

doi:10.11835/j.issn.1000-582X.2017.06.003

有限元复合单元的构造方法研究

袁政强,熊光亮,马宁宁

(重庆大学 土木工程学院,重庆 400044)

摘要:传统有限单元法中每一种单元都由单一的材料组成,虽然只考虑一种材料的性质给软件编程带来了极大的方便,但是这比利用复合单元进行建模,需要更多的工作量。为此,笔者提出从4节点矩形单元与2节点线单元的虚功原理出发,运用能量方程,来整合两种不同单元。以VC++作为开发工具,利用等参元的特性,根据逆矩阵形函数构造方法编写平面单元的形函数程序,采用高斯数值积分方法,形成普通单元的单元刚度矩阵。然后根据线单元与面单元的节点位移编号,进行单元刚度的整合,进而得到一种包含面单元和线单元的复合单元。同时,通过对平面矩形单元和平面三角形单元与线单元进行复合,用得到的两种复合单元分别对悬臂梁作用端部集中荷载的简单算例进行位移求解,得到的结果与同等条件下ANSYS计算结果进行对比验证。结果表明:两种情况的计算结果都非常接近,复合单元的构造方法正确、可靠,同时也能够减少单元个数。

关键词:有限元;复合单元;逆矩阵形函数;高斯数值积分;单元刚度矩阵

中图分类号:TU311.41

文献标志码:A

文章编号:1000-582X(2017)06-015-11

Study on the construction method of composite finite element

YUAN Zhengqiang, XIONG Guangliang, MA Ningning

(School of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, P.R.China)

Abstract: In traditional finite element method, each unit is composed of a single material. While only considering the properties of a material will bring great convenience to the software programming, it also leads to a complex finite element modeling process. Therefore, in this paper, we discussed the principle of virtual work from the four nodes rectangular element and the two nodes linear element and used the energy equation to integrate the two different elements. Using VC++ as the development tool, taking advantage of the parametric element characteristics and using Gaussian numerical integral method, we formed the element stiffness matrix of the common elements, according to the inverse matrix construction method of functions written plane element shape function program. Then, the element stiffness was integrated according to the node displacement number of the element, and a new type of finite elements containing plane unit and line unit was obtained. At the same time, two kinds of composite elements were applied to a simple example of calculation, in which the concentrated load was placed in the end of the cantilever beam. Through the calculation of the example, the results obtained by using the composite element method and ANSYS in the same conditions were compared. The results of the two cases are very close, the composite element construction method is correct and reliable, and at the same time, it can reduce the number of elements.

收稿日期:2017-01-06

作者简介:袁政强(1965-),男,重庆大学副研究员,主要从事从有限元分析与应用方面的研究。

熊光亮(联系人),男,重庆大学硕士研究生,主要从事从有限元分析与应用方面的研究,(E-mail)823218912@qq.com。

Keywords: finite element; composite element; inverse matrix shape function; Gaussian integral; element stiffness matrix

有限单元法是在上世纪六七十年代发展起来的强有力的数值分析方法,它使许多复杂的工程分析问题迎刃而解,但传统有限单元法中每一种单元都由单一的材料组成,这比利用复合单元建模需要更多的工作量。为此,考虑不同材料组合的复合单元法的开发就显得尤为重要。1909年 Ritz^[1]提出了一个求解连续介质力学^[2]中的场问题近似解的方法。这个方法利用未知量的试探函数将势能泛函近似化,根据泛函取极小值的条件,就能导出求解未知量的一组方程。1943年 Courant^[3]首先尝试应用在一系列三角形区域上定义的分片连续函数和最小位能原理相结合,来求解 St.Venant 扭转问题。这种方法要求在边界处的函数只须满足有限个点,解决了 Ritz 的整体试探函数必须满足边界条件的限制,为 Clough 等人系统的建立有限单元法提供了理论数学基础。1956年 Turner 等^[4]将钢架分析中的位移法推广到弹性力学平面问题,并用于飞机结构的分析,首次给出了用三角形单元求解平面应力问题的正确解答。他们的研究工作开始了利用计算机求解复杂弹性力学问题的新阶段。1960年 Clough 进一步求解了平面弹性问题^[5],并第一次提出了“有限单元法^[6]”的名称,使人们更清楚的认识有限单元法的特性和功效。2003年陈胜宏提出了一种结合了离散模型和等效模型的优点的新的数值计算方法。它汲取了有限单元法、块体单元法和数值流形法等多种计算方法的优点,开始了为复合单元法的研究。2010年吕中荣等^[7]利用复合单元法建立了多阶梯变截面和渐变截面梁的有限元分析方程,并进行了自由振动问题的分析。结果表明:复合单元法具有计算量小、计算精度高的优点。2015年薛雯鸾^[8-9]基于复合单元法,建立了裂隙岩体非恒定温度场的复合单元算法。结合裂隙岩体水流-传热模型试验数据,构建相应的复合单元数值模型进行对比计算分析,验证了裂隙岩体非恒定温度场的复合单元算法的有效性和可靠性。

复合单元法是近年来在有限单元法方面的拓展,是一种新的数值计算方法。它采用传统有限元法的求解思路,将同一个复合单元覆盖下的多种类型的分属于不同材料属性的单元进行整合,形成一种新的复合单元后再进行求解。当建筑结构中遇到复杂配筋等情况时,该方法在建模分析方面将明显优于传统有限元。两种不同类型单元进行复合是利用两种不同材料的单元根据虚功原理^[10],通过能量守恒^[11]的原则,推导出不同材料组成的复合单元下的虚功原理方程与单一材料的普通单元下虚功原理方程的关系,得到形成复合单元单元刚度矩阵的基本理论。

笔者利用针对悬臂梁端部作用集中荷载的简单算例,使用平面矩形单元与线单元进行复合的复合 1 型单元和平面三角形单元与线单元进行复合的复合 2 型单元分别进行划分计算。两种情况得到的位移分别与悬臂梁在同等条件下 ANSYS^[12-13]计算得到的结果进行对比分析,验证了复合单元构造方法的正确性。

1 复合单元法构造过程

1.1 复合单元虚功原理

复合单元的网格划分与普通有限单元法的网格划分一致,只是划分过程不用将不同的材料分开考虑。本次研究方法中的复合单元考虑不同材料之间不存在相对滑动,处于线弹性条件下。

根据能量守恒的原则单元在假设的虚位移上应该有外力做功与内力做功产生的能量相等的关系,设外力做功能量为 Q_1 ,内力做功部分分为矩形单元做功 Q_2 和线单元做功 Q_3 。

由 $Q_1 = Q_2 + Q_3$ 得:

$$\delta^{e*T} \times F^e = \iint_{\Delta} \{\epsilon^{e*}\}^T \{\sigma^e\} t dx dy + \int F_N du. \quad (1)$$

引入弹性力学中位移与应变的关系

$$\{\delta^*\}^T \times F^e = \iint_{\Delta} \{\delta^*\}^T B^T DBt dx dy \{\delta\} + \{\delta^*\}^T F. \quad (2)$$

将式(2)中的虚位移约掉得:

$$F^e = \iint_{\Delta} B^T DBt dx dy \{\delta\} + F. \quad (3)$$

观察式(3)可以得知复合型单元所受到的节点力由两部分组成,一部分为矩形单元节点所受的力,一部分为线单元所受的力,将等式右边进行数值积分后有:

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{K}_1 \{\delta\} + \mathbf{K}_2 \{\delta\}.$$
 (4)

合并后可以得到:

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{K} \{\delta\}.$$
 (5)

1.2 逆矩阵形函数构造及复合 1 型单元形成过程

复合 1 型单元考虑 2 节点线单元通过 8 节点等参单元对边节点进行单元复合的一种单元,单元在编程过程中的节点位移编码如图 1 所示。

图 1 中标明了每个节点的节点编号和每个节点对应的位移编号用来方便编程的使用,同时复合单元的单元刚度矩阵的形成也需要根据位移编码对应进行刚度矩阵的叠加。

考虑四边形的位移模式^[14]采用完备多项式的形式:

$$u = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5x^2 + a_6y^2 + a_7xy^2 + a_8x^2y.$$

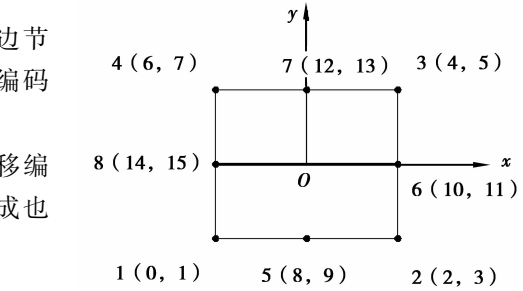


图 1 复合 3 型单元

Fig.1 Composite element of type three

(6)

则有:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 & x_1^2 & y_1^2 & x_1y_1^2 & x_1^2y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 & x_2^2 & y_2^2 & x_2y_2^2 & x_2^2y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3y_3 & x_3^2 & y_3^2 & x_3y_3^2 & x_3^2y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4y_4 & x_4^2 & y_4^2 & x_4y_4^2 & x_4^2y_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & x_5y_5 & x_5^2 & y_5^2 & x_5y_5^2 & x_5^2y_5 \\ 1 & x_6 & y_6 & x_6y_6 & x_6^2 & y_6^2 & x_6y_6^2 & x_6^2y_6 \\ 1 & x_7 & y_7 & x_7y_7 & x_7^2 & y_7^2 & x_7y_7^2 & x_7^2y_7 \\ 1 & x_8 & y_8 & x_8y_8 & x_8^2 & y_8^2 & x_8y_8^2 & x_8^2y_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{bmatrix},$$
 (7)

变形后

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 & x_1^2 & y_1^2 & x_1y_1^2 & x_1^2y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 & x_2^2 & y_2^2 & x_2y_2^2 & x_2^2y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3y_3 & x_3^2 & y_3^2 & x_3y_3^2 & x_3^2y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4y_4 & x_4^2 & y_4^2 & x_4y_4^2 & x_4^2y_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & x_5y_5 & x_5^2 & y_5^2 & x_5y_5^2 & x_5^2y_5 \\ 1 & x_6 & y_6 & x_6y_6 & x_6^2 & y_6^2 & x_6y_6^2 & x_6^2y_6 \\ 1 & x_7 & y_7 & x_7y_7 & x_7^2 & y_7^2 & x_7y_7^2 & x_7^2y_7 \\ 1 & x_8 & y_8 & x_8y_8 & x_8^2 & y_8^2 & x_8y_8^2 & x_8^2y_8 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{bmatrix}.$$
 (8)

根据形函数的定义可以得形函数 $N_1 \sim N_8$ 为:

$$\begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & x^2 & y^2 & x^2y & xy^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 & x_1^2 & y_1^2 & x_1y_1^2 & x_1^2y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 & x_2^2 & y_2^2 & x_2y_2^2 & x_2^2y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3y_3 & x_3^2 & y_3^2 & x_3y_3^2 & x_3^2y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4y_4 & x_4^2 & y_4^2 & x_4y_4^2 & x_4^2y_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & x_5y_5 & x_5^2 & y_5^2 & x_5y_5^2 & x_5^2y_5 \\ 1 & x_6 & y_6 & x_6y_6 & x_6^2 & y_6^2 & x_6y_6^2 & x_6^2y_6 \\ 1 & x_7 & y_7 & x_7y_7 & x_7^2 & y_7^2 & x_7y_7^2 & x_7^2y_7 \\ 1 & x_8 & y_8 & x_8y_8 & x_8^2 & y_8^2 & x_8y_8^2 & x_8^2y_8 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{bmatrix}.$$
 (9)

得到用逆矩阵表达的形函数以后,就可以按照常规有限单元法的推导过程得到单一面单元的刚度矩阵 \mathbf{K}_1 。

观察式 $F^e = K_1 \{\delta\} + K_2 \{\delta\}$ 和式 $F^e = K \{\delta\}$ 可以看出复合单元在整体坐标系下的综合单元刚度矩阵为 $K = K_1 + K_2$, (K_2 为线单元在整体坐标下的单元刚度矩阵, 此处不予赘述)。该综合刚度矩阵是将两种单元下的刚度矩阵进行了整合, 注意其中的刚度叠加位置要根据节点编号下的位移编号对号入座。

1.3 复合 2 型单元形成过程

三角形 6 节点等参单元与 2 节点线单元复合而成的单元命名为复合 2 型单元, 复合 3 型单元考虑的是 2 节点线单元穿过三角形 6 节点等参单元的临边, 并且共用临边的节点。具体情况如图 2 所示。

由上述可知要想得到复合单元的综合刚度矩阵, 就必须首先得到各个子单元的单元刚度矩阵, 因此首先对三角形 6 节点等参单元的单元刚度矩阵的形成过程进行推导, 我们同样用利于编程实现的逆矩阵来构造形函数。

首先设定完备多项式类型的位移模式:

$$u = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2. \quad (10)$$

因为三角形单元中有 6 个节点, 能够提供 6 个独立的位移方程, 因此上式中的 6 个未知参数理论上是可以求解出来的。根据复合 1 型单元的形成过程可以推导得到 6 节点三角形单元的形函数为:

$$[N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6] = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2] \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 \\ 1 & x_5 & y_5 & x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 \\ 1 & x_6 & y_6 & x_6^2 & x_6y_6 & y_6^2 \end{bmatrix}^{-1}. \quad (11)$$

得到用逆矩阵表达的形函数以后, 就可以按照常规有限单元法的推导过程得到单一面单元的刚度矩阵 K_1 。

$$K^1 = \begin{bmatrix} k_{0,0} & k_{0,1} & k_{0,2} & \cdots & k_{0,10} & k_{0,11} \\ k_{1,0} & k_{1,1} & k_{1,2} & \cdots & k_{1,10} & k_{1,11} \\ k_{2,0} & k_{2,1} & k_{2,2} & \cdots & k_{2,10} & k_{2,11} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{10,0} & k_{10,1} & k_{10,2} & \cdots & k_{10,10} & k_{10,11} \\ k_{11,0} & k_{11,1} & k_{11,2} & \cdots & k_{11,10} & k_{11,11} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

根据图中表明的每个节点的节点位移编号, 并且运用与复合 1 型单元相同的方法进行单元刚度矩阵的形成。因此复合刚度矩阵为 $K = K^1 + K^2$ 。

2 算例

如图 3 所示, 矩形截面悬臂梁的高度 $h = 2$, 长度 $L = 10$, 厚度 $b = 1$, 悬臂梁端部受集中荷载 $F = 100$ kN。材料 1 所在位置 $h_1 = 0.06$, 弹性模量 $E = 2.0 \times 10^{11}$, 面积 $A_s = 3.0 \times 10^{-3}$, 材料 2 的弹性模量 $E = 2.0 \times 10^{10}$, 泊松比为 $\mu = 0.25$ (未标注单位的量均为国际单位制)。

2.1 复合 1 型单元求解

采用以上例题的条件, 用复合 1 型单元进行单元划分计算, 悬臂梁的单元划分情况如图 4 所示。

图 4 中 21~30 号单元的单元类型为 1 型复合单元, 编程过程中的单元类型定义为 12, 其余单元类型为

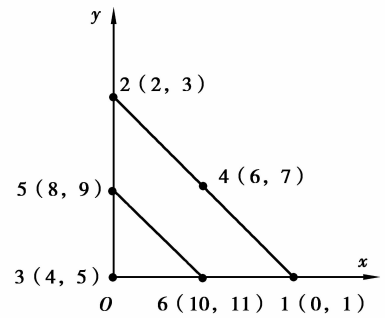


图 2 复合 6 型单元

Fig.2 Composite element of type six

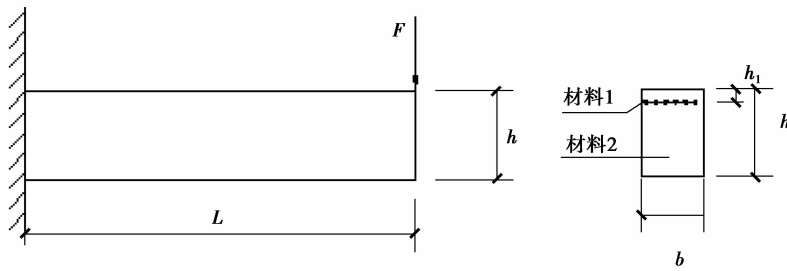


图 3 悬臂梁图示

Fig.3 Cantilever beam

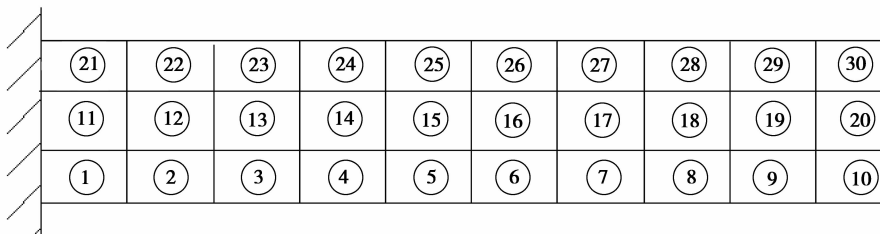


图 4 复合 1 型单元网格划分

Fig.4 The grid for composite element of type one

普通的 8 节点矩形单元,编程过程中单元类型定义为 21。

单元节点编号情况如图 5 所示,图 5 描述了用于程序计算的文本文件的单元节点编号的输入依据。

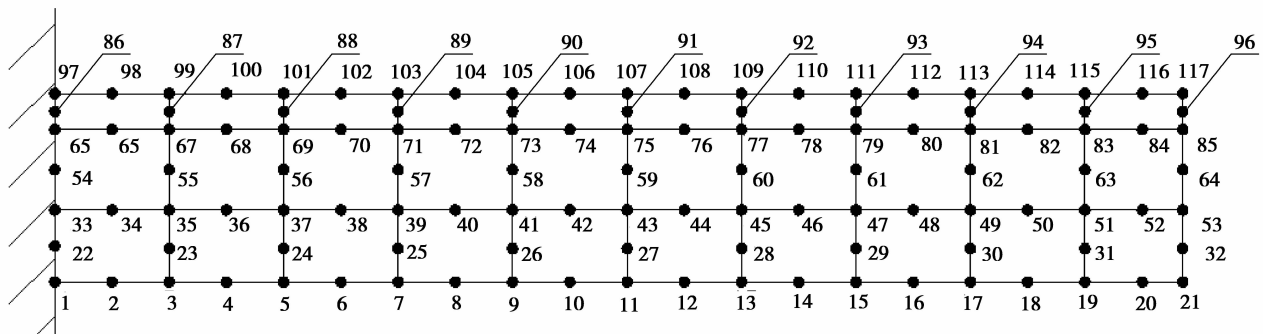


图 5 复合 1 型单元节点编号

Fig.5 The node number for composite element of type one

复合 1 型单元划分下的计算结果如表 1 所示。

表 1 复合 1 型单元划分下的计算结果

Table 1 The results of composite element of type one

节点号	y 方向挠度值	节点号	y 方向挠度值
2	-0.000 016 905	12	-0.000 928 839
3	-0.000 046 200	13	-0.001 079 460
4	-0.000 092 600	14	-0.001 237 290
5	-0.000 152 280	15	-0.001 401 450

续表 1

节点号	y 方向挠度值	节点号	y 方向挠度值
6	-0.000 227 147	16	-0.001 571 06
7	-0.000 315 602	17	-0.001 745 23
8	-0.000 416 580	18	-0.001 922 99
9	-0.000 529 297	19	-0.002 103 35
10	-0.000 652 857	20	-0.002 284 15
11	-0.000 786 339	21	-0.002 464 20

2.2 ANSYS 验证复合 1 型单元

采用 PLANE82 单元与 LINK1 单元,并且单元划分按照图 4 和图 5 的单元位置和节点坐标进行单元划分。单元网格划分如图 6 所示。图 6 中紫色的单元代表材料 1,绿色单元代表材料 2。

	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1	1	1
y	1	1	1	1	1	1	1	1	1
z	x								

图 6 ANSYS 建模过程中梁的单元划分

Fig.6 The grid of ANSYS model

ANSYS 计算结果如图 7 所示。

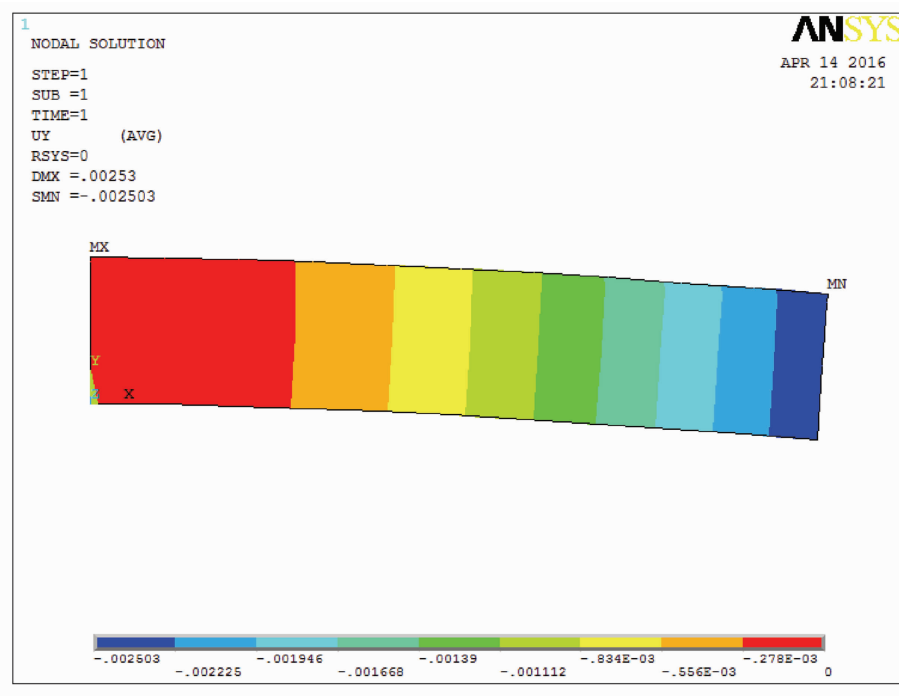


图 7 ANSYS 计算结果

Fig.7 The result of ANSYS model

表 2 复合 1 型单元划分下的 ANSYS 计算结果
Table 2 The results of composite element of type one

节点号	y 方向挠度值	节点号	y 方向挠度值
2	-0.000 016 380	12	-0.000 928 189
3	-0.000 045 639	13	-0.001 078 705
4	-0.000 092 406	14	-0.001 236 548
5	-0.000 151 885	15	-0.001 400 610
6	-0.000 226 784	16	-0.001 570 275
7	-0.000 315 129	17	-0.001 744 358
8	-0.000 416 039	18	-0.001 922 221
9	-0.000 528 821	19	-0.002 102 509
10	-0.000 652 269	20	-0.002 283 008
11	-0.000 785 710	21	-0.002 463 215

ANSYS 计算结果与自编程序的对比结果如表 3 所示。

表 3 两种计算方式结果
Table 3 The results of two computing methods

节点号	相差百分比/%	节点号	相差百分比/%
2	3.21	12	0.07
3	1.23	13	0.07
4	0.21	14	0.06
5	0.26	15	0.06
6	0.16	16	0.05
7	0.15	17	0.05
8	0.13	18	0.04
9	0.09	19	0.04
10	0.09	20	0.05
11	0.08	21	0.04

通过表 3 可知,采用复合单元求解方法和 ANSYS 在同样条件下的分析得到的结果,显示两种情况结果非常接近。

2.3 复合 2 型单元求解

采用例 1 的条件,用复合 2 型单元进行单元划分计算,悬臂梁的单元划分情况如图 8 所示。

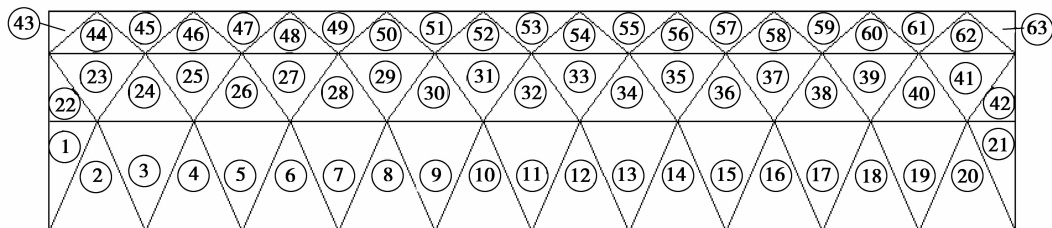


图 8 复合 2 型单元网格划分
Fig.8 The grid for composite element of type two

图 8 中 43~63 号单元为复合 2 型单元,单元在编程过程中的单元类型编码为 8。1~42 号单元为普通 2 节点等参单元,单元在编程过程中的单元类型编码为 5。单元的节点编号情况如图 9 所示。

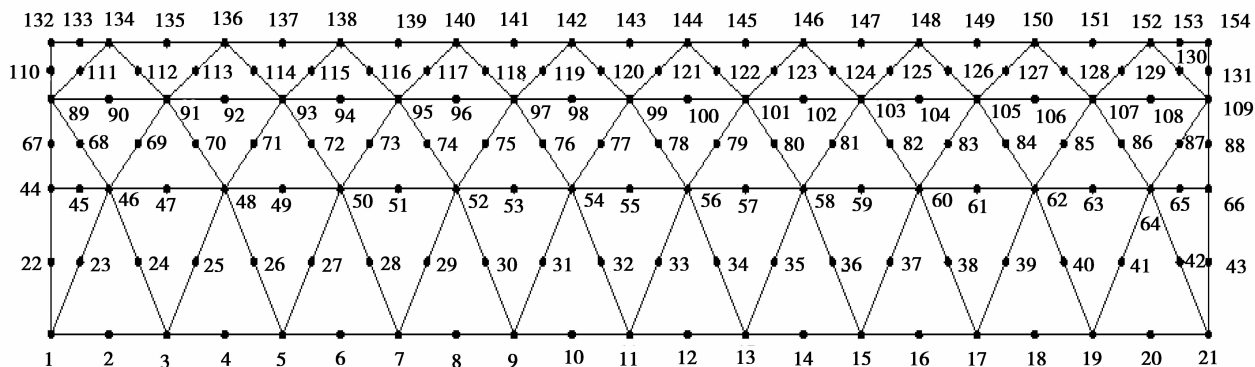


图 9 复合 2 型单元节点编号

Fig.9 The node number for composite element of type two

图 9 描述了用于程序计算的文本文件的单元节点编号的输入依据。

通过文本文件输入梁的各项条件后得到梁的计算结果如表 4 所示。

表 4 复合 2 型单元划分下的计算结果

Table 4 The results of composite element of type two

节点号	y 方向挠度值	节点号	y 方向挠度值
2	-0.000 017 520	12	-0.000 929 486
3	-0.000 047 166	13	-0.001 080 140
4	-0.000 092 319	14	-0.001 238 020
5	-0.000 152 772	15	-0.001 402 210
6	-0.000 227 636	16	-0.001 571 850
7	-0.000 316 039	17	-0.001 746 040
8	-0.000 417 075	18	-0.001 923 860
9	-0.000 529 841	19	-0.002 104 120
10	-0.000 653 433	20	-0.002 285 280
11	-0.000 786 949	21	-0.002 465 470

2.4 ANSYS 验证复合 2 型单元

为了验证复合 2 型单元计算的正确性,我们同样采用 ANSYS12.0 进行结构分析。

采用 PLANE2 单元与 LINK1 单元,并且单元划分按照图 8 和图 9 的单元位置和节点坐标进行单元划分。单元网格划分如图 10 所示。图 10 中紫色的单元代表材料 1,绿色单元代表材料 2。

ANSYS 计算结果如图 11 所示。复合 2 型单元划分下的 ANSYS 计算结果如表 5 所示。

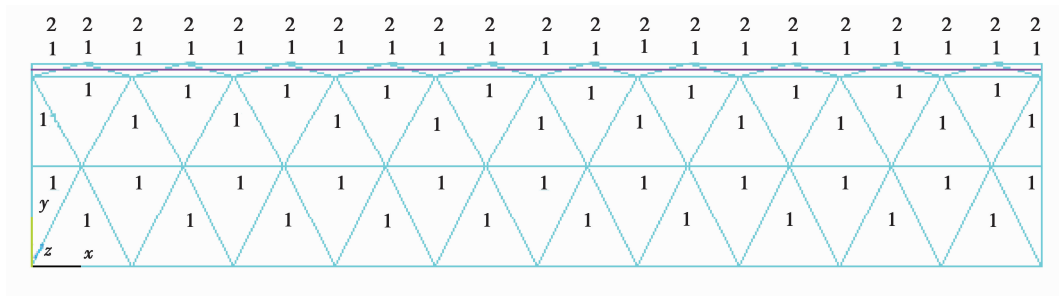


图 10 ANSYS 建模过程中梁的单元划分

Fig.10 The grid of ANSYS model

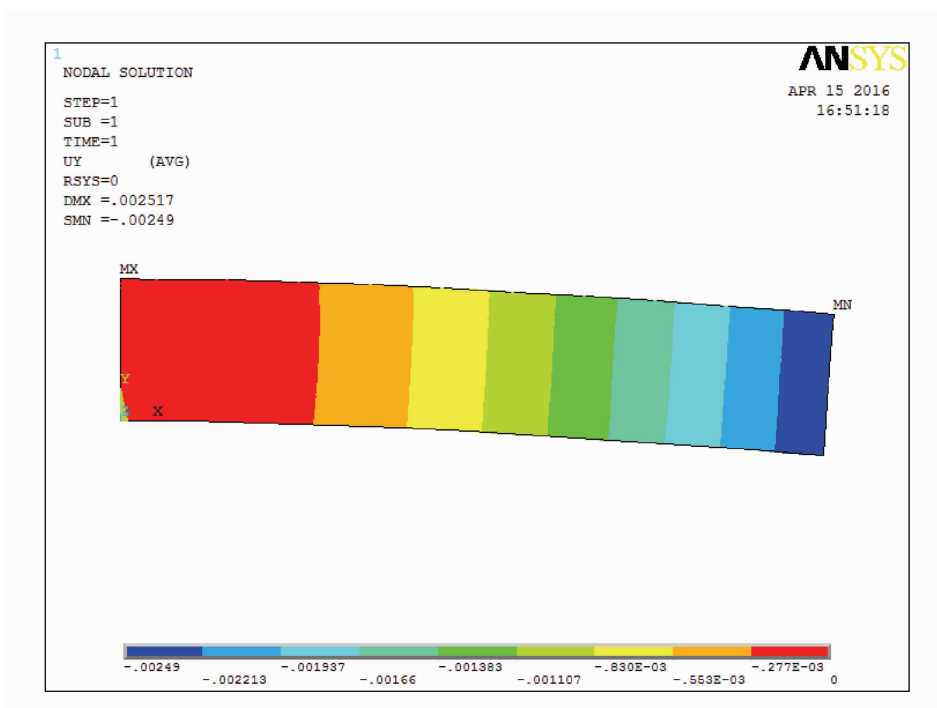


图 11 ANSYS 计算结果

Fig.11 The result of ANSYS model

表 5 复合 2 型单元划分下的 ANSYS 计算结果

Table 5 The results of composite element of type two

节点号	y 方向挠度值	节点号	y 方向挠度值
2	-0.000 016 905	12	-0.000 928 839
3	-0.000 046 829	13	-0.001 079 460
4	-0.000 092 081	14	-0.001 237 290
5	-0.000 152 280	15	-0.001 401 450
6	-0.000 227 174	16	-0.001 571 060
7	-0.000 315 602	17	-0.001 745 230
8	-0.000 416 580	18	-0.001 922 990
9	-0.000 529 297	19	-0.002 103 350
10	-0.000 652 857	20	-0.002 284 150
11	-0.000 786 339	21	-0.002 464 200

ANSYS 计算结果与自编程序的对比结果如表 6 所示。

表 6 两种计算方式结果
Table 6 The results of two computing methods

节点号	相差百分比/%	节点号	相差百分比/%
2	3.64	12	0.07
3	0.72	13	0.06
4	0.26	14	0.06
5	0.32	15	0.05
6	0.20	16	0.05
7	0.14	17	0.05
8	0.12	18	0.05
9	0.10	19	0.04
10	0.09	20	0.05
11	0.08	21	0.05

通过表 3 和表 6 可以看出,利用复合单元法计算值与有限元数值模拟分析值十分接近,说明本文的理论和编程计算过程是正确的,但是由于在编程过程中采用的是 8 节点高斯数值积分^[15],所以存在相对较小的误差是正常的。

5 结 论

对复合单元的理论做出推导,通过悬臂梁作用端部集中荷载的简单算例,利用 ANSYS 和自编程序得到的结果进行对比,可以得到以下结论:

1) 将不同种类的材料属性的单元整合到一起形成新型复合单元的设想是可以实现的,通过单元的复合,使得结构在划分单元时大大减少了单元的个数,而计算结果的精度却不会减小,不同材料的性能都可以在结构中体现。通过对实例的计算,对比采用复合单元求解方法和 ANSYS 在同样条件下的分析得到的结果,显示两种情况结果非常接近。

2) 不同材料组成的复合单元,在节点相结合的部位位移相同的前提条件下,只需要将两种不同材料的单元在同一个自然坐标系下的单元刚度矩阵按照节点位移编号进行叠加就可以很方便的得到复合单元的单元刚度矩阵。这种方法具有很好的操作性和稳定性。

3) 在使用逆矩阵形函数构造方法时,要特别注意母单元节点的个数和位置,为保证形成形函数的矩阵求逆的顺利进行,矩阵中的母单元局部坐标系下的元素必须保证矩阵是非奇异的。在矩阵非奇异的前提下,移动节点位置时,逆矩阵形函数方法能够很好的适应这类问题。

参考文献:

- [1] Tanaka T, Nodera T. Ritz value of approximate inverse by MR algorithm[J]. IPSJ SIG Notes, 2002, 2002: 19-24.
- [2] Chen W Q. The renaissance of continuum mechanics[J]. Univ-Sci A, 2014, 15(4): 231-240.
- [3] Courant R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations[J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1943, 49(1943): 1-23.
- [4] Turner M J. Stiffness and deflection analysis of complex structures[J]. Journal of Aerosol Science, 1956, 23(9): 805-823.

- [5] Gladwell G M L. On the solution of problems of dynamic plane elasticity[J]. *Mathematika*, 1957, 4(2): 166-168.
- [6] Clough R W. The finite element method in plane stress analysis[C]// *Proceedings of 2nd ASCE Conference on Electronic Computation*. Pittsburgh, PA. Pittsburgh: [s.n.], 1960: 345-378.
- [7] 吕中荣,谢瑾荣,刘济科.复合单元法在变截面梁自由振动分析中的应用[J].*中山大学学报*,2010,49(6):49-52.
LYU Zhongrong, XIE Jinrong, LIU Jike. Composite element method for the free vibration analysis of non-uniform beams[J]. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni*, 2010, 49(6): 49-52. (in Chinese)
- [8] 薛雯雯.裂隙岩体不稳定温度场的复合单元算法研究[J].*岩土力学*,2015,36(7):2088-2093.
XUE Luanluan. Composite element algorithm for transient thermal field in fractured rock mass[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2015, 36(7): 2088-2093. (in Chinese)
- [9] 薛雯雯.裂隙岩体渗流-传热耦合的复合单元模型[J].*岩土力学*,2016,37(1):264-278.
XUE Luanluan. A composite element model for coupled seepage-heat transfer of fractured rock mass[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2016, 37(1): 264-278. (in Chinese)
- [10] 萧允晖,张来仪.结构力学 I [M].北京:机械工业出版社,2010:107-117.
XIAO Yunhui, ZHANG Laiyi. *Structural mechanics I* [M]. Beijing: China Machine Press, 2010: 107-117. (in Chinese)
- [11] 潘天林,吴斌,郭丽娜,等.能量守恒逐步积分方法在工程结构动力分析中的应用[J].*工程力学*,2014,31(9):21-27.
PAN Tianlin, WU Bin, GUO Lina, et al. Application of energy conserving step-by-step integration algorithm in dynamic analysis of engineering structures[J]. *Engineering Mechanics*, 2014, 31(9): 21-27. (in Chinese)
- [12] 王新敏.ANSYS 工程结构数值分析[M].北京:人民交通出版社,2013:6-10.
WANG Xinmin. *ANSYS numerical analysis of engineering structure*[M]. Beijing: China Communications Press, 2013: 6-10. (in Chinese)
- [13] 沈聚敏,王传志,江见鲸.钢筋混凝土有限元与板壳极限分析[M].北京:清华大学出版社,1993:240-246.
SHEN Jumin, WANG Chuazhi, JIANG Jianjing. *Finite element analysis of reinforced concrete and limit analysis of plate and shell*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1993: 240-246. (in Chinese)
- [14] 沈琪雯.有限元逆矩阵形函数构造方法及其编程[D].重庆:重庆大学,2014.
SHEN Qiwen. *Inverse matrix shape function of finite element and programming*[D]. Chongqing: Chongqing University, 2014. (in Chinese)
- [15] 李开泰,黄艾香,黄庆怀.有限元方法及应用[M].北京:科学出版社,2006:63-93.
LI Kaitai, HUANG Aixiang, HUANG Qinghuai. *Finite element method and its application*[M]. Beijing: Science Press, 2006: 63-93. (in Chinese)

(编辑 郑洁)