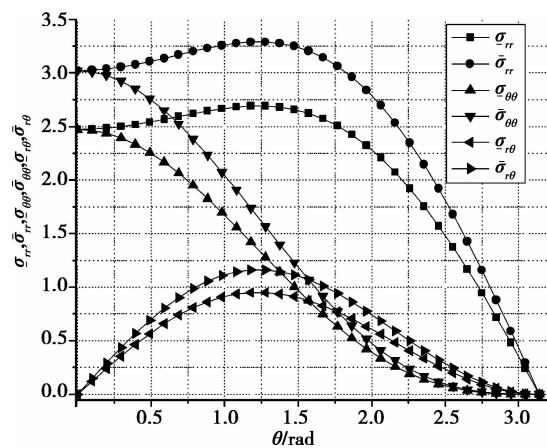


图 6 应力与角度 θ 的变化关系 ($r/a=0.1$)

参考文献:

- [1] 苏静波, 邵国建. 基于区间分析的工程结构不确定性研究现状与展望[J]. 力学进展, 2005, 35(3): 338-344.
SU Jingbo, SHAO Guojian. Current research and prospects on interval analysis in engineering structure uncertainty analysis[J]. Advances in Mechanics, 2005, 35(3): 338-344.
- [2] 秦权. 随机有限元及其进展. I. 随机场的离散和反应矩的计算[J]. 工程力学, 1994, 11(4): 1-10.
QIN Quan. Progress in stochastic finite element methods, part I: discretization of random fields and moments of

- structural responses[J]. *Engineering Mechanics*, 1994, 11(4): 1-10.
- [3] Muhanna R L, Mullen R L. Formulation of fuzzy finite-element methods for solid mechanics problems [J]. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 1999, 14(2): 107-117.
- [4] Alefeld G, Herzberger J. *Introduction to interval computations*[M]. New York: Academic Press, 1983.
- [5] Qiu Z P, Elishakoff I. Antioptimization structures with large uncertain-but-non-random parameters via interval analysis[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1998, 152(3/4): 361-372.
- [6] Chen S H, Qiu Z P, Liu Z S. Perturbation method for computing eigenvalue bounds in structural vibration systems with interval parameters[J]. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 1994, 10(2): 121-134.
- [7] 郭书祥, 吕震宙. 线性区间有限元静力控制方程的组合解法[J]. *计算力学学报*, 2003, 20(1): 34-38.
GUO Shuxiang, Lü Zhenzhou. Advanced combinatorial methods for solving the governing equations of linear static interval finite element method [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2003, 20(1): 34-38.
- [8] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element-free Galerkin methods [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994, 37(2): 229-256.
- [9] 程玉民, 陈美娟. 弹性力学的一种边界无单元法[J]. *力学学报*, 2003, 35(2): 181-186.
CHENG Yumin, CHEN Meijuan. A boundary element-free method for linear elasticity [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2003, 35(2): 181-186.
- [10] 孟广伟, 周立明, 李锋, 等. 摄动随机局部正交无网格伽辽金法[J]. *吉林大学学报: 工学版*, 2010, 40(6): 1556-1561.
MENG Guangwei, ZHOU Liming, LI Feng, et al. Perturbation stochastic local orthogonal element-free Galerkin method [J]. *Journal of Jilin University: Engineering and Technology Edition*, 2010, 40(6): 1556-1561.
- [11] Duan Q L, Belytschko T. Gradient and dilatational stabilizations for stress-point integration in the element-free Galerkin method [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2009, 77(6): 776-798.
- [12] 周立明, 孟广伟, 刘昕晖. 含裂纹结构的模糊随机无网格伽辽金法研究[J]. *华中科技大学学报: 自然科学版*, 2012, 40(1): 95-99.
ZHOU Liming, MENG Guangwei, LIU Xinhui. Fuzzy stochastic element-free Galerkin method for planes with cracks[J]. *Journal of Huazhong University of Science & Technology: Natural Science Edition*, 2012, 40(1): 95-99.
- [13] 马丽红, 邱志平, 王晓军, 等. Winkler 地基板的区间无网格 Galerkin 方法[J]. *岩土工程学报*, 2008, 30(3): 384-389.
MA Lihong, QIU Zhiping, WANG Xiaojun, et al. Interval element-free Galerkin method for plates on Winkler foundation[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2008, 30(3): 384-389.
- [14] Fleming M, Chu Y A, Moran B, et al. Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1997, 40(8): 1483-1504.
- [15] 张建辉, 邓安福. 基于正交基函数的薄板弯曲无单元法 MLS 导函数及其应用[J]. *计算力学学报*, 2003, 20(3): 355-360.
ZHANG Jianhui, DENG Anfu. Element-free-method MLS derivatives based on orthogonal basic functions and its application to thin plate bending [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2003, 20(3): 355-360.
- [16] Rice J R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notch and cracks[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1968, 35(2): 379-386.
- [17] Belytschko T, Fleming M. Smoothing, enrichment and contact in the element-free Galerkin method [J]. *Computers and Structures*, 1999, 71(2): 173-195.