

doi:10.11835/j.issn.1000-582X.2014.01.005

# 面齿轮轮齿刚度的计算方法及其影响因素分析

李政民卿, 黄 鹏, 李晓贞

(南京航空航天大学 江苏省精密与微细制造技术重点实验室, 南京 210016)

**摘 要:**面齿轮轮齿刚度是面齿轮传动啮合刚度的基本组成,其计算方法的解决可为面齿轮啮合刚度以及后续动力学分析奠定必要的理论基础。基于 Buckingham 的观点,将面齿轮齿形看作是由沿齿长方向一系列变压力角的齿条组成,得到沿轴向和径向都为变截面的面齿轮简化齿形,获得了面齿轮轮齿啮合变形的计算公式,求解出了面齿轮轮齿刚度;并通过与有限元法进行对比分析,验证了面齿轮轮齿刚度计算方法的可行性;分析了面齿轮模数、压力角以及齿宽对其轮齿刚度的影响。结果表明:面齿轮模数越大,其轮齿刚度沿齿根到齿顶的变化率越小;面齿轮压力角越大,其轮齿刚度越大,但沿齿根到齿顶的变化率基本不变;面齿轮齿宽越大,其轮齿刚度越大,且沿齿根到齿顶的变化率较之压力角的影响大。

**关键词:**面齿轮;变形;刚度;因素分析

中图分类号:TH 132

文献标志码:A

文章编号:1000-582X(2014)01-026-05

## A calculation method of the stiffness of face gear tooth and analysis of its influence factors

LI Zhengminqing, HUANG Peng, LI Xiaozhen

(Jiangsu Key Laboratory of Precision and Micro-Manufacturing Technology, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

**Abstract:** Tooth stiffness of face gear is one of the components of meshing stiffness of face gear drives. Its resolve can build excellent base for calculation method of meshing stiffness and analysis of dynamic for face gear drives. Based on Buckingham's standpoint, along the length direction of the tooth of face gear, any one of its sections can be considered as a section of rack with varying pressure angle. According to above theory, the tooth form of face gear is simulated successfully. The method of calculation of the tooth's stiffness of face gear is obtained. Compared with conclusion of tooth's stiffness by FEM in the same parameters, it is proofed to be correct. Through analysis of influence of tooth's stiffness by main design parameters of face gear, the benefit conclusions are drawn. That is, the changing ratio of tooth's stiffness decreases with the increase of module, and the tooth's stiffness increases with the increase of pressure angle but the changing ratio almost remains constant. The tooth's stiffness increases with the increase of tooth width and the influence of changing ratio from tooth root to tooth crest is bigger than that of pressure angle.

**Key words:** face gear; deformation; stiffness; factor analysis

面齿轮传动是圆柱齿轮与面齿轮相啮合的齿轮传动,具有重合度大,无需防错位设计,与面齿轮啮

合的直齿圆柱齿轮无轴向力,传递动力性能优越等优点<sup>[1-3]</sup>。据波音公司报道,采用面齿轮作为主减速

收稿日期:2013-08-22

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51105194);国家留学基金资助项目(201206835011)

作者简介:李政民卿(1977-),男,南京航空航天大学副教授,主要从事航空机械传动研究,(E-mail) lzmq\_cmee@nuaa.edu.cn。

器第一级齿轮传动的阿帕奇 Block-III 型直升机已于 2009 年 11 月 23 日首飞成功<sup>[4]</sup>。在面齿轮传动中,由啮合刚度引起的内部激励是其传动的主要动态激励之一,且其啮合刚度是由啮合过程中的圆柱齿轮和面齿轮的轮齿刚度决定,因此需要对面齿轮轮齿刚度的计算方法开展研究。

圆柱和圆锥齿轮啮合刚度的计算方法从 20 世纪就开始研究<sup>[5-6]</sup>,特别是圆柱齿轮的啮合刚度,其理论计算方法已趋于成熟;Yesilyurt 等<sup>[7]</sup>对圆柱齿轮的单齿啮合刚度的理论计算方法进行了研究;林腾蛟等<sup>[8]</sup>采用 ANSYS 软件对弧齿锥齿轮的啮合刚度进行了分析,但尚未形成其解析计算方法。对于面齿轮传动啮合刚度而言,虽然其圆柱齿轮轮齿刚度的计算可参考现有成熟理论,但面齿轮轮齿刚度的计算方法并不多见。杨振等<sup>[9]</sup>在分析面齿轮传动系统参数激励振动特性时,对于面齿轮啮合刚度的处理只是停留在圆柱齿轮轮齿刚度计算方法的基础上;林腾蛟等<sup>[10]</sup>在研究正交面齿轮传动非线性振动特性时,仅仅分析了面齿轮副综合啮合刚度的函数形式,并未明确面齿轮轮齿刚度的具体求解方法。目前,面齿轮轮齿刚度的求解仍多采用有限元法计算,分析效率低。因此,笔者对面齿轮轮齿刚度的解析计算方法进行研究,寻求一种高效的面齿轮轮齿刚度计算方法。

## 1 面齿轮齿形分析

基于 Buckingham 的观点<sup>[11]</sup>:面齿轮齿形可以看作是沿齿长方向一系列变压力角的齿条组成,如图 1(a)所示;其沿齿长方向上某一截面的齿形分析,如图 1(b)所示。

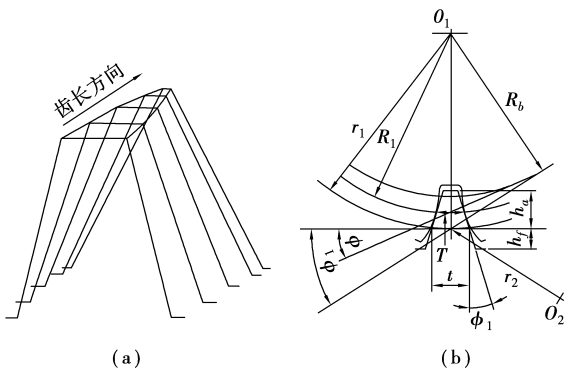


图 1 面齿轮齿形及齿形分析图

根据图 1(b)中的几何关系,可求出面齿轮啮合半径  $r_2$  处的齿厚<sup>[11]</sup>为

$$t = 2r_1 [(T/2R_1) + \text{inv}\phi_1 - \text{inv}\phi], \quad (1)$$

式中: $r_1$ 为渐开线直齿轮啮合半径; $T$ 为渐开线直齿

轮在分度圆处的齿槽宽,其值为

$$T = \pi m / 2,$$

其中: $m$ 为模数; $R_1$ 为渐开线直齿轮分度圆半径; $\phi$ 为渐开线直齿轮压力角; $\phi_1$ 为节点压力角,其值为

$$\phi_1 = \arccos(R_b / r_1)$$

其中  $R_b$  为渐开线直齿轮基圆半径。

齿条的齿顶高为

$$h_a = r_1 - R_r - c, \quad (2)$$

式中: $R_r$ 为渐开线直齿轮齿根圆半径; $c$ 为齿顶间隙。

齿条的齿根高  $h_f$  为

$$h_f = R_\alpha - r_1, \quad (3)$$

式中  $R_\alpha$  为渐开线直齿轮齿顶圆半径。

根据上述面齿轮齿形分析方法,以表 1 所列面齿轮参数在 matlab 中绘制无过渡圆弧的面齿轮单齿模型,如图 2 所示。

表 1 面齿轮传动的齿轮副主要几何设计参数

面齿轮副	模数 $m/\text{mm}$	齿数 $z$	压力角 $\alpha/(\text{°})$	齿宽 $b/\text{mm}$	轴交角 $\gamma/(\text{°})$
圆柱齿轮	4	25	20	15	90
面齿轮	4	50	20	14	

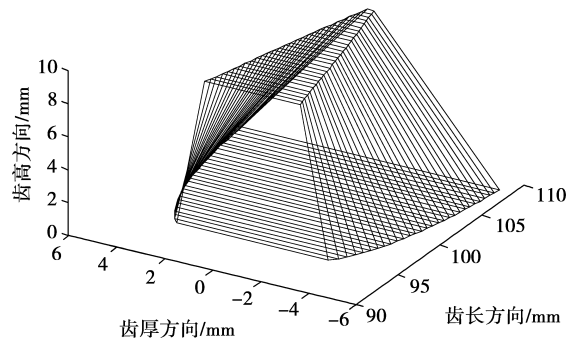


图 2 面齿轮单齿模型仿真图

## 2 面齿轮轮齿刚度计算方法及可行性分析

基于面齿轮的复杂齿形,在求解面齿轮轮齿刚度时需要对面齿轮齿形进行合理简化。根据仿真图 2,可将面齿轮齿形简化成由一系列沿齿高方向变化的梯形截面组成,如图 3 所示。

根据图 3 中面齿轮齿形的简化形式,其轮齿刚度的解析法求解思想仍然基于圆柱齿轮轮齿刚度的当量齿轮解析分析方法,即面齿轮的轮齿综合弹性变形包括轮齿的弯曲变形、剪切变形、接触变形以及由齿根基础弹性倾斜引起的附加变形<sup>[12-14]</sup>。分析

中,先通过求解轮齿各单一变形后,再将其相加,得出面齿轮轮齿在单位载荷作用下接触点处的总变形量为

$$\delta_i = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4, \quad (4)$$

式中: $\delta_1$  为弯曲变形; $\delta_2$  为剪切变形; $\delta_3$  为轮齿接触变形; $\delta_4$  为齿根基础弹性倾斜引起的附加变形。

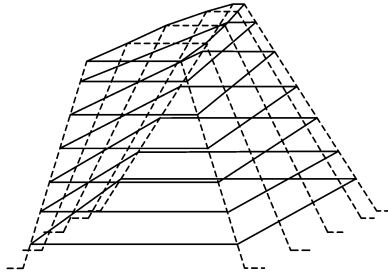


图 3 面齿轮单齿模型简化示意图

根据刚度和变形量-柔度的关系可知,面齿轮在接触点处的轮齿刚度

$$k_f = 1/\delta_i. \quad (5)$$

### 2.1 面齿轮轮齿的弯曲变形和剪切变形

面齿轮轮齿的弯曲变形和剪切变形分析中,将在接触范围内的轮齿分成若干小段*i*,并把小段*i*看成一个悬臂梁,如图 4(a)所示;每个小段*i*沿齿长方向的截面可看作是随面齿轮齿高方向变化的梯形截面,如图 4(b)所示。

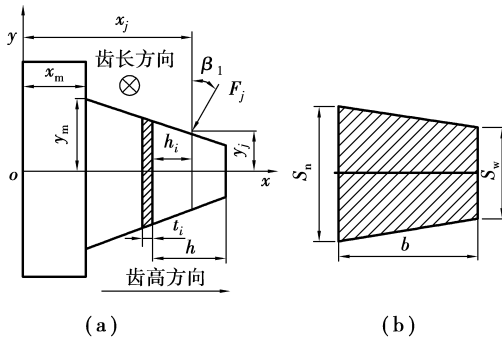


图 4 面齿轮轮齿简化成的悬臂梁模型

根据截面上切应力的分布规律作以下 2 个假设<sup>[15]</sup>:

- 1)横截面上各点切应力的方向都平行于剪应力的方向;
- 2)切应力沿截面宽度均匀分布。

根据上述假设,面齿轮轮齿在接触点处的弯曲变形和剪切变形可通过对各小段的变形量求和获得。

面齿轮轮齿在接触点处弯曲变形包括单位长度载荷作用在小段*i*上产生的弯矩变形和横向变形。

根据图 4(a)所示,取小段*i*的厚度为*t<sub>i</sub>*,截面面

积为*A<sub>i</sub>*,截面模量为*I<sub>i</sub>*;小段*i*至载荷作用点沿*x*方向的距离为*h*,载荷作用点处的半齿厚为*y<sub>i</sub>*,齿根处的半齿厚为*y<sub>m</sub>*;泊松比为*v*,弹性模量为*E*;面齿轮齿宽为*b*;载荷与*y*轴间的夹角为*β<sub>j</sub>*;则单位长度载荷*F<sub>j</sub>*作用在小段*i*上的弯矩变形为

$$\delta_{i1} = \frac{F_j(h_i \cos \beta_j - y_j \sin \beta_j)}{2E \bar{I}_i} (t_i^2 + 2t_i h_i), \quad (6)$$

式中 $\bar{I}_i = 2I_i I_{i+1} / (I_i + I_{i+1})$ 。

由*F<sub>j</sub>*对小段*i*产生的横向变形为

$$\delta_{i2} = \frac{F_j \cos \beta_j}{6E \bar{I}_i} (2t_i^3 + 3t_i^2 h_i), \quad (7)$$

因此,单位载荷作用下小段*i*的弯曲变形为

$$\delta_{bi} = \delta_{i1} + \delta_{i2}. \quad (8)$$

由*F<sub>j</sub>*对小段*i*产生的剪切变形为

$$\delta_{si} = \frac{2.4 F_j t_i (1 - v) \cos \beta_j}{E \bar{A}_i}, \quad (9)$$

式中 $\bar{A}_i = 2A_i A_{i+1} / (A_i + A_{i+1})$ 。

根据图 4(b)可知,由于各小段的截面均是随面齿轮齿高位置变化的梯形截面,因此其截面模量*I<sub>i</sub>*为

$$I_i = \frac{b(S_n^4 + S_w^4)}{48 |S_n - S_w|}, \quad (10)$$

截面面积为

$$A_i = b(S_n + S_w)/2, \quad (11)$$

式中沿齿高方向任意高度*h*处的*S<sub>n</sub>*、*S<sub>w</sub>*可采用图 5 所示模型计算。

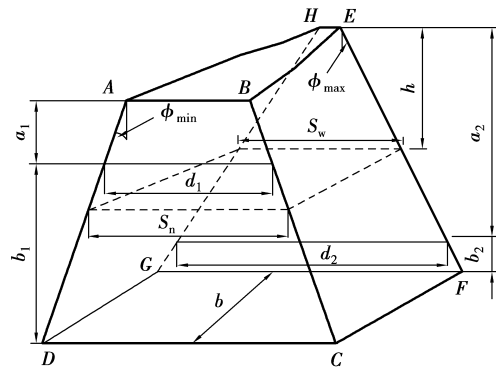


图 5 S<sub>n</sub>、S<sub>w</sub> 的计算模型

根据图 5 可知,利用梯形 ABCD 可求得

$$S_n = d_1 + 2(h - a_1) \tan \phi_{\min}, \quad (12)$$

式中: $\phi_{\min}$ 为面齿轮内半径节线处的压力角;*d<sub>1</sub>*为面齿轮内半径节线处的齿厚;*a<sub>1</sub>*为面齿轮内半径节线位置到齿顶的距离。*d<sub>1</sub>*和*a<sub>1</sub>*的计算式分别为

$$d_1 = 2r_{11}(T/2R_1 - \text{inv } \phi_{\min} + \text{inv } \phi),$$

$$a_1 = r_{11} - R_r - c,$$

式中*r<sub>11</sub>*为面齿轮内半径。

利用梯形 EFGH 可求得

$$S_w = d_2 + 2(h - a_2)\tan \phi_{\max}, \quad (13)$$

式中:  $\phi_{\max}$  为面齿轮外半径节线处的压力角;  $d_2$  为面齿轮外半径节线处的齿厚;  $a_2$  为面齿轮外半径节线位置到齿顶的距离。  $d_2$  和  $a_2$  的计算式分别为:

$$d_2 = 2r_{12}(T/2R_1 - \text{inv} \phi_{\max} + \text{inv} \phi),$$

$$a_2 = r_{12} - R_r - c,$$

式中  $r_{12}$  为面齿轮外半径。

利用式(8)~(13),可分别求出面齿轮轮齿在载荷作用点处沿载荷方向的弯曲变形和剪切变形,其中弯曲变形为

$$\delta_1 = \sum_{i=1}^n \delta_{bi} \cos \beta_j, \quad (14)$$

剪切变形为

$$\delta_2 = \sum_{i=1}^n \delta_{si} \cos \beta_j, \quad (15)$$

式中  $n$  为小段  $i$  的个数。

### 2.2 面齿轮轮齿接触变形和齿根基础弹性倾斜引起的附加变形

面齿轮接触变形分析是以布希涅斯克问题的解为基础,根据物体表面上有相同距离的点在公切面上形成类椭圆区域的结论,得出面齿轮轮齿的接触变形<sup>[16]</sup>为

$$\delta_3 = \frac{3JF_j(\theta_g + \theta_f)}{8\pi\rho_x}, \quad (16)$$

式中:  $J$  为椭圆积分系数,可通过查椭圆积分系数表获得;  $\rho_x$  为接触区域椭圆长半径;  $\theta_g$  和  $\theta_f$  可由式(17)确定,即

$$\theta_k = \frac{4(S_k^2 - 1)}{ES_k^2}, \quad (17)$$

式中:  $k$  分别为  $g$  和  $f$ ;  $S_k$  为材料纵向延伸和横向压缩比的系数;  $E$  为材料的弹性模量。

面齿轮齿根基础弹性倾斜引起的附加变形<sup>[17-18]</sup>为

$$\delta_4 = \frac{F_j \cos^2 \beta_j}{Eb} \left[ \begin{array}{l} 5.306 \left( \frac{L_f}{H_f} \right)^2 + 2(1 - \nu) \left| \frac{L_f}{H_f} \right| + \\ 1.534 \left| 1 + \frac{0.4167 \tan^2 \beta_j}{1 + \nu} \right| \end{array} \right], \quad (18)$$

式中:  $L_f = x_j - x_m - y_j \tan \beta_j$ ;  $H_f = 2y_m$ 。

### 2.3 轮齿刚度解析法的可行性验证

为验证上述面齿轮轮齿刚度计算方法的可行性,将解析法计算结果与有限元法计算结果进行对比分析。根据表 1 中所列面齿轮参数,建立面齿轮有限元分析模型,如图 6 所示。

利用图 6 中模型,将计算得到的变形量转换为轮齿刚度并与上述面齿轮轮齿刚度解析计算方法进

行比较,如表 2 所示。

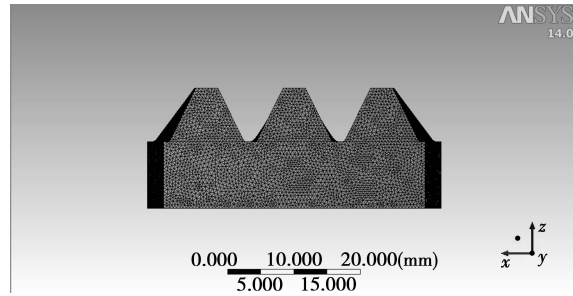


图 6 面齿轮有限元分析模型

表 2 解析法与有限元法的刚度计算比较表

接触点号	$10^{-8} k_f / (\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	
	解析法	有限元法
1	5,079	4,649
2	4,398	3,762
3	3,672	3,269
4	3,099	2,724
5	2,547	2,319
6	2,140	2,018
7	1,766	1,716
8	1,526	1,368

为分析面齿轮刚度解析法的可行性,定义解析法与有限元法的相对平均偏差为

$$\eta = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \frac{|\text{解析法计算值} - \text{有限元法分析值}|}{\text{有限元法分析值}} \times 100\%, \quad (19)$$

式中  $N$  为接触点个数。

根据表 2 可知,解析法与有限元法的相对平均偏差为 10.32%。因此,上述刚度的解析计算方法是可行的。

## 3 面齿轮主要设计参数对轮齿刚度的影响分析

模数、压力角以及齿宽作为面齿轮的主要设计参数,对面齿轮轮齿刚度有影响。

为研究面齿轮主要设计参数对其轮齿刚度的影响,分析中取圆柱齿轮齿数为 25,面齿轮齿数为 50,并以面齿轮模数、压力角和齿宽分别作为单一参数变化进行分析。分析中面齿轮主要设计参数及其变化,如表 3 所示。结果分析图中,横坐标的“0”位均为轮齿的齿根位置。

表 3 面齿轮主要设计参数及其变化

序号	模数 $m/\text{mm}$	压力角 $\alpha/(\text{°})$	齿宽 $b/\text{mm}$
1	2.5/3/4/5	20	14
2	4	20/22.5/25/27	14
3	4	20	10/12/14/16

根据表 3 中第 1 组参数,分析得出面齿轮模数对其轮齿刚度的影响,如图 7 所示。

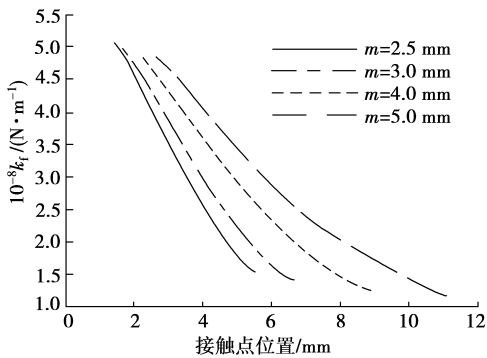


图 7 模数对面齿轮轮齿刚度的影响

根据图 7 可知,面齿轮模数越大,其轮齿刚度变化曲线的斜率越小。因此,当面齿轮模数越大时,其轮齿刚度沿齿根到齿顶的变化率越小。

根据表 3 中第 2 组参数,分析得出面齿轮压力角对其轮齿刚度的影响,如图 8 所示。

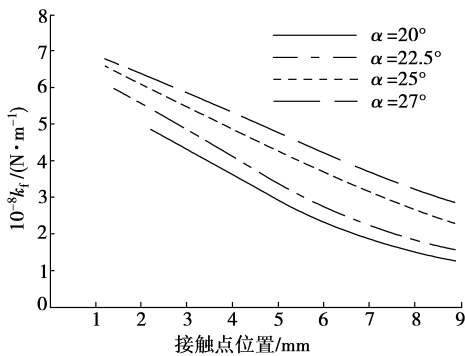


图 8 压力角对面齿轮轮齿刚度的影响

根据图 8 可知,当面齿轮压力角越大,其轮齿刚度越大,但沿齿根到齿顶的刚度变化率基本不变。

根据表 3 中第 3 组参数,分析得出面齿轮齿宽对其轮齿刚度的影响,如图 9 所示。

根据图 9 可知,当面齿轮齿宽越大,其轮齿刚度越大,且沿齿根到齿顶的刚度变化较之压力角的影响大。

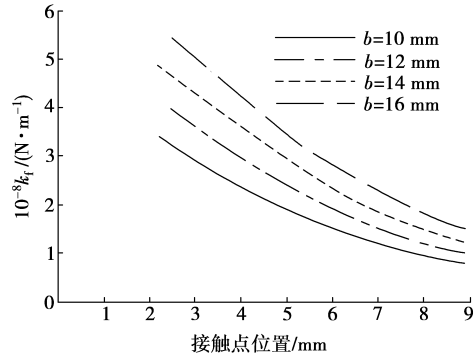


图 9 齿宽对面齿轮轮齿刚度的影响

### 4 结 论

由于面齿轮齿形较为复杂,因此采用面齿轮当量齿形的简化模型,推导了其轮齿刚度的计算方法,并通过与有限元法的对比分析,验证了面齿轮轮齿刚度解析计算方法的可行性;同时还分析了主要设计参数对面齿轮轮齿刚度的影响,得出了相应规律;为进一步研究面齿轮啮合刚度的计算方法和面齿轮传动的动力学特性等奠定必要的理论基础。

#### 参考文献:

[1] Litvin F L, Bossler R B, Chen Y J D. Application of face gear drives in helicopter transmissions [J]. Journal of Mechanical Design, 1994, 116 (3) :672-676.

[2] Handschuh R F, Lewicki D G, Bossler R B. Experimental testing of prototype face gears for helicopter transmissions [J]. Journal of Aerospace Engineering, 1994, 208 (2) :129-136.

[3] Bill R C. Summary highlights of the advanced rotorcraft transmission (ART) program [R]. New York, American Inst of Aeronautics and Astronautics, 1992.

[4] Mesa A. Boeing AH-64D Apache Block III structures test aircraft makes 1st flight [EB/OL]. (2009-12-4) [2013-05-12]. <http://boeing.mediaroom.com/index.php?s=20295&item=977>.

[5] Pimsam M, Kazerounian K. Efficient evaluation of spur gear tooth mesh load using pseudo-interference stiffness estimation method [J]. Mechanism and Machine Theory, 2002, 37(8) :769-786.

[6] Comell R W. Compliance and stress sensitivity of spur gear teeth [J]. Journal of Mechanical Design, 1981, 103 (2) :447-459.

(下转第 38 页)

- Journal of Operational Research, 2005, 160(1): 72-87.
- [15] 王要武, 成飞飞. 基于模糊时间工作流网的建筑产品设计过程资源管理与仿真[J]. 土木工程学报, 2009, 42(12): 189-196.
- WANG Yaowu, CHENG Feifei. Resource management and simulation for building product design based on fuzzy time workflow net [J]. China Civil Engineering Journal, 2009, 42(12): 189-196.
- [16] 唐加福, 刘士新, 陈以增, 等. 产品优化设计的资源分配模型[J]. 系统工程学报, 2003, 18(3): 284-288.
- TANG Jiafu, LIU Shixin, CHEN Yizeng, et al. Resource allocation in product optimization design [J]. Journal of Systems Engineering, 2003, 18(3): 284-288.
- [17] 田锋, 李人厚, 张金成. 模糊定时高级 Petri 网的协同设计活动建模和分析[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2004, 16(3): 267-274.
- TIAN Feng, LI Renhou, ZHANG Jincheng. Modeling and analysis of collaborative design activities using fuzzy-timing high-level petri nets [J]. Journal of Computer Aided Design & Computer Graphics, 2004, 16(3): 267-274.
- [18] 林闯. 随机 Petri 网和系统性能评价[M]. 北京: 清华大学出版社, 2000.
- [19] Jensen K. Colored petri nets: basic concepts, analysis methods, and practical use[M]. 2nd ed. New York: Springer, 1996.
- [20] Jensen K. An introduction to the theoretical aspects of colored petri nets [J]. Lecture Notes in Computer Science, 1994, 803: 230-272.

(编辑 张 苹)

## (上接第 30 页)

- [7] Yesilyurt I, Gu F S, Ball A D. Gear tooth stiffness reduction measurement using modal analysis and its use in wear fault severity assessment of spur gears [J]. NDT&E International 2003, 36 (5): 357-372.
- [8] 林腾蛟, 杨妍妮, 李润方, 等. 弧齿锥齿轮传动内部动态激励数值仿真[J]. 重庆大学学报, 2009, 32(6): 609-613.
- LIN Tengjiao, YANG Yanni, LI Runfang, et al. Numerical simulation of the internal dynamic excitation of a spiral bevel gear transmission [J]. Journal of Chongqing University, 2009, 32(6): 609-613.
- [9] 杨振, 王三民, 范叶森, 等. 面齿轮传动系统参数激励振动特性分析[J]. 重庆大学学报, 2011, 34(1): 26-35.
- YANG Zhen, WANG Sanmin, FAN Yesen, et al. Vibration characteristics of face-gear transmission system with parametric excitation [J]. Journal of Chongqing University, 2011, 34(1): 26-35.
- [10] 林腾蛟, 冉雄涛. 正交面齿轮传动非线性振动特性分析[J]. 振动与冲击, 2012, 31(2): 25-31.
- LIN Tengjiao, RAN Xiongtao. Nonlinear vibration characteristic analysis of a face-gear drive [J]. Journal of Vibration and Shock, 2012, 31(2): 25-31.
- [11] Buckingham E. Analytical mechanics of gears [M]. New York: Dover Publications, 1949.
- [12] Band R V, Peterson R E. Load and stress cycle in gear teeth [J]. Mechanical Engineering, 1929, 51 (9): 653-662.
- [13] Weber C. The deformation of loaded gears and the effect on their load carrying capacity [R]. UK: Department of Scientific and Industrial Research, 1951.
- [14] Attia A Y. Deflection of spur gear teeth cut in thin rims [J]. Journal of Engineering for Industry, 1964, 86(4): 333-341.
- [15] 刘鸿文. 材料力学 [M]. 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [16] 李政民卿, 朱如鹏. 面齿轮传动的承载接触分析[J]. 南京航空航天大学学报, 2010, 42(2): 219-223.
- LI Zhengminqing, ZHU Rupeng. Load tooth contact analysis on face gear driver [J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2010, 42(2): 219-223.
- [17] 吴俊飞, 郭建章. 变厚齿轮轮齿啮合综合刚度确定方法研究[J]. 青岛化工学院学报: 自然科学版, 2002, 23(1): 74-76.
- WU Junfei, GUO Jianzhang. Study of the method for determining the meshing synthesis rigidity of beveloid gear tooth [J]. Journal of Qingdao Institute of Chemical Technology: Natural Science, 2002, 23(1): 74-76.
- [18] 李润方, 王建军. 齿轮系统动力学: 振动、冲击、噪声 [M]. 北京: 科学出版社, 1996.

(编辑 张 苹)