

doi:10.11835/j.issn.1000-582X.2020.05.007

运营环境下混凝土简支梁桥裂缝的非线性损伤识别

蒋燕芳^a, 蒋伟^a, 刘纲^{a,b}, 张衡^a

(重庆大学 a. 土木工程学院; b. 山地城镇建设与新技术教育部重点实验室, 重庆 400045)

摘要:针对混凝土简支梁桥常见的开裂病害,基于改进的 Hilbert-Huang 变换(HHT)提出裂缝的非线性损伤识别方法。选取曲率曲线型呼吸裂缝模型并将其融入车桥耦合共振系统,以更真实地模拟运营环境下裂缝的非线性开闭现象。引入镜像延拓法和集合经验模态分解法分别改进传统 HHT 算法的端点发散和模态混叠问题,提取桥梁加速度响应的能量时程曲线,将能量时程曲线尖峰出现时刻和相对幅值比分别作为损伤定位和定量的特征指标,从而建立简支梁裂缝的非线性损伤识别方法。数值算例表明,采用单一传感器便可通过文中方法识别简支梁开裂的部位和程度,为混凝土简支梁的损伤识别提供技术支持。

关键词:非线性损伤识别;呼吸裂缝;HHT 变换;车桥耦合;能量时程曲线

中图分类号:TH212;TH213.3 **文献标志码:**A **文章编号:**1000-582X(2020)05-059-08

Nonlinear damage identification of cracks of the concrete simply-supported bridge under operational environment

JIANG Yanfang^a, JIANG Wei^a, LIU Gang^{a,b}, ZHANG Heng^a

(a. School of Civil Engineering; b. Key Laboratory of New Technology for Construction of Cities in Mountain Area, Ministry of Educations, Chongqing University, Chongqing 400045, P. R. China)

Abstract: A non-linear damage detection method for cracks of the concrete simply-supported bridge based on the improved Hilbert-Huang transfer (HHT) is proposed in this work. The curvilinear breathing crack model controlled by curvature is employed to consider the breathing phenomenon of cracks, and the model is integrated into vehicle-bridge interaction system to simulate operational environment. The mirror extension and ensemble empirical mode decomposition algorithm are introduced to eliminate the end effect and mode mixing problems respectively. The energy time history from the acceleration response of the bridge under operational condition is acquired using the improved HHT algorithm, and then the appearance time and relative amplitude ratio from the peak of the energy time history are extracted as features to localize and quantify damage respectively. Numerical results show that the location and severity of the cracking damage can be successfully identified using only one sensor deployed on the bridge, which provides technical support to damage detection of cracks on the concrete simply-supported bridge.

Keywords: non-linear damage detection; breath crack; HHT; vehicle bridge interaction; energy duration curve

收稿日期:2019-11-05

基金项目:国家自然科学基金(面上)项目(51578095)。

Supported by the National Natural Science Foundation of China(General Program) (51578095).

作者简介:蒋燕芳(1993—),女,硕士,主要从事结构健康监测研究,(E-mail)1192614954@qq.com。

通讯作者:刘纲,男,博士,教授,主要从事结构健康监测与振动控制研究,(E-mail)gliu@cqu.edu.cn。

中、小跨径的简支梁桥数量大、分布广,但简支梁桥在使用荷载、结构缺陷、环境因素、材料衰变等影响下,极易出现混凝土开裂病害,降低桥梁的承载能力。但简支梁桥结构形式简单,数量众多,不利于构建桥梁结构健康监测系统。故在桥梁使用过程中,对混凝土表面裂缝进行简单高效的识别是保障桥梁运营安全的重要手段^[1]。实现该类桥梁损伤识别的前提是掌握带裂缝简支梁桥在运营荷载作用下的工作机理。不少学者认为裂缝在桥梁振动过程中一直处于张开状态,即开口裂缝模型,并针对其动力特性和损伤识别做了大量研究^[2-4]。1983年,Gudmunson^[5]通过试验发现裂缝在振动过程中将出现张开-闭合的周期性交替过程,为准确模拟这一机制,各国学者提出了呼吸裂缝模型^[5-12]。Cheng等^[9]以带呼吸裂缝的悬臂梁为研究对象,发现其频率降低量远小于开口裂缝模型。Chondros等^[10]、Vigneshwaran等^[13]针对呼吸裂缝的研究均得到类似规律。因此,以开口裂缝模型计算的频率、振幅将会低估结构的损伤程度,从而造成安全隐患^[12]。

当前针对呼吸裂缝的研究多集中在数值模拟模型及动力特性方面,而采用呼吸裂缝模型进行损伤识别的研究较少,常采用简化的移动力模型、移动质量模型^[14]或单自由度弹簧-质量模型^[15],不能客观地模拟车桥之间的耦合作用,在一定程度上降低了识别结果的准确性。文献[16]采用车桥耦合振动系统数值模拟手段,详细对比了呼吸裂缝模型与开口裂缝模型对桥梁位移响应幅值、瞬时频率等动力响应的影响,讨论了采用小波分析进行裂缝识别的可行性。

文中选取曲率曲线型呼吸裂缝模型,将其融入简支梁车桥耦合振动系统中,从而在运营荷载下建立考虑裂缝非线性振动的精细化数值计算模型。基于改进的 HHT 算法,从简支梁某点的加速度响应中提取损伤识别指标,建立裂缝的非线性损伤识别方法,并分析车重、车速等不同参数对文中方法识别效果的影响,以期采用单个传感器实现混凝土简支梁桥开裂的定位和定量识别。

1 运营环境下呼吸裂缝的模拟

1.1 车桥耦合振动系统

为准确模拟运营环境下车辆与简支梁的相互作用,将简支梁和以速度 v 行驶的车辆简化为图 1 所示的平面车桥耦合振动系统^[14]。其中,简支梁离散为长度相等的 N 个单元;车辆简化为半车模型,其车体采用转动惯量为 I_0 、质量为 m_0 的刚体表示。车辆前后轮组的质量分别为 m_1 、 m_2 ,车体质心距车体前后距离分别为 b_1 、 b_2 ,前后轮组通过弹簧单元 k_i 和阻尼单元 c_i ($i=1,2,3,4$) 与车体相连并与简支梁接触。

但车辆作用于桥面时,将造成桥面发生变形,故设车辆前轮、后轮组所对应的桥面接触点变形分别为 y_1 、 y_2 ,并假设车轮不会脱离桥面。

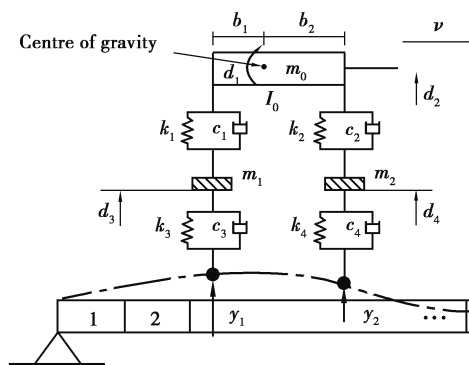


图 1 车桥耦合振动系统

Fig. 1 vehicle-bridge vibration system

根据车、桥之间位移与作用力的协调关系,可建立车桥耦合共振的动力学方程^[17]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_v & \\ & \mathbf{M}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{D}} \\ \ddot{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_v & \\ & \mathbf{C}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{D}} \\ \dot{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_v & \\ & \mathbf{K}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_v \\ \mathbf{F}_b \end{bmatrix}, \quad (1)$$

其中: \mathbf{M}_v 、 \mathbf{C}_v 和 \mathbf{K}_v 分别表示车辆的质量、阻尼和刚度矩阵; $\mathbf{D}=[d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4]^T$,为半车模型的位移向量; \mathbf{M}_b 、

C_b 、 K_b 分别为简支梁的质量、阻尼和刚度矩阵; Y 为简支梁各节点竖向平动和转动组成的位移向量; F_v 为半车模型的外激励向量^[17]:

$$F_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k_3 y_1 + c_3 \dot{y}_1 & k_4 y_2 + c_4 \dot{y}_2 \end{bmatrix}^T, \quad (2)$$

其中, F_b 为作用在简支梁上的节点力向量, $F_b = N_1 f_1 + N_2 f_2$,其中 N_1 、 N_2 均为有限元插值函数,取较为常用的三次 Hermite 多项式; f_1 、 f_2 分别为前后车轮施加在桥上的作用力^[16]:

$$\begin{cases} f_1 = -k_3(y_1 - d_3) - c_3(\dot{y}_1 - \dot{d}_3) - m_1 g - \frac{b_2}{b_1 + b_2} mg, \\ f_2 = -k_4(y_2 - d_4) - c_4(\dot{y}_2 - \dot{d}_4) - m_2 g - \frac{b_1}{b_1 + b_2} mg. \end{cases} \quad (3)$$

采用 Newmark- β 法求解式(1),即可得到车桥耦合振动系统的动力响应时程。

1.2 曲率型呼吸裂缝模型

采用曲率型呼吸裂缝模型,该模型通过曲率表征裂缝所引起的刚度变化,设模型表征的裂缝为切口裂缝,且在深度范围内贯通整个横截面,若结构第 i 单元有裂缝,则在第 t 时刻该单元的单元刚度 $k_i^b(t)$ 可表述为^[13]:

$$k_i^b(t) = k_i^c + \frac{1}{2}(k_i^o - k_i^c) \left[1 + \frac{y_i''(t)}{y_i''_{\max}} \right], \quad (4)$$

其中, k_i^c 、 k_i^o 分别为裂缝闭合、完全张开时第 i 单元的单元刚度。 k_i^o 可采用附加柔度法^[18]计算:

$$k_o = \tilde{C}^{-1} T^T, \quad (5)$$

$$T = \begin{bmatrix} -1 & -L & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad (6)$$

其中, \tilde{C} 为结构混凝土开裂后的附加柔度矩阵,通过求解剪力弯矩关于附加应变能的二阶偏导进行计算,具体计算公式详见文献^[18]; $y_i''(t)$ 为第 i 单元当前时刻的挠度曲率; $y_i''_{\max}$ 为整个振动过程中该单元的最大挠度曲率值,往往考虑 $k_i^b(t) = k_i^o$ 的情况下,通过车辆过桥全过程计算并取最大的 $y_i''(t)$ 作为初始值,再经多次迭代获得^[14]。在每时间步更新第 i 单元的单元刚度,则可实现呼吸裂缝的模拟。

2 裂缝非线性损伤识别方法

2.1 HHT 算法基本原理

Hilbert-Huang 变换(HHT)是处理非线性、非平稳信号的一种时频分析方法^[19]。该方法的基本思路是将原始信号 $x(t)$ 进行经验模态分解(EMD):

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) + r_n(t), \quad (7)$$

其中, $c_i(t)$ 为第 i 个本征模态函数(IMF)分量; n 为 IMF 分量的个数, $r_n(t)$ 为残差。

将 IMF 分量进行 Hilbert 变换:

$$\hat{c}_i(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_i(\tau)}{t - \tau} d\tau, \quad (8)$$

以 $c_i(t)$ 为实部, $\hat{c}_i(t)$ 为虚部构造解析函数:

$$z_i(t) = c_i(t) + j \hat{c}_i(t) = a_i(t) e^{i\varphi_i(t)}, \quad (9)$$

其幅值函数 $a_i(t)$ 和相位函数 $\varphi_i(t)$ 分别为

$$a_i(t) = \sqrt{c_i(t)^2 + \hat{c}_i(t)^2}, \quad (10)$$

$$\varphi_i(t) = \arctan \frac{\Lambda c_i(t)}{c_i(t)}, \quad (11)$$

瞬时频率表示为

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \omega_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi_i(t)}{dt}, \quad (12)$$

RE 表示取实部,则原信号的 Hilbert 谱为

$$H(\omega, t) = \text{RE} \sum_{i=1}^n a_i(t) e^{j \int \omega_i(t) dt}. \quad (13)$$

应指出的是,为了消除 HHT 变换的端点效应和模态混叠现象,采用了镜像延拓方法和 EEMD 方法进行改进,这 2 种方法的详细原理见文献[20-21],引入这 2 种方法后的 HHT 方法为改进的 HHT 方法。

2.2 基于能量指标的损伤识别方法

对于运营状态下的混凝土简支梁,当车辆通过裂缝截面时,裂缝处刚度的变化将带来冲击效应,使加速度响应信号增加额外的能量。但该能量的变化较小,采用改进的 HHT 算法提取能量指标,实现裂缝的损伤识别,具体步骤为:

1) 能量时程曲线的计算。根据式(13)将所得 Hilbert 谱向时间轴投影,得到能量随时间的变化曲线 $h(t)$:

$$h(t) = \int_0^{\omega_p} H(\omega, t) d\omega, \quad (14)$$

式中, ω_p 为截止频率。

2) 有无损伤的判定。因裂缝处桥梁响应的能量有突变,故通过 $h(t)$ 时程曲线有无明显尖峰来判定结构是否开裂。

3) 损伤定位的判别。提取损伤尖峰的最大值作为特征点,记该特征点出现的时刻为 t_2 , 车辆入、出桥的时间分别记为 t_1 、 t_3 , 则裂缝和车辆入桥端的距离 l 为

$$l = \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1} \times L, \quad (15)$$

其中, L 为简支梁的长度。

因在车桥耦合振动系统中,裂缝添加于某个单元中,计算添加裂缝所在的单元号 m , 以便于对比:

$$m = \text{int}(l/l_e) + 1, \quad (16)$$

其中, $\text{int}(x)$ 为取整函数; l_e 为单元长度。

4) 损伤程度识别。记能量时程曲线 $h(t)$ 在 t_2 时刻的幅值为 w_A , 在 t_1 时刻的幅值为 w_U , 定义这 2 个时刻幅值比 f 为

$$f = \frac{w_A}{w_U} \times 100\%. \quad (17)$$

在同一车辆作用下,该比值越大,裂缝处响应能量值越大,即裂缝深度越深,所以用于开裂程度的判定。

3 数值算例

3.1 损伤工况

根据参考文献[16],定义图 1 所示简支梁和车辆荷载模型的具体参数,如表 1 所示。

表 1 模型具体参数
Table 1 Specific parameters of model

| | |
|--------|--|
| 桥梁参数 | $L=40\text{ m}, \rho=2\ 600\text{ kg/m}^3$ $E=3.45\times 1\ 010\text{ N/m}^2, b=1.2\text{ m}, h=2\text{ m}$ |
| 半车模型参数 | $I_0=1.44\times 10^5\text{ kgm}^2, m_0=17\ 735\text{ kg}$ $m_1=1\ 000\text{ kg}, m_2=1\ 500\text{ kg}$ $b_1=2.05\text{ m}, b_2=2.22\text{ m}$ $c_1=4\times 10^4\text{ kg/s}, c_2=3\times 10^4\text{ kg/s}$ $c_3=4.3\times 10^3\text{ kg/s}, c_4=3.9\times 10^3\text{ kg/s}$ $k_1=4.23\times 10^6\text{ N/m}, k_2=2.47\times 10^6\text{ N/m}$ $k_3=4.6\times 10^7\text{ N/m}, k_4=3.74\times 10^7\text{ N/m}$ |

设裂缝深度系数 $S=a/h$, 其中, a 为裂缝深度, h 为简支梁截面高度。在不同部位添加裂缝及不同的 S 设置不同的损伤工况, 如表 2 所示。设车辆过桥的速度为 2 m/s , 选取简支梁跨中处计算所得加速度响应为输出信号。

表 2 裂缝损伤工况
Table 2 Cases of cracks damage

| 工况 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|--------------|------|------|------|------|-----|-----|------|-----|
| l/m | 10.5 | 15.5 | 20.5 | 30.5 | | | 20.5 | |
| S | | 0.5 | | | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |

3.2 损伤识别结果

按照第 2 节方法, 计算工况 1~4 时的能量时程曲线如图 2 所示。由图 2 可知, 在混凝土开裂处, 能量时程曲线的幅值均出现增大现象, 说明通过裂缝处幅值变化能正确识别简支梁出现的损伤。应注意的是, 在车辆入、出桥时, 能量幅值均较大, 但在完好状态和不同损伤工况下, 能量时程曲线均表现出该现象, 并不影响对混凝土是否开裂的判定。

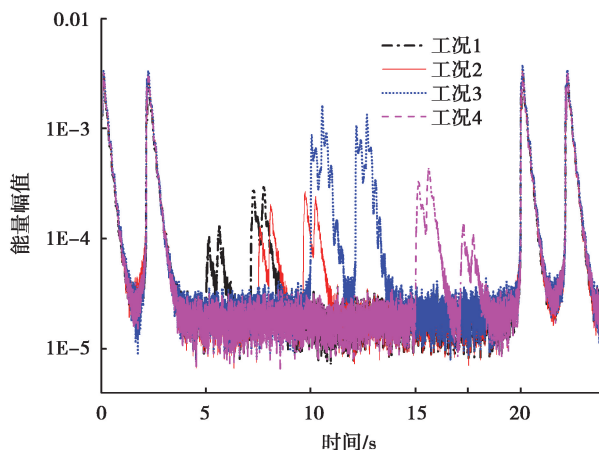


图 2 工况 1~4 下能量时程曲线
Fig. 2 Energy time history for damage case 1 to 4

取图 2 中各曲线尖峰点为特征点, 计算各工况下特征点的距离 l 和裂缝所在单元, 如表 3 所示。在表 3 中, 计算得到的裂缝单元信息与在有限元模型中添加裂缝的单元信息完全吻合, 表明文中方法能准确识别混凝土开裂位置。

计算损伤工况 3、5、6、7、8 下幅值比 f , 如图 3 所示。图 3 表明, 随着裂缝深度系数的增大, f 值呈单调上升趋势, 即通过 f 值的大小能够有效识别该裂缝的相对损伤程度。

表 3 工况 1~4 下损伤定位结果

| 工况 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| 裂缝单元 | 11 | 16 | 21 | 31 |
| l/m | 10.24 | 15.13 | 20.08 | 30.24 |
| m | 11 | 16 | 21 | 31 |

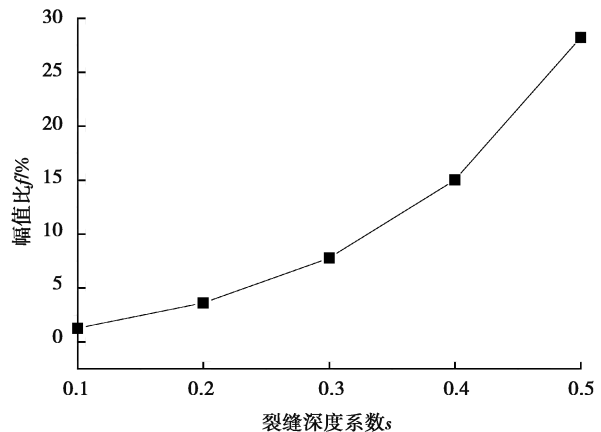


图 3 幅值比 f 的变化规律

Fig. 3 The variation law of the amplitude ratio

3.3 车辆条件影响分析

对于运营条件下的简支梁桥, 过桥车辆的重量和速度具有较大的随机性, 所以需分析在不同车重和车速条件下文中方法的识别效果。

3.3.1 车重影响

在裂缝位于简支梁左端 $l=15.5$ m 处, 裂缝深度系数 $S=0.5$, 车速 $v=2$ m/s 的条件下, 改变车重参数设置损伤工况 9~11, 如表 4 所示。

根据文中方法, 计算以上 4 种工况下裂缝所在单元和幅值比, 如表 4 所示。由表可知, 在不同车重情况下, 计算得到裂缝所在单元号 m 均为 16, 与裂缝预设位置吻合; 计算的幅值比相差很少, 表明车重即使变化超过 100%, 也不影响对裂缝损伤的定位和程度的识别。

表 4 不同车辆荷载作用下的损伤识别结果

Table 4 The results of damage identification under conditions with different vehicle load

| 参数 | 工况 2 | 工况 9 | 工况 10 | 工况 11 |
|----------|--------|--------|--------|--------|
| m_0/kg | 17 735 | 26 000 | 36 000 | 46 000 |
| m | 16 | 16 | 16 | 16 |
| $f/\%$ | 4.10 | 4.12 | 4.13 | 4.11 |

3.3.2 车速影响

为考查车速对开裂识别的影响, 选定工况 2 的参数, 分别取车速为 2、4、6、8、10、15、20 m/s, 计算得到的损伤位置 l 和幅值比 f , 如图 4 所示。

从图 4(a) 中可知, 除在车速 $v=15$ m/s 条件下识别得到的损伤位置与预设损伤单元有少许偏差外, 其余各车速条件下损伤定位结果均在预设损伤单元内, 表明车速对损伤定位的影响较小。

从图 4(b) 中可知, 随着车辆行驶速度的增大, 裂缝损伤的幅值比 f 也相应增大, 说明车速对损伤程度识别的影响较大。这主要是由于过大的车速会造成能量尖峰(也包含特征点)之间的重合, 从而无法找到能量时程曲线上的尖峰特征点, 例如, 选取车速 v 为 4、8、15 m/s, 过裂缝桥段能量时程曲线如图 5 所示。

应说明的是, 虽然车速对损伤程度识别有较大影响, 但从图 2 可知, 每辆车入桥、出桥均有明显的特征, 可利用能量时程曲线计算得到车辆过桥的车速 v 。在长期监测中可获得大量车辆过桥的数据, 选用车速相差较少数据进行损伤程度的识别。

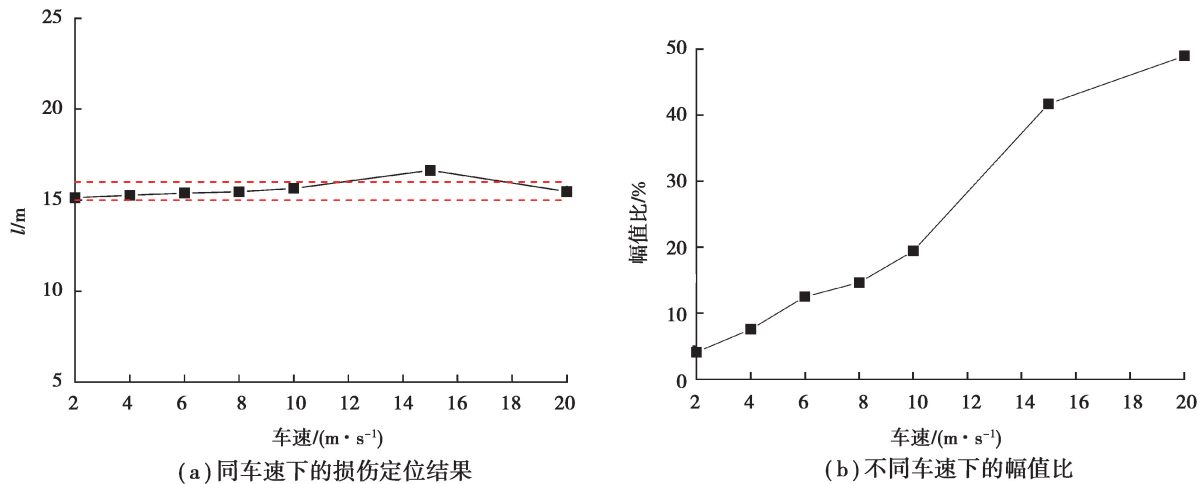


图4 不同车辆行驶速度下的损伤识别结果

Fig. 4 The results under different vehicle speeds

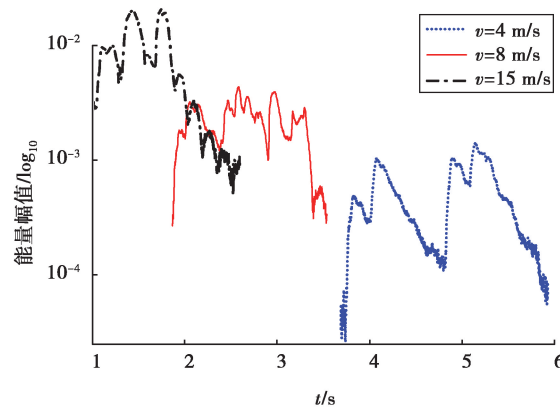


图5 不同车辆行驶速度下能量时程曲线

Fig. 5 The energy time history curve under conditions with different vehicle speeds

4 结 论

建立了运营荷载下考虑裂缝呼吸效应的简支梁精细化数值计算模型,基于改进的 HHT 方法计算车辆过桥的能量时程曲线。提出了基于能量指标的混凝土简支梁桥裂缝位置和程度的识别方法。模拟算例表明:

- 1)文中损伤识别方法采用单个传感器即可准确定位裂缝的损伤位置以及区分损伤程度的相对大小;
- 2)不同车重对裂缝部位及损伤程度识别的影响较小;
- 3)车速大小不影响裂缝部位的识别精度,但对损伤程度识别有较大影响,这一缺点可通过选用相同或相近车速条件下的信号在一定程度上予以克服。

参考文献:

- [1] 张衡. 基于改进 HHT 的混凝土简支梁桥非线性损伤识别方法[D]. 重庆: 重庆大学, 2018.
ZHANG Heng. Nonlinear damage identification method of concrete simply support beam based on improved HHT [D]. Chongqing: Chongqing University, 2018. (in Chinese)
- [2] Lin H P, Chang S C, Wu J D. Beam vibrations with an arbitrary number of cracks[J]. Journal of Sound and Vibration, 2002, 258(5): 987-999.
- [3] Neild S A, McFadden P D, Williams M S. A discrete model of a vibrating beam using a time-stepping approach[J].

- Journal of Sound and Vibration, 2001, 239(1): 99-121.
- [4] Roveri N, Carcaterra A. Damage detection in structures under traveling loads by Hilbert-Huang transform[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2012, 28: 128-144.
- [5] Gudmundson P. The dynamic behaviour of slender structures with cross-sectional cracks[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1983, 31(4): 329-345.
- [6] Chatterjee A. Structural damage assessment in a cantilever beam with a breathing crack using higher order frequency response functions[J]. Journal of Sound and Vibration, 2010, 329(16): 3325-3334.
- [7] Giannini O, Casini P, Vestroni F. Nonlinear harmonic identification of breathing cracks in beams[J]. Computers & Structures, 2013, 129: 166-177.
- [8] 盛程. 车桥耦合系统下呼吸裂缝的非线性损伤识别方法[D]. 重庆: 重庆大学, 2016.
SHENG Cheng. Nonlinear damage identification method of breathing crack in vehicle-bridge system[D]. Chongqing: Chongqing University, 2016.(in Chinese)
- [9] Cheng S M, Swamidas A S J, WU X J, et al. Vibrational response of a beam with a breathing crack [J]. Journal of Sound & Vibration, 1999, 225(1): 201-208.
- [10] Chondros T G, Dimarogonas A D, Yao J. Vibration of a beam with a breathing crack [J]. Journal of Sound & Vibration, 2001, 239(239): 57-67.
- [11] Rezaee M, Hassannejad R. A new approach to free vibration analysis of a beam with a breathing crack based on mechanical energy balance method[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2011, 24(2): 185-194.
- [12] 王文洁, 吕中荣, 刘济科. 含呼吸裂缝的桥梁振动响应与时频特性分析[J]. 振动与冲击, 2013, 32(11): 12-16.
WANG Wenjie, LYU Zhongrong, LIU Jike. Dynamic response and time-frequency feature analysis for a bridge with breathing cracks[J]. Journal of Vibration and Shock, 2013, 32(11): 12-16.(in Chinese)
- [13] Vigneshwaran K, Behera R K. Vibration analysis of a simply supported beam with multiple breathing cracks[J]. Procedia Engineering, 2014, 86: 835-842.
- [14] Ariaei A, Ziaei-rad S, Ghayour M. Vibration analysis of beams with open and breathing cracks subjected to moving masses [J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 326(3/4/5): 709-724.
- [15] Mousa, Rezaee, Reza, et al. Free vibration analysis of simple supported beam with breathing crack using perturbation method [J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2010, 23(5):459-470.
- [16] Nguyen K V. Comparison studies of open and breathing crack detections of a beam-like bridge subjected to a moving vehicle[J]. Engineering Structures, 2013, 51: 306-314.
- [17] 肖遥. 基于耦合方法的公路简支梁桥车桥耦合振动[D]. 长沙: 湖南大学, 2012.
XIAO Yao. Vehicle-bridge coupling vibration of simply supported bridge based on coupled method[D]. Changsha: Hunan University, 2012.(in Chinese)
- [18] Muscolino G, Santoro R. Dynamics of multiple cracked prismatic beams with uncertain-but-bounded depths under deterministic and stochastic loads[J]. Journal of Sound and Vibration, 2019, 443: 717-731.
- [19] Huang N E, Shen S S P. Hilbert-Huang transform and its applications [M]. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2005.
- [20] Sweeney-Reed C M, Nasuto S J, Vieira M F, et al. Empirical mode decomposition and its extensions applied to EEG analysis: a review[J]. Advances in Data Science and Adaptive Analysis, 2018, 10(2): 1840001.
- [21] Wu Z H, Huang N E. Ensemble empirical mode decomposition: a noise-assisted data analysis method[J]. Advances in Adaptive Data Analysis, 2009, 1(1): 1-41.