

doi:10.11835/j.issn.1000-582X.2016.02.001

# 传递功率对行星齿轮传动系分岔特性的影响规律

李同杰<sup>1,2</sup>, 靳广虎<sup>1</sup>, 鲍和云<sup>1</sup>, 朱如鹏<sup>1</sup>

(1.南京航空航天大学机电学院, 南京 2100161; 2.安徽科技学院机械工程学院, 安徽 滁州 233100)

**摘要:**针对行星齿轮减速器工作过程中传递功率的频繁变化容易导致其运动状态发生突变的问题, 探讨行星齿轮传动系统随传递功率的分岔特性。基于 2K-H 型行星齿轮传动系统纯扭转非线性动力学模型, 采用 CPNF(continuous Poincaré-Newton-Floquet) 方法研究了传递功率对行星齿轮传动系统周期运动稳定性的局部精细分岔规律, 运用直接数值积分的方法绘制了系统随功率的全局分岔图, 并对两种仿真结果进行了对比。结果发现, 在某些参数组合下, 行星齿轮传动系统会共存几个稳定或不稳定的周期轨道; 当功率在 196~220 kW 范围内, 随着功率值的逐渐增大, 行星齿轮传动系统的各种形态的周期轨道均是通过倍周期倒分岔的途径在相应功率分岔点处发生稳定性突变的; 在轻载工况下(传递小功率), 行星齿轮非线性系统容易呈现混沌运动状态。

**关键词:**行星轮系; CPNF 方法; 周期轨道; 功率; 分岔

中图分类号: TH132.425

文献标志码: A

文章编号: 1000-582X(2016)02-001-09

## Bifurcation characteristics of a nonlinear planetary gear train changing with power

LI Tongjie<sup>1,2</sup>, JIN Guanghu<sup>1</sup>, BAO Heyun<sup>1</sup>, ZHU Rupeng<sup>1</sup>

(1. College of Mechanical and Electrical Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, P.R.China; 2. College of Mechanical Engineering, Anhui Science & Technology University, Chuzhou 2331001, Anhui, P.R.China)

**Abstract:** As the motion state of a planetary gear reducer is easy to bifurcate when the transmitted power changes, a study on the bifurcation characteristics of a planetary gear train changing with the transmitted power is explored in this paper. The local bifurcation characteristics were studied with CPNF(continuous Poincaré-Newton-Floquet) method on the basis of the nonlinear torsional vibration model of 2K-H planetary gear train. As a comparison, the global bifurcation diagram changing with power was calculated by using the method of numerical integration. The comparison results reveal that a nonlinear planetary gear train with certain parameters may have several coexisting periodic trajectories, some of them may be stable and some may be unstable. As the power gradually increases in the range of 196~220 kW, the stable asymptotic stable periodic trajectory may change into chaos in the way of inverse period doubling bifurcation. And chaos is easy to appear when the planetary gear train is under light load condition.

**Keywords:** planetary gears; CPNF method; periodic solutions; power; bifurcation

收稿日期: 2015-11-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51475226, 51305196); 安徽省教育厅自然科学重点项目(KJ2015A179)。

Supported by National Natural Science Foundation of China(51475226, 51305196) and Key Project of Anhui Department of Education Anhui Province(KJ2015A179).

作者简介: 李同杰(1980-), 男, 安徽科技学院副教授, 南京航空航天大学博士后, 主要从事齿轮传动系统非线性动力学特性研究, (E-mail) litongjie2000@163.com。

行星齿轮传动具有体积小、重量轻、速比大、效率高等特点,在航空、船舶传动、汽车、起重机械及其他机械传动中获得了越来越广泛的应用,吸引了众多专家学者的研究目光<sup>[1-5]</sup>。齿轮副间存在的时变啮合刚度、齿侧间隙等因素,决定了行星齿轮传动系统强非线性的本质<sup>[6]</sup>,文献[7-12]的研究结论也证实了行星齿轮传动系统存在诸如运动状态的稳定性分岔、幅值跳跃等非线性动力学特征。

在工程实际中,机器的启动、停车以及工作状态的转换都会使得行星齿轮系统所传递的功率频繁变化,因而非常有必要研究行星齿轮传动系统随传递功率的分岔特性,以揭示传递功率的变化对其运动状态稳定性的影响规律,获得各种稳定的周期轨道与相应传递功率区间的映射关系。目前,有关行星齿轮传动系统分岔特性方面的研究还比较少见。文献[6]采用直接数值积分法,定性研究了行星齿轮传动系统随齿侧间隙等参数的全局分岔规律。文献[8]采用改进的 PNF 方法结合 Floquet 原理研究了行星齿轮传动系统的共存周期轨道的稳定性随转速的局部精细分岔规律。而关于行星齿轮传动系统随传递功率的分岔特性研究尚未见报道。

考虑到 PNF(Poincaré-Newton-Floquet)方法需要在每次迭代计算前单独预估迭代初始值,计算效率较低,笔者将基于虞烈等<sup>[13]</sup>提出的 CPNF(continuous Poincaré-Newton-Floquet)方法研究传递功率对行星齿轮传动系统周期轨道稳定性的局部精细分岔规律,并采用直接数值积分的方法绘制系统随功率的全局分岔图,以验证仿真结果的可靠性。

## 1 力学模型及振动微分方程

本文力学模型采用文献[6]中的 2K-H 型行星齿轮传动系统纯扭转非线性动力学模型,以下是该模型的简单介绍。2K-H 型行星齿轮系统有 1 个太阳轮(以 S 表示),  $N$  个行星齿轮(第  $i$  个齿轮以  $p_i$  表示), 1 个行星架(以 C 表示)和 1 个内齿圈(以 R 表示,固定于基础之上)组成,各齿轮为直齿圆柱齿轮,系统的扭转振动模型如图 1 所示。

图中,太阳轮、行星架、第  $i$  个行星轮的角位移分别以  $\theta_s$ 、 $\theta_c$ 、 $\theta_{p_i}$  表示;太阳轮、第  $i$  个行星轮、内齿圈的基圆半径分别以  $r_{bs}$ 、 $r_{bpi}$ 、 $r_{br}$  表示;行星架半径以  $r_c$  表示,其值为太阳轮与行星轮的节圆半径之和,标准安装下亦即太阳轮与行星轮的分度圆半径之和;太阳轮与第  $i$  路行星轮组成的外啮合副的啮合刚度、啮合阻尼系数、半齿侧间隙、综合啮合误差分别以  $k_{spi}$ 、 $c_{spi}$ 、 $b_{spi}$ 、 $e_{spi}$  表示;内齿圈与第  $i$  路行星轮组成的内啮合副的啮合刚度、啮合阻尼系数、半齿侧间隙、静传递误差分别以  $k_{rpi}$ 、 $c_{rpi}$ 、 $b_{rpi}$ 、 $e_{rpi}$  表示,各齿轮的压力角均为  $\alpha$ 。

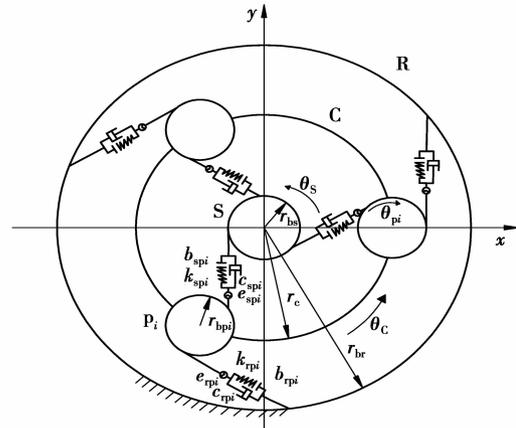


图 1 系统扭转非线性振动模型

Fig.1 Nonlinear vibration model of the system

引入如下量纲一的参数  $\Omega = \omega/\omega_n$ ,  $\tau = \omega_n t$ ,  $\omega_n = \sqrt{\frac{k_{mspi}}{m_{eq1}}}$ ,  $m_{eq1} = \frac{m_c m_s}{m_c + m_s}$ ,  $m_{eq2} = \frac{m_c m_s}{m_c + 2m_s}$ ,  $m_s = \frac{J_s}{r_{bs}^2}$ ,

$m_{pi} = \frac{J_{pi}}{r_{bpi}^2}$ ,  $m_c = \frac{J_c + \sum_{i=1}^3 m_{pi} r_c^2}{r_{bc}^2}$ ,  $X = \bar{X} b_c$ ,  $\dot{X} = \bar{X} b_c \omega_n$ ,  $\ddot{X} = \bar{X} b_c \omega_n^2$ ,  $b = b_c \bar{b}$ ,  $e = b_c \bar{e}$ 。其中,  $J_s$ 、 $J_{pi}$ 、 $J_c$  分别为太阳轮转动惯量、第  $i$  个行星轮转动惯量、行星架转动惯量;  $b_c$  为位移标称尺度,  $X$  表示相应齿轮副的啮合点相对位移;  $e$  表示相应齿轮副的静传递误差;  $\omega$  表示齿轮的啮合频率,  $\omega_n$  表示固有频率;  $k_{mspi}$  表示系统外啮合副的平均啮合刚度, 字母上加“ $\bar{\cdot}$ ”表示相应物理量量纲一的结果。

根据刚体平面运动微分方程并结合上述量纲一的参数,容易列写行星轮系的纯扭转量纲一的振动微分方程为

$$\begin{aligned}
& \dot{\bar{X}}_{spi} + \frac{1}{\omega_n^2 m_{eq1}} \sum_{i=1}^N [k_{mspi} + k_{aspi} \sin(\tau\Omega + \varphi_{spi})] f(\bar{X}_{spi}, \bar{b}_{spi}) + \\
& \frac{1}{\omega_n^2 m_{pi}} [k_{mspi} + k_{aspi} \sin(\tau\Omega + \varphi_{spi})] f(\bar{X}_{spi}, \bar{b}_{spi}) + \frac{1}{\omega_n m_{pi}} c_{spi} \dot{\bar{X}}_{spi} - \\
& \frac{1}{\omega_n^2 m_{pi}} [k_{mrpi} + k_{arpi} \sin(\tau\Omega + \varphi_{rpi})] f(\bar{X}_{sc} - \bar{X}_{spi} - \bar{e}_{spi} - \bar{e}_{rpi}, \bar{b}_{rpi}) + \\
& \frac{1}{\omega_n m_{pi}} c_{rpi} (\dot{\bar{X}}_{sc} - \dot{\bar{X}}_{spi} - \dot{\bar{e}}_{spi} - \dot{\bar{e}}_{rpi}) + \frac{1}{\omega_n m_{eq1}} \sum_{i=1}^N c_{spi} \dot{\bar{X}}_{spi} + \\
& \frac{1}{\omega_n^2 m_{ci}} \sum_{i=1}^N [k_{mrpi} + k_{arpi} \sin(\tau\Omega + \varphi_{rpi})] f(\bar{X}_{sc} - \bar{X}_{spi} - \bar{e}_{spi} - \bar{e}_{rpi}, \bar{b}_{rpi}) + \\
& \frac{1}{\omega_n m_{ci}} \sum_{i=1}^N c_{rpi} (\dot{\bar{X}}_{sc} - \dot{\bar{X}}_{spi} - \dot{\bar{e}}_{spi} - \dot{\bar{e}}_{rpi}) = \frac{F_D}{(m_s b_c \omega_n^2)} + \frac{F_L}{(m_c b_c \omega_n^2)} - \dot{\bar{e}}_{spi}(\tau) \dot{\bar{X}}_{sc} + \\
& \frac{1}{\omega_n^2 m_{eq2}} \sum_{i=1}^N [k_{mspi} + k_{aspi} \sin(\tau\Omega + \varphi_{spi})] f(\bar{X}_{spi}, \bar{b}_{spi}) + \\
& \frac{1}{\omega_n m_{eq2}} \sum_{i=1}^N c_{spi} \dot{\bar{X}}_{spi} + \frac{2}{\omega_n m_{ci}} \sum_{i=1}^N c_{rpi} (\dot{\bar{X}}_{sc} - \dot{\bar{X}}_{spi} - \dot{\bar{e}}_{spi} - \dot{\bar{e}}_{rpi}) + \\
& \frac{2}{\omega_n^2 m_{ci}} \sum_{i=1}^N [k_{mrpi} + k_{arpi} \sin(\tau\Omega + \varphi_{rpi})] f(\bar{X}_{sc} - \bar{X}_{spi} - \bar{e}_{spi} - \bar{e}_{rpi}, \bar{b}_{rpi}) = \\
& \frac{F_D}{(m_s b_c \omega_n^2)} + \frac{2F_L}{(m_c b_c \omega_n^2)}。
\end{aligned} \tag{1}$$

方程(1)中,  $f$  表示相应齿轮副上的间隙非线性函数;  $k_{mrpi}$  表示系统内啮合副的平均啮合刚度;  $k_{aspi}$  表示系统外啮合副刚度波动幅值;  $k_{arpi}$  表示系统内啮合副刚度波动幅值;  $\varphi_{spi}$  表示系统第  $i$  路外啮合副刚度波动初相位;  $\varphi_{rpi}$  表示系统第  $i$  路内啮合副刚度波动初相位;  $F_D$  为作用在太阳轮上的等效扭矩,  $F_L$  为作用在行星架上的等效扭矩。

## 2 CPNF 方法

CPNF<sup>[13-14]</sup>法是将确定参数下用来判断系统周期轨道稳定性的 PNF 方法与参数延续算法相结合形成的一种计算方法。这种方法利用预测校正原理,根据上一个参数值下求得的周期轨道对下一个参数值下的迭代初始值进行预估,很好地解决了迭代的初始值问题。该方法的另一优点是在迭代计算周期轨道的过程中可以同步获得周期轨道的状态转移矩阵,使周期轨道的求解与稳定性判断工作可以同步进行,因而大大提高了周期轨道稳定性局部分岔的计算效率。

对于如下含有参数  $\omega$  的  $n$  维非线性动力系统

$$\dot{\mathbf{u}} = f(\mathbf{u}, \omega, t), (\mathbf{u}, \omega, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n. \tag{2}$$

应用庞加莱映射,可以把求解该非线性动力系统周期解曲线的问题转变为求解点映射系统

$$\mathbf{u}^{(k+1)}(\omega) = P(\omega, \mathbf{u}^{(k)}) \tag{3}$$

在庞加莱截面上的不动点

$$\mathbf{u}^*(\omega) = P(\omega, \mathbf{u}^*(\omega)) \tag{4}$$

的问题,即求解非线性代数方程

$$\mathbf{Q}(\omega, \mathbf{u}) = \mathbf{u} - P(\omega, \mathbf{u}) = 0 \tag{5}$$

的解曲线问题。CPNF 方法将该问题的求解过程分成了预测和校正两步。

### 2.1 预测

假设已经求得  $\omega = \omega^k$  时周期解在庞加莱截面上的不动点  $\mathbf{u}^k$ ,那么采用欧拉型积分公式,可以得到如下预测公式

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{(k+1)}^0 = \mathbf{u}_k - [\mathbf{Q}'_u(\omega_k, \mathbf{u}_k)]^{-1} \times \mathbf{Q}'_\omega(\omega_k, \mathbf{u}_k) \times \Delta\omega = \\ \mathbf{u}_k - [\mathbf{E} - \mathbf{P}'_u(\omega_k, \mathbf{u}_k)]^{-1} \times \mathbf{P}'_\omega(\omega_k, \mathbf{u}_k) \times \Delta\omega \\ \omega_k + \Delta\omega, \end{cases} \quad (6)$$

式中:  $\mathbf{P}'_u(\omega_k, \mathbf{u}_k) = \mathbf{D}P(\omega_k, \mathbf{u}_k)$  为当参数取  $\omega = \omega_k$  时 Poincaré 映射(3)在  $\mathbf{u}_k$  处的 Jacobi 矩阵;  $\mathbf{P}'_\omega(\omega_k, \mathbf{u}_k)$  为 Poincaré 映射(3)在参数  $\omega = \omega_k$  处的梯度向量;  $\mathbf{P}'_u(\omega_k, \mathbf{u}_k)$  及  $\mathbf{P}'_\omega(\omega_k, \mathbf{u}_k)$  可以在第  $k$  步校正过程中获得,  $\mathbf{u}_{(k+1)}^0$  为第  $(k+1)$  步校正计算的迭代初始值。

## 2.2 校正

第  $k$  步校正过程实际就是利用 PNF 方法求解参数  $\omega = \omega_k$  时系统周期解的牛顿迭代过程,不同的是,牛顿迭代的初始值已经由前一步的预测过程给出,而不需要由计算者人为给定,从而大大提高了求解的成功率,节省了计算时间。其系统第  $k$  步周期解的迭代公式为

$$\mathbf{u}_k^{(i+1)} = \mathbf{u}_k^{(i)} - [\mathbf{D}P(\omega_k, \mathbf{u}_k^{(i)}) - \mathbf{E}]^{-1} [P(\omega_k, \mathbf{u}_k^{(i)}) - \mathbf{u}_k^{(i)}], \quad (7)$$

其中,  $\mathbf{D}P(\omega_k, \mathbf{u}_k^{(i)})$  以及  $P(\omega_k, \mathbf{u}_k^{(i)})$  由联立微分方程组

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\phi}} = \mathbf{D}f_u(\mathbf{u}, \omega_k, t) \big|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_k} \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\phi} \in \mathbf{R}^{n \times n}, \\ \dot{\mathbf{u}} = f(\mathbf{u}, \omega_k, t), \end{cases} \quad (8)$$

以  $(\mathbf{E}, \mathbf{u}_k^i)$  为初始值积分一个庞加莱映射周期  $T$  得到。式(8)中  $\mathbf{D}f_u(\mathbf{u}, \omega, t)$  为非线性动力系统(2)的 Jacobi 矩阵。当利用公式(7)迭代求出满足精度要求的第  $k$  步周期解  $\mathbf{u}_k$  时,就同时得到了相应的状态传递矩阵  $\mathbf{D}P(\omega_k, \mathbf{u}_k)$ ,可以用于周期解  $\mathbf{u}_k$  的稳定性分析以及第  $(k+1)$  步的预测。

为了实现第  $(k+1)$  步的预测,还需要计算梯度向量  $\mathbf{P}'_\omega(\omega_k, \mathbf{u}_k)$ ,可以通过如下微分方程组

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\psi}} = \mathbf{D}f_u(\mathbf{u}, \omega, t) \boldsymbol{\psi} + \mathbf{D}f_\omega(\mathbf{u}, \omega, t), \boldsymbol{\psi} \in \mathbf{R}^n, \\ \dot{\mathbf{u}} = f(\mathbf{u}, \omega_k, t), \end{cases} \quad (9)$$

由以  $(0, \mathbf{u}_k)$  为初始值积分一个庞加莱映射周期  $T$ ,即可得到  $(\mathbf{P}'_\omega(\omega_k, \mathbf{u}_k), P(\mathbf{u}_k))$ 。式(9)中,  $\mathbf{D}f_\omega(\mathbf{u}, \omega, t)$  为非线性动力系统(2)的关于参数  $\omega$  的梯度向量。

## 3 行星齿轮传动系随传递功率的分岔规律

以下运用 CPNF 方法研究行星齿轮非线性系统的传递功率  $P$  在 196~220 kW 变化时,系统周期运动稳定性的分岔特性。行星齿轮系统的基本参数如下:模数  $m = 1.75$  mm,压力角  $\alpha = 20^\circ$ ,太阳轮齿数  $z_s = 24$ ,行星轮齿数  $z_{pi} = 39$ ,内齿圈齿数  $z_r = 106$ ,标称尺度  $b_c = 10$   $\mu\text{m}$ ,行星轮个数  $N = 3$ ,内外啮合副齿侧间隙  $b_{spi} = b_{mpi} = 50$   $\mu\text{m}$ ,量纲一的转速  $\Omega = 0.958$  6。

CPNF 方法在进行校正时,涉及到计算非线性动力系统(1)对应状态方程的 Jacobi 矩阵  $\mathbf{D}f_u(\mathbf{u}, \omega, t)$ 。考虑到纯扭转非线性动力学模型的非光滑性, Jacobi 矩阵  $\mathbf{D}f_u(\mathbf{u}, \omega, t)$  采用有限差分形式近似代替<sup>[14]</sup>。

### 3.1 周期一轨道随功率的稳定性分岔

当传递功率  $P = 220$  kW 时,经 PNF 方法计算,只获得了一个稳定的周期一不动点  $P_1(0.993\ 218\ 5, -2.647\ 681\ 1, 5.401\ 011\ 1, -1.933\ 860\ 6)$ ,其轨道相图如图 2 所示。

由此考虑在小于  $P = 220$  kW 的某段功率区间内,系统的运动可能以周期一轨道的形态稳定运行,为了确定周期一轨道保持稳定的功率范围以及具体的失稳分岔点功率值,以下通过 CPNF 方法计算了周期一轨道的 Floquet 乘子的最大模随功率  $P$  的变化曲线,如图 3 所示。

从图 3 中可以看到,在  $P$  为 211~220 kW 范围内,周期一轨道的 Floquet 乘子的最大模小于 1,即运动状态能够保持稳定;在  $P$  为

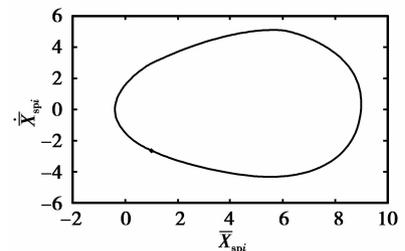


图 2  $P = 220$  kW 时稳定的周期一轨道  
Fig.2 Stable phase trajectory of  $P_1$   
when  $P = 220$  kW

196~211 kW 范围内, Floquet 乘子的最大模大于 1,即周期一运动依然存在,但已经发生了 Lyapunov 意义

下的失稳<sup>[15]</sup>,变成不稳定的运动形态。由此可确定,周期一轨道稳定性的分岔功率为  $P=211\text{ kW}$ 。

为了确定周期一轨道的稳定性在  $P=211\text{ kW}$  处具体的分岔途径,笔者模拟了在功率  $P=211\text{ kW}$  前后,周期一轨道具有最大模的 Floquet 乘子穿出复数域上单位圆的途径,如图 4 所示,图中箭头方向指示了当传递功率由大变小时,周期一轨道 Floquet 乘子的变化走向。显然,Floquet 乘子是由实轴负半轴穿出单位圆的,根据周期轨道分岔理论<sup>[15]</sup>,当传递功率由大变小时经过分岔点功率  $P=211\text{ kW}$  时,周期一轨道会发生倍周期分岔而失稳裂变成周期二轨道。

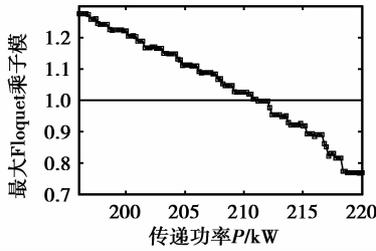


图 3 周期一轨道最大 Floquet 乘子模随功率的变化曲线

Fig.3 The changing curve of  $P_1$  Floquet multiplier with power

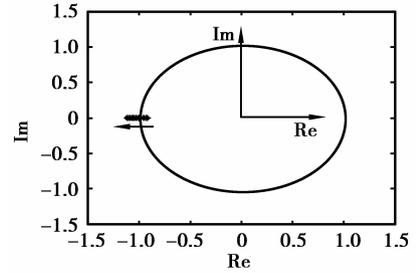


图 4 周期一轨道 Floquet 乘子随功率穿出单位圆的途径

Fig.4 The way across the unit circle of  $P_1$  Floquet multiplier

### 3.2 周期二轨道随功率的稳定性分岔

由以上周期一运动的稳定性分岔分析可知,在小于  $211\text{ kW}$  的某个功率区间内,系统的运动将会以稳定的周期二轨道的形态存在。

当传递功率  $P=211\text{ kW}$  时,经 PNF 方法计算,获得了一个不稳定的周期一不动点  $P_1(1.122\ 263\ 389\ 05, -2.681\ 586\ 539\ 89, 5.462\ 945\ 802\ 425, -1.903\ 188\ 660\ 61)$  和一个稳定的周期二不动点  $P_2(0.956\ 373\ 419\ 33, -2.724\ 380\ 076\ 71, 4.664\ 356\ 134\ 64, -1.953\ 595\ 730\ 27)$ ,其周期轨道相图分别如图 5 和图 6 所示。

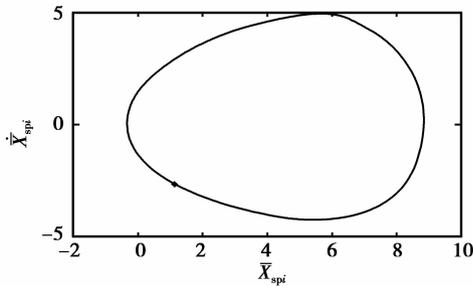


图 5  $P=211\text{ kW}$  时不稳定的周期一轨道

Fig.5 Unstable phase thajjectory of  $P_1$  when  $P=211\text{ kW}$

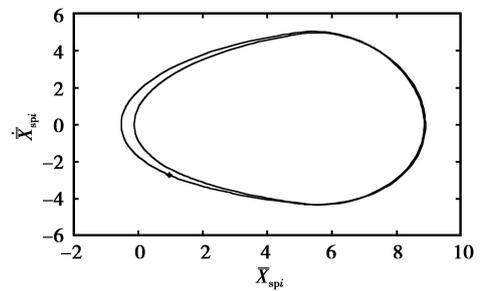


图 6  $P=211\text{ kW}$  时稳定的周期二轨道

Fig.6 Stable phase thajjectory of  $P_2$  when  $P=211\text{ kW}$

以上计算结果验证了 CPNF 方法关于周期一轨道在  $P=211\text{ kW}$  处发生倍周期分岔的预测。为了确定周期二轨道保持稳定状态的功率范围以及具体的失稳分岔点功率值,通过 CPNF 方法计算的周期二运动的 Floquet 乘子的最大模随功率  $P$  的变化曲线如图 7 所示。

从图 7 中可以看到,在  $P$  为  $205.8\sim 211\text{ kW}$  范围内,周期二轨道的最大 Floquet 乘子模小于 1,即运动状态能够保持稳定;在  $P$  为  $196\sim 205.8\text{ kW}$  范围内,最大 Floquet 乘子模大于 1,即周期二运动依然存在,但已经发生了 Lyapunov 意义下的失稳<sup>[9]</sup>,变成了不稳定的运动形态。由此可以确定,周期二轨道稳定性的分岔功率为  $P=205.8\text{ kW}$ 。

为了确定周期二轨道稳定性在  $P=205.8\text{ kW}$  时具体的分岔途径,笔者模拟了功率由大变小时经过  $P=205.8\text{ kW}$  时,周期二轨道具有最大模的 Floquet 乘子穿出复数域上单位圆的途径,如图 8 所示。显然,

Floquet 乘子是由实轴负半轴穿出单位圆的,根据周期轨道分岔理论<sup>[15]</sup>,当传递功率由大变小经过分岔点功率  $P=205.8\text{ kW}$  时,周期二轨道会发生倍周期分岔而失稳裂变成周期四轨道。

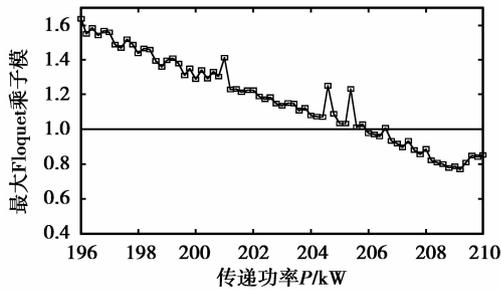


图 7 周期二轨道最大 Floquet 乘子模随功率的变化曲线  
Fig.7 The changing curve of  $P_2$  Floquet multiplier with power

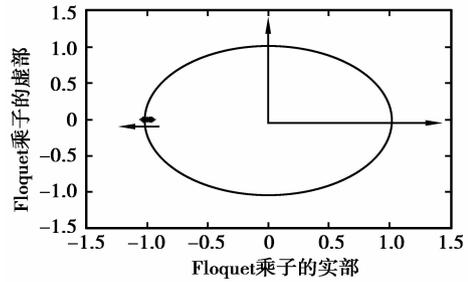


图 8 周期二轨道 Floquet 乘子随功率穿出单位圆的途径  
Fig.8 The way across the unit circle of  $P_2$  Floquet multiplier

### 3.3 周期四轨道随功率的稳定性分岔

由以上周期二运动的稳定性分岔分析可知,在小于  $205.8\text{ kW}$  的某个功率范围内,系统的运动将会以稳定的周期四轨道的形态存在。

当传递功率为  $205.8\text{ kW}$  时,经 PNF 方法计算,获得了一个不稳定的周期一不动点  $P_1(1.246\ 607\ 377\ 329, -2.707\ 429\ 571\ 563, 5.523\ 882\ 489\ 132, -1.867\ 422\ 471\ 809)$ 、一个不稳定的周期二不动点  $P_2(2.098\ 566\ 305\ 065, -2.734\ 138\ 541\ 796, 8.311\ 191\ 163\ 223, -1.323\ 076\ 184\ 707)$  和一个稳定的周期四不动点  $P_4(2.797\ 053\ 954\ 0, -2.606\ 852\ 968\ 25, 8.572\ 761\ 368\ 432\ 6, -1.587\ 082\ 095\ 98)$ ,其周期轨道相图分别如图 9~11 所示。

以上计算结果验证了 CPNF 方法关于周期二轨道在  $P=205.8\text{ kW}$  处发生倍周期分岔的预测。为了确定周期四轨道保持稳定的功率范围以及具体的失稳分岔点功率,以下通过 CPNF 方法计算了周期四轨道的 Floquet 乘子的最大模随功率  $P$  的变化曲线,如图 12 所示。

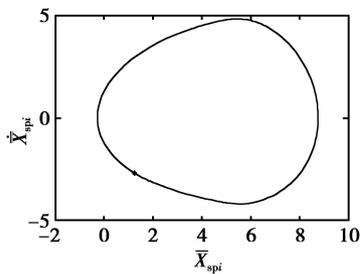


图 9  $P=205.8\text{ kW}$  时不稳定的周期一轨道相图  
Fig.9 Unstable phase thajjectory of  $P_1$  when  $P=205.8\text{ kW}$

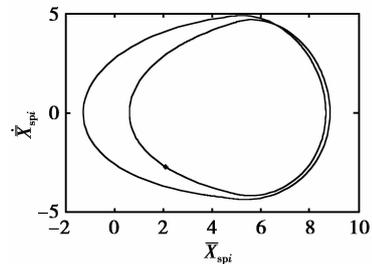


图 10  $P=205.8\text{ kW}$  时稳定的周期二轨道相图  
Fig.10 Unstable phase thajjectory of  $P_2$  when  $P=205.8\text{ kW}$

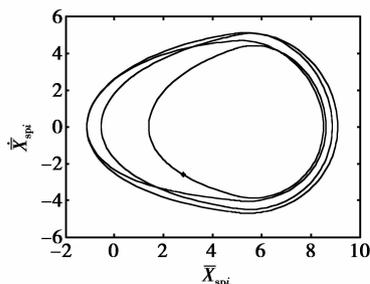


图 11  $P=205.8\text{ kW}$  时不稳定的周期四轨道相图  
Fig.11 Stable phase thajjectory of  $P_4$  when  $P=205.8\text{ kW}$

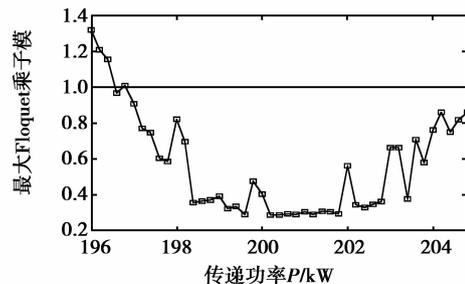


图 12 周期四轨道最大 Floquet 乘子模随功率的变化曲线  
Fig.12 The changing curve of  $P_4$  Floquet multiplier with power

从图 12 中可以看到,在 196.8~205.8 kW 范围内,周期四轨道 Floquet 乘子的最大模小于 1,即运动状态能够保持稳定;在 196.0~196.8 kW 范围内,Floquet 乘子的最大模大于 1,即周期四轨道依然存在,但已经发生了 Lyapunov 意义下的失稳<sup>[15]</sup>,变成不稳定的运动形态。由此可确定,周期四轨道稳定性的分岔功率为  $P=196.8$  kW。

为了确定周期四轨道稳定性在  $P=196.8$  kW 时具体的分岔途径,笔者模拟了功率由大变小时,周期四轨道具有最大模的 Floquet 乘子穿出复数域上单位圆的途径,如图 13 所示。显而易见,Floquet 乘子是由实轴负半轴穿出单位圆的,也就是说随着功率的由大变小,周期四轨道在  $P=196.8$  kW 处会发生倍周期分岔而失稳裂变成周期八轨道<sup>[15]</sup>。

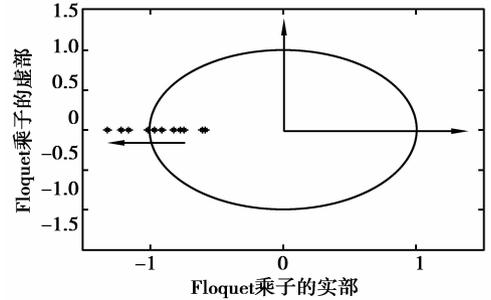


图 13 周期四轨道 Floquet 乘子随功率穿出单位圆的途径

Fig.13 The way across the unit circle of  $P_4$  Floquet multiplier

### 3.4 传递功率为 196.0 kW 时系统的共存周期轨道及其稳定性

当传递功率为 196.0 kW 时,采用 PNF 方法计算获得了如下 4 个共存的周期不动点:

- $P_1(1.326\ 969\ 56, -2.720\ 465\ 9, 5.563\ 583\ 4, -1.840\ 685\ 9)$ ;
- $P_2(2.478\ 602\ 02, -2.779\ 455\ 9, 8.898\ 100\ 5, -0.994\ 215\ 5)$ ;
- $P_4(-0.007\ 560\ 10, -2.361\ 369\ 9, 2.470\ 765\ 6, -1.816\ 708\ 5)$ ;
- $P_8(3.313\ 389\ 72, -2.629\ 371\ 0, 8.819\ 356\ 8, -1.698\ 036\ 1)$ 。

同时得到了以上各周期不动点的状态转移矩阵  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_4$ 、 $P_8$ 。

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \begin{bmatrix} -0.580\ 1 & -2.361\ 1 & -0.004\ 9 & 0.388\ 2 \\ 0.428\ 3 & 0.561\ 7 & -0.142\ 2 & -0.258\ 8 \\ 0.284\ 2 & 0.626\ 8 & -0.931\ 9 & -2.448\ 1 \\ 0.185\ 0 & 0.772\ 0 & -0.088\ 5 & -0.843\ 3 \end{bmatrix}, \\
 P_2 &= \begin{bmatrix} -0.638\ 3 & -2.506\ 3 & -0.001\ 3 & 0.404\ 4 \\ 0.385\ 7 & 0.453\ 6 & -0.135\ 1 & -0.235\ 3 \\ 0.250\ 3 & 0.549\ 0 & -0.937\ 0 & -2.459\ 4 \\ 0.203\ 6 & 0.858\ 2 & -0.140\ 0 & -0.992\ 5 \end{bmatrix}, \\
 P_4 &= \begin{bmatrix} 1.114\ 0 & -1.678\ 5 & -0.591\ 1 & 2.504\ 6 \\ 0.012\ 5 & 0.472\ 4 & 0.029\ 1 & -0.487\ 8 \\ -1.238\ 8 & 1.466\ 0 & 0.471\ 4 & -2.416\ 0 \\ -1.575\ 5 & 2.191\ 9 & 0.724\ 2 & -3.459\ 8 \end{bmatrix}, \\
 P_8 &= \begin{bmatrix} -0.071\ 0 & -0.265\ 3 & -0.043\ 4 & 0.265\ 8 \\ 0.225\ 1 & -0.404\ 8 & -0.014\ 4 & 0.551\ 8 \\ -0.007\ 6 & 0.808\ 6 & 0.171\ 3 & -1.040\ 5 \\ 0.118\ 2 & 0.355\ 7 & 0.104\ 2 & -0.415\ 7 \end{bmatrix}。
 \end{aligned}$$

进一步分析以上 4 矩阵的特征值模的最大值,亦即 Floquet 乘子模的最大值,分别为  $\lambda(P_1)=1.278\ 438\ 866$ ,  $\lambda(P_2)=1.605\ 355\ 509$ ,  $\lambda(P_4)=1.320\ 196\ 013\ 62$ ,  $\lambda(P_8)=0.691\ 605\ 07$ ,显然在该组参数下只有周期八运动稳定。

### 3.5 周期运动稳定性随传递功率的分岔特性

总结以上分析,可以大致勾勒出传递功率在 196.0~220.0 kW 范围内系统周期运动状态稳定性的分岔情况,如图 14 所示。图中实线表示稳定的周期运动,点划线表示不稳定周期运动。作为对比,笔者采用直接数值积分的方法绘制了行星齿轮传动系统随功率的全局分岔图,如图 15 所示。可以发现在功率区间

196.0~220.0 kW 内,两图所显示的分岔规律以及分岔点功率值非常吻合。需要指出的是,基于 CPNF 方法预测的局部分岔图可以获得所有共存周期轨道(包括不稳定的周期轨道)的分岔规律,而基于直接数值积分的全局分岔图只能显示渐进稳定的周期轨道之间的分岔关系,这是 CPNF 方法预测的局部分岔图的优点之一。此外,由于局部分岔图中 14 所显示的分岔点参数是由 Floquet 乘子定量判断而得,所以比全局分岔图 15 定性显示的分岔点参数值更加精确。

从分岔图 14 中可以看到,在功率 196.0~196.8 kW 范围内,行星齿轮非线性系统共存一个不稳定的周期一运动、一个不稳定的周期二运动、一个不稳定的周期四运动和一个稳定的周期八运动;在功率 196.8~205.8 kW 范围内,行星齿轮非线性系统共存一个不稳定的周期一运动、一个不稳定的周期二运动和一个稳定的周期四运动;在功率 205.8~211.0 kW 范围内,行星齿轮非线性系统共存一个不稳定的周期一运动和一个稳定的周期二运动;在功率 211.0~220.0 kW 范围内,行星齿轮非线性系统呈现单一而稳定的周期一运动。

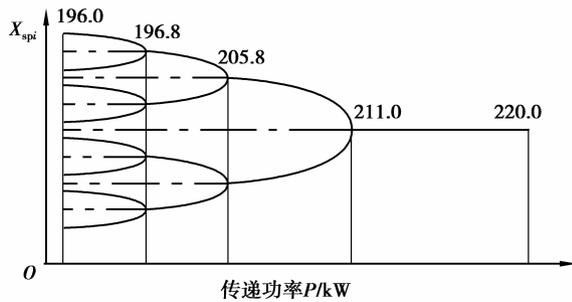


图 14 周期运动稳定性随传递功率的局部分岔图

Fig.14 The local bifurcation diagram with power

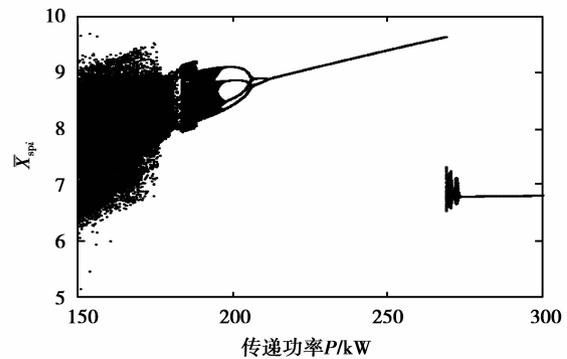


图 15 行星齿轮系统随传递功率  $P$  的全局分岔图

Fig.15 The global bifurcation diagram with power

总而言之,在传递功率 196.0~220.0 kW 范围内,随着功率值的逐渐增大,行星齿轮传动系统的各周期轨道均是通过倍周期倒分岔的途径在相应功率分岔点处发生稳定性突变的。全局分岔图 15 显示,经过充分的倍周期分岔后,在小于 196.0 kW 的某个功率值上,行星齿轮非线性系统会呈现混沌运动状态。

## 4 结 论

1) 采用 CPNF 方法研究获得的行星齿轮传动系统的周期运动轨道稳定性随传递功率的局部分岔规律,与通过直接数值积分法得到的全局分岔规律基本吻合,证明了 CPNF 方法在研究行星齿轮传动系统分岔特性方面的有效性。

2) 在某些确定的参数组合下,行星齿轮传动系统会共存多个周期轨道,这些轨道有的稳定,有的不稳定;随着功率值的逐渐增大,行星齿轮传动系统的渐进稳定的周期轨道会通过倍周期倒分岔的途径发生失稳;在轻载工况下,行星齿轮非线性系统容易呈现混沌运动状态。

### 参考文献:

- [1] 陈兵奎, 易文翠, 钟晖, 等. 线面共轭啮合原理及齿面构建方法[J]. 机械工程学报, 2012, 48(19): 17-22.  
CHEN Bingkui, YI Wencui, ZHONG Hui, et al. Theory of curve-surface conjugated and method of teeth surfaces constructed[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2012, 48(19): 17-22. (in Chinese)
- [2] 王时龙, 祁鹏, 周杰, 等. 数控滚齿机热变形误差分析与补偿新方法[J]. 重庆大学学报, 2011, 34(3): 13-17.  
WANG Shilong, QI Peng, ZHOU Jie, et al. Thermal deformation error analysis and a novel compensation method for NC gear hobbing machine tools[J]. Journal of Chongqing University, 2011, 34(3): 13-17. (in Chinese)
- [3] Montestruc A N. Influence of planet pin stiffness on load sharing in planetary gear drives[J]. Journal of Mechanical

- Design, 2010, 133(1): 788-796.
- [4] CHEN Zaigang, SHAO Yimin. Mesh stiffness calculation of a spur gear pair with tooth profile modification and tooth root crack[J]. Mechanism and Machine Theory, 2013, 62: 63-74.
- [5] CHEN Zaigang, SHAO Yimin. Dynamic simulation of spur gear with tooth root crack propagating along tooth width and crack depth[J]. Engineering Failure Analysis, 2011, 18(8): 2149-2164.
- [6] 李同杰, 朱如鹏, 鲍和云, 等. 行星齿轮系扭转非线性振动建模与运动分岔特性研究[J]. 机械工程学报, 2011, 47(21): 76-83.  
LI Tongjie, ZHU Rupeng, BAO Heyun, et al. Nonlinear torsional vibration modeling and bifurcation characteristic study of a planetary gear train[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2011, 47(21): 76-83. (in Chinese)
- [7] SUN Tao, HU Haiyan. Nonlinear Dynamics of a Planetary Gear System with Multiple Clearances[J]. Mechanism and Machine Theory, 2003, 38(12): 1371-1390.
- [8] 李同杰, 朱如鹏, 鲍和云, 等. 行星齿轮传动系的周期运动及其稳定性[J]. 振动工程学报, 2013, 26(6): 815-822.  
LI Tongjie, ZHU Rupeng, BAO Heyun, et al. Coexisting periodic solutions and their stability of a nonlinear planetary gear train[J]. Journal of Vibration Engineering, 2013, 26(6): 815-822. (in Chinese)
- [9] SHAO Yimin, CHEN Zaigang. Dynamic features of planetary gear set with tooth plastic inclination deformation due to tooth root crack[J]. Nonlinear Dynamics, 2013, 74(4): 1253-1266.
- [10] LI Tongjie, ZHU Rupeng, BAO Heyun. Study on dynamic load sharing behavior of two-stage planetary gear train based on a nonlinear vibration model[J]. Applied mechanics and Materials, 2011, 86: 611-614.
- [11] Parker R G, Wu X H. Vibration modes of planetary gears with unequally spaced planets and an elastic ring gear[J]. Journal of Sound and Vibration, 2010, 329(11): 2265-2275.
- [12] Singh A. Load sharing behavior in epicyclic gears: Physical explanation and generalized formulation[J]. Mechanism and Machine Theory, 2010, 45(3): 511-530.
- [13] 虞烈, 刘恒. 轴承-转子系统动力学[M]. 西安: 西安交通大学出版, 2001.  
YU Lie, LIU Heng. Dynamics of bearing-rotor system[M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 2001. (in Chinese)
- [14] Han Qingkai. Periodic motion stability of a dual-disk rotor system with rub-impact at fixed limiter[J]. Vibro-Impact Dynamics of Ocean System and Related Problems, 2009, 44: 105-109.
- [15] 张家忠. 非线性动力系统的运动稳定性、分岔理论及其应用[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2010.  
ZHANG Jiazhong. Motion stability, bifurcation theory and its application of nonlinear dynamical systems[M]. Xi'an: Xi'an Jiao Tong University Press, 2010. (in Chinese)

(编辑 张 革)