

doi:10.11835/j.issn.1000-582X.2020.294

作大范围运动功能梯度材料梁的动力学特性研究

高 祥¹, 杜超凡¹, 章定国², 周晓婷¹, 韩峻雯¹

(1. 扬州大学 建筑科学与工程学院, 江苏 扬州 225127; 2. 南京理工大学 理学院, 南京 210094)

摘要:采用假设模态法和有限元法两种离散方法描述柔性梁的变形场,对作大范围运动的中心刚体-功能梯度材料梁的动力学特征进行研究。假设功能梯度材料的物理参数为沿着梁厚度方向变化的幂函数,考虑梁的纵向拉伸变形和横向弯曲变形,同时计及横向弯曲变形引起的纵向缩短,即非线性耦合项,运用第二类 Lagrange 方程推导得到两种不同离散方法描述的具有统一形式的系统刚柔耦合动力学方程。通过与假设模态法的数值仿真结果对比,验证所建立有限元模型的正确性。通过大变形算例,说明基于小变形假设的假设模态法计算上的局限性。在此基础上讨论功能梯度指数对作大范围转动柔性梁动力学特性的影响。结果表明基于小变形假设的假设模态法并不能处理大变形问题;在功能梯度材料梁其他物理参数不变的条件下,梁的最大位移随着功能梯度指数 N 增大而增大;横向弯曲固有频率会随着转速的增加而变大;当转速一定时,固有频率会随着功能梯度指数 N 增大而减小。

关键词:功能梯度材料梁;刚柔耦合;动力学;自然频率

中图分类号: TB34

文献标志码: A

文章编号: 1000-582X(2020)06-065-12

Dynamic analysis of a functionally graded material beam undergoing large overall motions

GAO Xiang¹, DU Chaofan¹, ZHANG Dingguo², ZHOU Xiaoting¹, HAN Junwen¹

(1. College of Civil Science and Engineering, Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu 225127, P. R. China;

2. School of Science, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, P. R. China)

Abstract: The deformation field of the flexible beam was described by using the assumed mode method and the finite element method and the dynamic characteristics of a hub-functionally graded material beam undergoing large overall motions were studied. Assuming that the physical parameters of functionally graded materials followed certain kind of power law gradient distribution and varied along the thickness direction, considering both the longitudinal deformation and transversal deformation of the beam, and taking the nonlinear coupling term known as the longitudinal shortening caused by transversal deformation into account, we derived the rigid-flexible coupling dynamics equations of the system described by two

收稿日期: 2020-01-10 **网络出版日期:** 2020-04-09

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11802263, 11772158); 江苏省自然科学基金青年基金资助项目(BK20180895); 中央高校基金资助项目(30917011103)。

Supported by National Natural Science Foundation of China(11802263, 11772158), Natural Science Foundation of Jiangsu Province(BK20180895) and the Fundamental Research Funds for the Central Universities of China (30917011103).

作者简介: 高祥(1994—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为多体系统动力学与控制, (E-mail)2715475209@qq.com。

通讯作者: 杜超凡(1987—), 讲师, 主要研究方向为多体系统动力学与控制, (E-mail)duchaofan@yzu.edu.cn。

different discrete methods with a uniform form via employing Lagrange's equations of the second kind. The validity of the finite element method established in this paper was verified by comparison with the numerical simulation results of the assumed mode method. The limitation of the assumed mode method based on small deformation assumption was illustrated by the example of large deformation. On this basis, the influence of functional gradient distribution rules on the dynamic characteristics of flexible beams undergoing large overall motions was discussed. The results show that the assumed mode method cannot deal with large deformation problem. When other physical parameters of functionally graded materials beam remain unchanged, the maximum displacement of the beam increases with the increase of functionally graded materials index while the natural frequency of transverse bending of beam increases with the increase of rotational speed, and when rotational speed is constant, the natural frequency will decrease with the increase of functional gradient index.

Keywords: functionally graded material beam; rigid-flexible coupling; dynamics; natural frequencies

随着科学技术的飞速发展,传统材料耐热性和强度等方面的劣势越来越明显,尤其是一些尖端科技,例如航天工程领域,医学领域,生物科学领域等。为了满足实际工程的需要,亟需能满足复杂工况下的新型复合材料^[1]。功能梯度材料可将不同材料的优点集于一身,一经提出便引起各国学者的高度关注。它一般由金属和陶瓷按不同组分复合而成,既有金属材料强度高的特性,又有陶瓷材料耐热性好的特性,具备了传统材料不具备的优点,在航空航天领域特别是直升机旋翼、空间机械臂和太阳能帆板等复杂工况下的结构用材具有广阔的应用前景。

诸多学者们已经将假设模态法^[2]、有限元法^[3]、无网格法^[4]、Bezier 插值法^[5]等运用到作大范围运动柔性体变形的离散问题中,取得了诸多的成果。吴胜宝^[2]采用假设模态法进行离散均质柔性梁,建立了柔性梁作大范围运动的零次模型和一次模型,总结出零次模型和一次模型在不同转速下计算结果上的差异。张弛等^[6]利用假设模态法进行离散均质楔形梁,总结出在相同条件下梁的形状与端部有无质点对柔性梁的动力学响应产生十分明显的影响。文献[7-8]将该方法运用到离散功能梯度材料梁^[9-11]中去,得到了梯度的分布规律和功能梯度指数对系统的动力学特征都会产生不同的影响。文献[12-14]使用假设模态法、有限元法、无网格法等对作定轴旋转运动的均质柔性梁进行离散,对比不同方法下的计算结果,假设模态法在计算低速旋转小变形问题的结果十分精确,在计算高速旋转大变形问题的结果不够精确,在实际工程中不适合使用。在各种情况下有限元法和无网格法的计算结果令人满意。文献[3,12,15]采用有限元法和 Hamilton 变分原理推导出刚柔耦合的一次近似模型,说明了有限元法的一次模型较零次模型的优越性。杜超凡等^[16-17]利用无网格法对柔性梁进行离散,将得到的结果与假设模态法和有限元法的结果进行对比,得出有限元法、无网格法计算结果精确度更高的结论。He 等^[18]对作定轴旋转运动梁的固有频率进行研究,得出了不同模型固有频率的差异。

当今学者大都是对作大范围运动的均质梁进行仿真,对功能梯度梁的动力学仿真采用的是精度较低、适用范围较小的假设模态法。笔者采用有限元法描述功能梯度材料梁的变形,考虑梁的横向变形和轴向变形,以及由横向弯曲变形引起的耦合变形量,并在此基础上建立功能梯度材料梁的刚柔耦合动力学方程。采用浮动坐标系描述系统运动,运用第二类 Lagrange 方程推导系统动力学方程,并编制旋转功能梯度材料梁的仿真程序,将假设模态法的仿真计算结果与有限元法的仿真计算结果进行对比,表明本文方法的正确性和优越性。

1 旋转功能梯度材料梁动力学模型

1.1 系统的物理模型

图 1 为水平面内作定轴旋转运动的中心刚体-功能梯度材料梁系统, $Oxyz$ 为惯性坐标系,中心刚体的半径为 a ,外部输入力矩为 τ ,绕 z 轴转动的转动惯量为 J_{oh} 。功能梯度材料梁为等截面梁,功能梯度材料的物理

参数为:梁的长度为 L ,宽度为 b ,厚度为 h 。在梁上建立浮动坐标系 $Ox'y$,梁上任意一点 P 的变形如图 1 所示。不同于传统均质梁,功能梯度材料梁的物理特性沿厚度方向按一定幂规律梯度分布,本文中假设梁的弹性模量 $E(y)$ 和密度 $\rho(y)$ 为坐标 y 的函数^[8]。

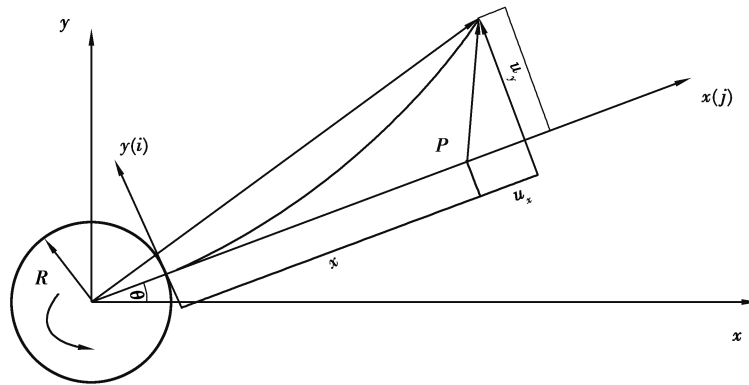


图 1 功能梯度梁的变形

Fig. 1 Deformation of the FGM beam

1.2 系统的动能和势能

在惯性坐标系 Oxy 中,功能梯度材料梁上任意一点 P 变形后的矢径为

$$r = \Theta(R + \rho_0 + u), \tag{1}$$

式中:

$$R = (a, 0)^T, \tag{2}$$

$$\rho_0 = (x, y)^T, \tag{3}$$

$$u = (u_x, u_y)^T, \tag{4}$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

其中, Θ 为浮动基相对于惯性坐标系的法向余弦矩阵,变形矢量 u 在浮动坐标系下可表示为:

$$u_x(x, y, t) = w_1 + w_c, \tag{6}$$

$$u_y(x, t) = w_2. \tag{7}$$

式中: w_1 为柔性梁的轴向变形量, w_2 为柔性梁横向弯曲的挠度, w_c 为柔性梁横向弯曲引起的纵向变形缩短量,即非线性耦合变形量,表达式为:

$$w_c(x, t) = -\frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{\partial w_2}{\partial \xi} \right)^2 d\xi. \tag{8}$$

对等式(1)关于时间 t 求一阶导数得到柔性梁任意点 P 在惯性坐标系下的速度,表达式为:

$$\dot{r} = \dot{\Theta}(R + \rho_0 + u) + \Theta\dot{u}. \tag{9}$$

因此系统的总动能可以表示为:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho(y) \dot{r}^T \dot{r} dV + \frac{1}{2} J_{oh} \dot{\theta}^2. \tag{10}$$

根据连续介质力学可以推导出柔性梁任意点 P 处的纵向正应变 ϵ_{11} ,表达式为:

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial w_1}{\partial x} - y \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}. \tag{11}$$

忽略梁的剪切和扭转效应,变形势能 U 可以表示为:

$$U = \frac{1}{2} \int_V E(y) \epsilon_{11}^2 dV. \tag{12}$$

1.3 有限元法

如图 2 所示,采用有限单元法对作定轴旋转运动的功能梯度材料梁进行离散,将功能梯度材料梁分成 N

个等长的梁元,在第 j 个梁元内,取轴向和横向变形的位移函数对梁进行描述。

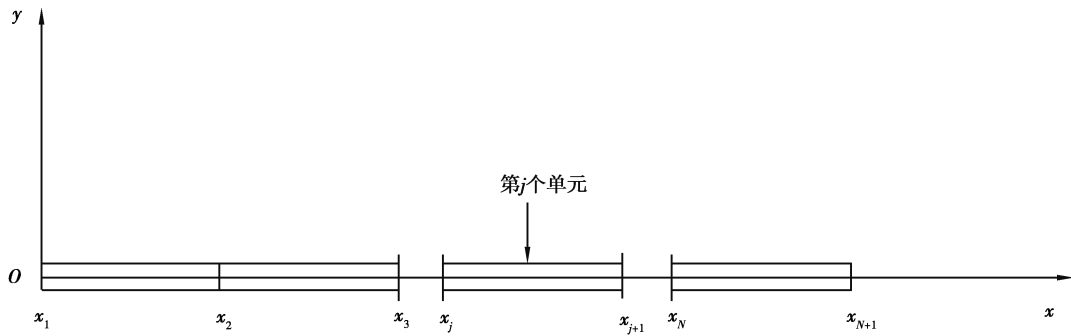


图 2 功能梯度梁有限元离散模型

Fig. 2 Finite element discrete model of the FGM beam

$$\begin{cases} w_1(\bar{x}, t) = \Phi_{xj}(\bar{x}) \mathbf{A}_j(t), \\ w_2(\bar{x}, t) = \Phi_{yj}(\bar{x}) \mathbf{B}_j(t), \end{cases} \quad (13)$$

式中: $\Phi_{xj}(\bar{x})$ 为轴向变形线性插值函数, $\Phi_{yj}(\bar{x})$ 为梁弯曲的标准有限元形函数; $\mathbf{A}_j(t)$ 和 $\mathbf{B}_j(t)$ 为第 j 个梁单元节点变形位移矢量, 各个变量分别表示为:

$$\begin{cases} \Phi_{xj}(\bar{x}) = [\phi_{xj}(\bar{x}), \phi_{xj+1}(\bar{x})], \\ \mathbf{A}_j(t) = [u_{xj}, u_{xj+1}]^T, \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} \Phi_{yj}(\bar{x}) = [\phi_{yj}(\bar{x}), \phi_{\theta j}(\bar{x}), \phi_{yj+1}(\bar{x}), \phi_{\theta j+1}(\bar{x})], \\ \mathbf{B}_j(t) = [u_{yj}, u_{\theta j}, u_{yj+1}, u_{\theta j+1}]^T. \end{cases} \quad (15)$$

取第 j 个单元作为研究对象, 建立梁单元自然坐标系 $\lambda - \mu$, 如图 3 所示, 惯性系下的自然坐标系的表达式:

$$\lambda = \frac{\bar{x}}{b}, \quad (16)$$

式中 \bar{x} 是单元坐标系下 P 点的坐标。

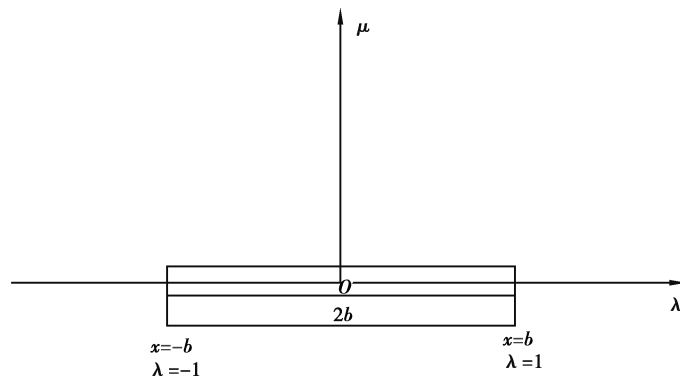


图 3 梁单元的自然坐标系

Fig. 3 Natural coordinate system of the beam element

在自然坐标系下, 梁单元形函数的具体表达式为:

$$\begin{cases} \phi_{xj}(\lambda) = -\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}, \\ \phi_{xj+1}(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} \phi_{y_j}(\lambda) = \frac{1}{4}(2 - 3\lambda + \lambda^3), \\ \phi_{\theta_j}(\lambda) = \frac{1}{4}b(1 - \lambda - \lambda^2 + \lambda^3), \\ \phi_{y_{j+1}}(\lambda) = \frac{1}{4}(2 + 3\lambda - \lambda^3), \\ \phi_{\theta_{j+1}}(\lambda) = \frac{1}{4}b(-1 - \lambda + \lambda^2 + \lambda^3). \end{cases} \quad (18)$$

设 $\mathbf{R}_x^j, \mathbf{R}_y^j$ 为第 j 个梁单元的定位矩阵, $\mathbf{A}(t)$ 和 $\mathbf{B}(t)$ 为梁的总体变形矢量列阵, 则第 j 个梁单元节点变形矢量与总体节点变形矢量可以用下列表达式描述:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_j = \mathbf{R}_x^j \mathbf{A}, \\ \mathbf{B}_j = \mathbf{R}_y^j \mathbf{B}, \end{cases} \quad (19)$$

其中, $\mathbf{R}_x^j, \mathbf{R}_y^j$ 分别为:

$$\mathbf{R}_x^j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$\mathbf{R}_y^j = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & L & I_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & L & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & L & 0_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} & L & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

因此, 梁的轴向和横向变形位移函数可以改写为:

$$\begin{cases} w_1(x, t) = \Phi_x(x) \mathbf{A}(t), \\ w_2(x, t) = \Phi_y(x) \mathbf{B}(t), \end{cases} \quad (22)$$

其中,

$$\begin{cases} \Phi_x(x) = \Phi_{x_j}(\bar{x}) \mathbf{R}_x^j, \\ \Phi_y(x) = \Phi_{y_j}(\bar{x}) \mathbf{R}_y^j, \end{cases} \quad (23)$$

则变形位移的二次耦合项为

$$w_c = -\frac{1}{2} \mathbf{B}^T \mathbf{H}(x) \mathbf{B}, \quad (24)$$

式中 $\mathbf{H}(x)$ 为耦合形函数, 若位于第 j 个单元内, 则表达式为

$$\mathbf{H}(x) = \frac{1}{b} \int_{-1}^{\lambda} (\mathbf{R}_y^j)^T \left(\frac{\partial \Phi_{y_j}^T(\lambda)}{\partial \lambda} \right) \left(\frac{\partial \Phi_{y_j}(\lambda)}{\partial \lambda} \right) \mathbf{R}_y^j d\lambda + \sum_{p=1}^{j-1} \frac{1}{b} \int_{-1}^1 (\mathbf{R}_y^p)^T \left(\frac{\partial \Phi_{y_p}^T(\lambda)}{\partial \lambda} \right) \left(\frac{\partial \Phi_{y_p}(\lambda)}{\partial \lambda} \right) \mathbf{R}_y^p d\lambda. \quad (25)$$

1.4 系统的动力学方程

将功能梯度梁的轴向和横向位移函数代入系统的动能和变形势能表达式中, 取广义坐标 $\mathbf{q} = (\theta, \mathbf{A}^T, \mathbf{B}^T)^T$, 运用第二类 Lagrange 方程:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{F}, \quad (26)$$

式中: $\mathbf{F} = (\tau, 0, 0)^T$ 为广义力, τ 为刚体上合外力关于刚体质心 O 的主矩。将式(10)和(12)代入式(26), 经过复杂的推导可以得到动力学方程:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} & \mathbf{M}_{13} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} & \mathbf{M}_{23} \\ \mathbf{M}_{31} & \mathbf{M}_{32} & \mathbf{M}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\mathbf{A}} \\ \ddot{\mathbf{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_\theta \\ \mathbf{Q}_A \\ \mathbf{Q}_B \end{bmatrix}. \quad (27)$$

动力学方程(27)中的相关矩阵表达式如下:

$$\mathbf{M}_{11} = J_{\text{oh}} + J_{\text{ob}} + 2 \mathbf{S}_x \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{M}_1 \mathbf{A} + \mathbf{B}^T \mathbf{M}_2 \mathbf{B} - \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} - \int_0^L \rho b h [\mathbf{A}^T \boldsymbol{\Phi}_x^T \mathbf{B}^T \mathbf{H}(x) \mathbf{B}] dx + \frac{1}{4} \int_0^L \rho b h [\mathbf{B}^T \mathbf{H}(x) \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{H}(x) \mathbf{B}] dx, \quad (28)$$

$$\mathbf{M}_{22} = \mathbf{M}_1, \quad (29)$$

$$\mathbf{M}_{33} = \mathbf{M}_2 + \int_0^L \rho b h [\mathbf{H}(x) \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{H}(x)] dx, \quad (30)$$

$$\mathbf{M}_{21} = \mathbf{M}_{12}^T = -\mathbf{M}_3 \mathbf{B}, \quad (31)$$

$$\mathbf{M}_{31} = \mathbf{M}_{13}^T = \mathbf{S}_y^T + \mathbf{M}_3^T \mathbf{A} + \int_0^L \rho b h [\mathbf{H}(x) \mathbf{B} \boldsymbol{\Phi}_y \mathbf{B}] dx - \frac{1}{2} \int_0^L \rho b h [\boldsymbol{\Phi}_y^T \mathbf{B}^T \mathbf{H}(x) \mathbf{B}] dx, \quad (32)$$

$$\mathbf{M}_{32} = \mathbf{M}_{23}^T = - \int_0^L \rho b h [\mathbf{H}(x) \mathbf{B} \boldsymbol{\Phi}_x] dx, \quad (33)$$

$$\mathbf{Q}_\theta = \tau - 2\dot{\theta} [\mathbf{S}_x \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{A}^T \mathbf{M}_1 \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{B}^T \mathbf{M}_2 \dot{\mathbf{B}} - \mathbf{B}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{B}}] + \int_0^L \rho b h [\dot{\theta} (2 \mathbf{A}^T \boldsymbol{\Phi}_x^T \mathbf{B}^T \mathbf{H} \dot{\mathbf{B}} - \mathbf{B}^T \mathbf{H}(x) \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{H}(x) \dot{\mathbf{B}}) - \mathbf{B}^T \boldsymbol{\Phi}_y^T \dot{\mathbf{B}}^T \mathbf{H}(x) \dot{\mathbf{B}}] dx + \quad (34)$$

$$\dot{\theta} \int_0^L \rho b h \dot{\mathbf{A}}^T \boldsymbol{\Phi}_x^T \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} dx,$$

$$\mathbf{Q}_A = \dot{\theta}^2 \mathbf{S}_x^T + 2\dot{\theta} \mathbf{M}_3 \dot{\mathbf{B}} + (\dot{\theta}^2 \mathbf{M}_1 - \mathbf{K}_1) \mathbf{A} + \mathbf{K}_2 \mathbf{B} + \int_0^L \rho b h [\boldsymbol{\Phi}_x^T \dot{\mathbf{B}}^T \mathbf{H}(x) \dot{\mathbf{B}} - \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \boldsymbol{\Phi}_x^T \mathbf{B}^T \mathbf{H}(x) \mathbf{B}] dx, \quad (35)$$

$$\mathbf{Q}_B = \dot{\theta}^2 (\mathbf{M}_2 - \mathbf{C}) \mathbf{B} - 2\dot{\theta} \mathbf{M}_3^T \dot{\mathbf{A}} - \mathbf{K}_3 \mathbf{B} + \mathbf{K}_2^T \mathbf{A} - \int_0^L \rho b h [2\dot{\theta} (\mathbf{H}(x) \mathbf{B} \boldsymbol{\Phi}_y \dot{\mathbf{B}} - \boldsymbol{\Phi}_y \mathbf{B}^T \mathbf{H}(x) \dot{\mathbf{B}}) + \mathbf{H}(x) \mathbf{B} \dot{\mathbf{B}}^T \mathbf{H}(x) \dot{\mathbf{B}}] dx + \quad (36)$$

$$\dot{\theta}^2 \int_0^L \rho b h [\frac{1}{2} \mathbf{H}(x) \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{H}(x) \mathbf{B} - \mathbf{H}(x) \mathbf{B} \boldsymbol{\Phi}_x \mathbf{A}] dx.$$

动力学方程(28)~(36)中相关矩阵系数表达式如下:

$$\mathbf{S}_x = \int_0^L \rho b h (R + x) \boldsymbol{\Phi}_x(x) dx, \quad (37)$$

$$\mathbf{S}_y = \int_0^L \rho b h (a + x) \boldsymbol{\Phi}_y(x) dx, \quad (38)$$

$$\mathbf{M}_1 = \int_0^L \rho b h \boldsymbol{\Phi}_x^T(x) \boldsymbol{\Phi}_x(x) dx, \quad (39)$$

$$\mathbf{M}_2 = \int_0^L \rho b h \boldsymbol{\Phi}_y^T(x) \boldsymbol{\Phi}_y(x) dx, \quad (40)$$

$$\mathbf{M}_3 = \int_0^L \rho b h \boldsymbol{\Phi}_x^T(x) \boldsymbol{\Phi}_y(x) dx, \quad (41)$$

$$\mathbf{C} = \int_0^L \rho b h (R + x) \mathbf{H}(x) dx, \quad (42)$$

$$\mathbf{K}_1 = \int_0^L E_1 b \boldsymbol{\Phi}_x'^T(x) \boldsymbol{\Phi}_x'(x) dx, \quad (43)$$

$$\mathbf{K}_2 = \int_0^L E_2 b \boldsymbol{\Phi}_x'^T(x) \boldsymbol{\Phi}_y''(x) dx, \quad (44)$$

$$\mathbf{K}_3 = \int_0^L E_3 b \boldsymbol{\Phi}_y''^T(x) \boldsymbol{\Phi}_y''(x) dx, \quad (45)$$

$$\rho = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(y) dy, \quad (46)$$

$$E_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(y) dy, \quad (47)$$

$$E_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(y)y dy, \quad (48)$$

$$E_3 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(y)y^2 dy, \quad (49)$$

式中, M_1 、 M_2 、 M_3 为弹性质量阵, K_1 、 K_2 、 K_3 为弹性刚度阵, C 为一次耦合项。

本文中所研究的功能梯度材料由陶瓷和金属材料构成, 材料的梯度分布为:

$$\left. \begin{aligned} E(y) &= (E_h - E_t) \left(\frac{2y+h}{2h} \right)^N + E_t \\ \rho(y) &= (\rho_h - \rho_t) \left(\frac{2y+h}{2h} \right)^N + \rho_t \end{aligned} \right\}, \quad (50)$$

式中下标 h 和 t 分别代表陶瓷材料和金属材料。

将(50)式代入(46)~(49)式中, 对密度、弹性模量的表达式进行改写, 得到:

$$\rho = \frac{\rho_h + N\rho_t}{N+1}, \quad (51)$$

$$E_1 = \frac{(E_h - E_t)h}{N+1} + E_t h, \quad (52)$$

$$E_2 = \frac{(E_h - E_t)Nh^2}{2(N+1)(N+2)}, \quad (53)$$

$$E_3 = \frac{(N^2 + N + 2)(E_h - E_t)h^3}{4(N+1)(N+2)(N+3)} + \frac{E_t h^3}{12}. \quad (54)$$

式(29)~(46)为功能梯度材料梁作大范围运动的一次模型, 去掉下划线部分就得到了旋转功能梯度材料梁做大范围运动的一次近似模型。

2 动力学仿真

2.1 大范围运动规律已知的系统动力学特征

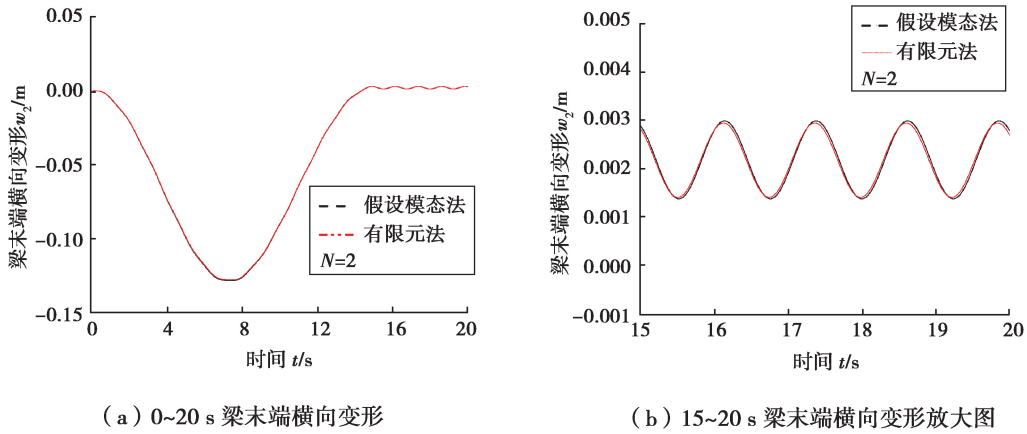
式(50)的物理参数为: $E_h = 1.51 \times 10^{11}$ Pa, $E_t = 7 \times 10^{10}$ Pa, $\rho_h = 3 \times 10^3$ kg/m³, $\rho_t = 2.707 \times 10^3$ kg/m³, N 为功能梯度指数, $l = 5$ m, $b = 2 \times 10^{-2}$ m, $h = 2 \times 10^{-2}$ m。与文献[8]中的物理参数一致。在本文中主要针对一次模型下不同的离散方法进行仿真计算。

采用假设模态法和有限元法描述柔性梁的变形场, 其中假设模态法模态阶数取4, 有限元法将功能梯度材料梁离散成10个单元。假定功能梯度材料梁作大范围运动的规律已知, 角速度的变化规律为:

$$\dot{\theta} = \begin{cases} \frac{\Omega_1}{T}t - \frac{\Omega_1}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right) & 0 \leq t \leq T, \\ \Omega_1 & t > T, \end{cases} \quad (55)$$

式中 $T = 15$ s, 在15 s后功能梯度材料梁以匀速 Ω_1 旋转。 Ω_1 分别取4, 10, 20 rad/s 研究在功能梯度指数 $N = 2$ 的功能梯度材料梁在不同离散方法下的动力学特征。然后研究在转速 $\Omega_1 = 4$ rad/s 时, 在不同离散方法下功能梯度指数分别取 $N = 0, 0.5, 1, 2, 5$ 下的动力学特征。

图4~9表示在功能梯度指数 $N = 2$, Ω_1 分别取4, 10, 20 rad/s 时, 柔性梁末端横向变形位移和横向变形速度。从图中可以看出, 在转速较低时, 假设模态法和有限元法的仿真结果基本一致, 说明本文有限元法所建模型的正确性。随着转速的增大, 假设模态法与有限元法的偏差越来越大。这是因为假设模态法基于小变形假设, 随着转速的增大变形也越来越大, 假设模态法的误差也必然越来越大。从各图中的横向变形位移放大图中可以看出, 振动平衡位置并不在梁轴线上, 而是发生了偏移, 并且转速越大偏移越明显。这是因为在 $N > 0$ 时, 金属材料与陶瓷材料并不是均匀对称分布于梁轴线两侧, 在计算变形能时产生了轴向与横向的耦合势能。

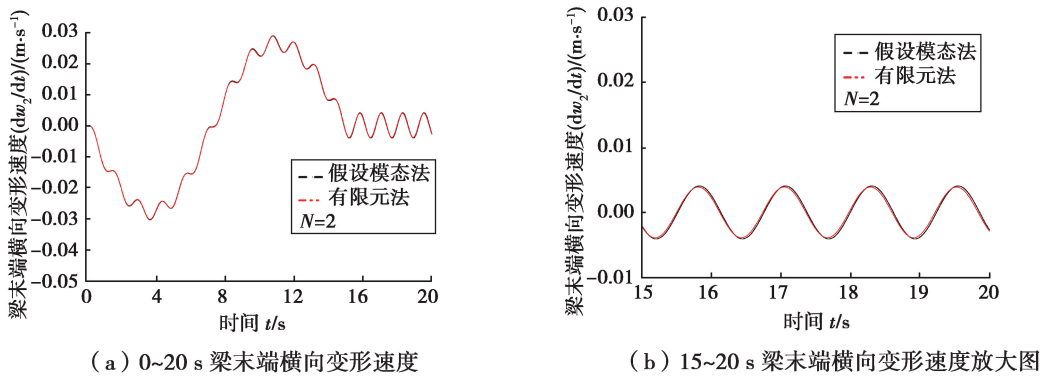


(a) 0~20 s 梁末端横向变形

(b) 15~20 s 梁末端横向变形放大图

图 4 梯度梁末端横向变形 ($\Omega_1 = 4 \text{ rad/s}$)

Fig. 4 Tip transverse deformation of the FGM beam

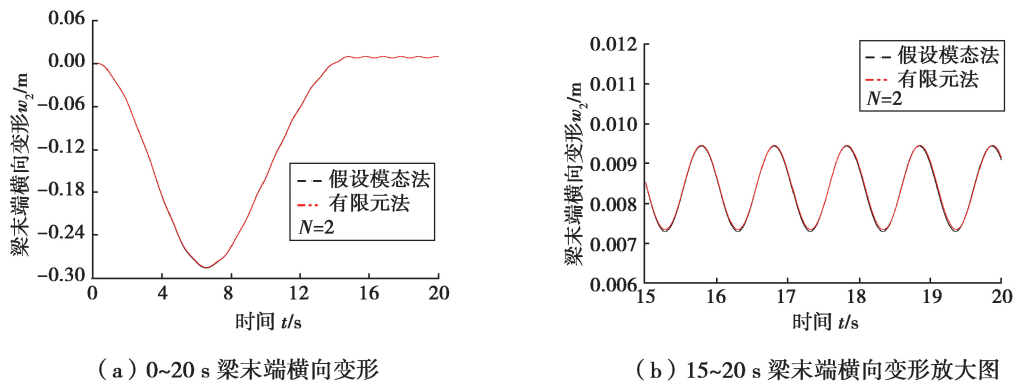


(a) 0~20 s 梁末端横向变形速度

(b) 15~20 s 梁末端横向变形速度放大图

图 5 梯度梁末端横向变形速度 ($\Omega_1 = 4 \text{ rad/s}$)

Fig. 5 Tip transverse velocity of the FGM beam



(a) 0~20 s 梁末端横向变形

(b) 15~20 s 梁末端横向变形放大图

图 6 梯度梁末端横向变形 ($\Omega_1 = 10 \text{ rad/s}$)

Fig. 6 Tip transverse deformation of the FGM beam

图 10 为 $\Omega_1 = 4 \text{ rad/s}$, 柔性梁末端横向变形随功能梯度指数 N 变化的情况。可明显看出在大范围运动加速展开的过程中, 梁末端最大横向变形随着功能梯度指数 N 的增大而增大。在横向变形位移放大图中可知, 当 $N = 0$ 时, 材料退化为均质材料, 振动平衡位置在梁轴线上, 当 $N > 0$ 时, 振动平衡位置发生了偏移。

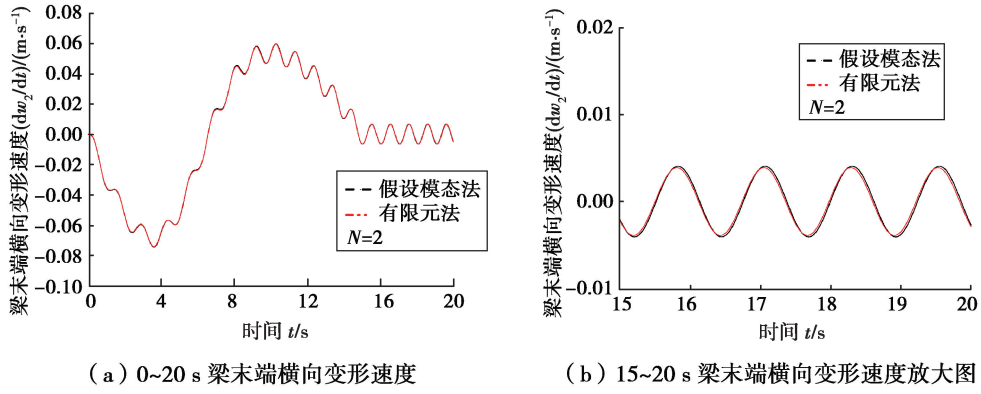


图 7 梯度梁末端横向变形速度 ($\Omega_1 = 10 \text{ rad/s}$)

Fig. 7 Tip transverse velocity of the FGM beam

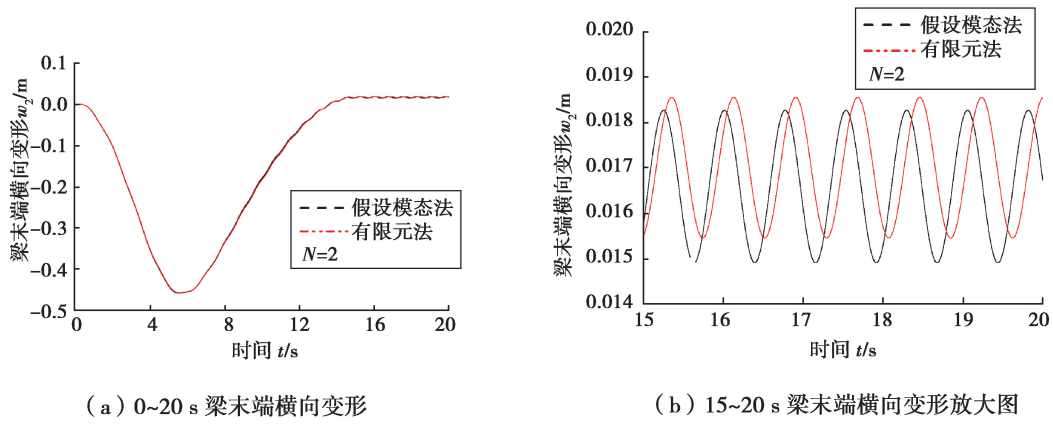


图 8 梯度梁末端横向变形 ($\Omega_1 = 20 \text{ rad/s}$)

Fig. 8 Tip transverse deformation of the FGM beam

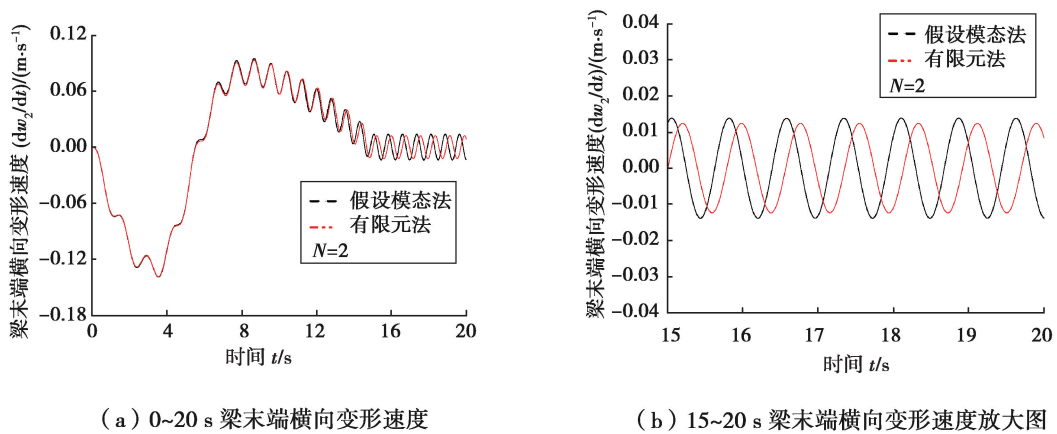


图 9 梯度梁末端横向变形速度 ($\Omega_1 = 20 \text{ rad/s}$)

Fig. 9 Tip transverse velocity of the FGM beam

图 11 表示 $\Omega_1 = 10 \text{ rad/s}$ 、 $N = 0$ 时,将 E_h 缩小 10 倍后梁末端的横向弯曲变形。如图所示,梁的最大变形超过了 1.2 m,属于大变形情况,有限元法的结果收敛而假设模态法的结果发散。进一步说明源于结构力学中固有振型的假设模态法只适用于小变形问题,并不能处理大变形问题。

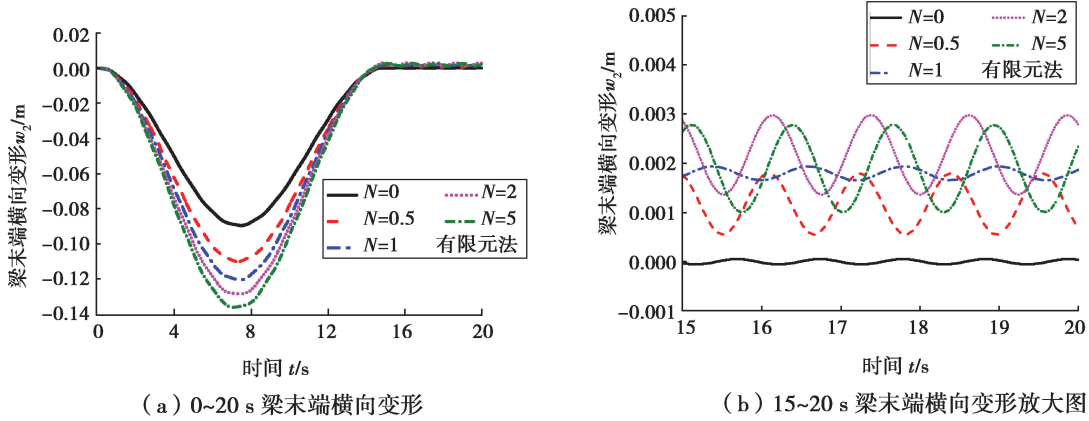
图 10 梯度梁末端横向变形 ($\Omega_1 = 4 \text{ rad/s}$)

Fig. 10 Tip transverse deformation of the FGM beam

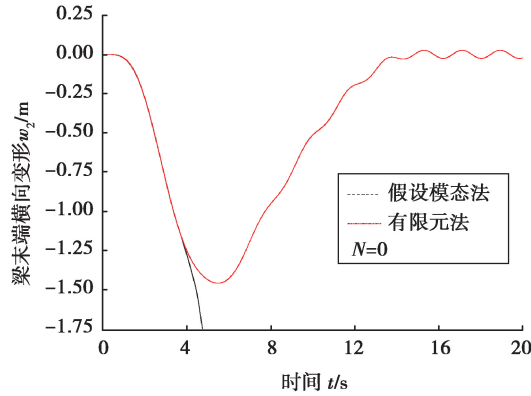
图 11 梯度梁末端横向变形 ($\Omega_1 = 10 \text{ rad/s}$)

Fig. 11 Tip transverse deformation of the FGM beam

2.2 横向弯曲固有频率分析

对作大范围运动的功能梯度梁系统的横向弯曲固有频率进行分析,不考虑横向弯曲造成的微小纵向变形,舍去与耦合变量相关的一些高阶小量,假定大范围转动为匀速即当 $\dot{\theta} = 0$,则梁的横向弯曲振动方程可以改写成:

$$\mathbf{M}_2 \ddot{\mathbf{B}} + [\dot{\theta}^2 (\mathbf{C} - \mathbf{M}_2) + \mathbf{K}_3] \mathbf{B} = 0, \quad (56)$$

对(56)式进行无量纲化处理,引入下列无量纲化变量:

$$\alpha = t/T; \beta = x/L; \chi = R/L; \delta = B/L, \quad (57)$$

$$\gamma = \dot{\theta} T; \phi = E_h/E_t; \phi = \rho_h/\rho_t, \quad (58)$$

$$T = (12\rho_t L^4/E_t h^2)^{1/2}. \quad (59)$$

式(56)可以改写成:

$$\overline{\mathbf{M}}_2 \ddot{\boldsymbol{\delta}} + [\gamma^2 (\overline{\mathbf{C}}_1 - \overline{\mathbf{M}}_2) + \nu \overline{\mathbf{K}}_3] \boldsymbol{\delta} = 0, \quad (60)$$

$$\overline{\mathbf{M}}_2 = \int_0^1 [\boldsymbol{\Psi}_y^T \boldsymbol{\Psi}_y] d\beta \quad \overline{\mathbf{C}}_1 = \int_0^1 [\beta \overline{\mathbf{H}}_1(\beta)] d\beta, \quad (61)$$

$$\overline{\mathbf{H}}_1(\beta) = \int_0^\beta [\boldsymbol{\Psi}_{y,\beta}^T \boldsymbol{\Psi}_{y,\beta}] d\beta \quad \overline{\mathbf{K}}_3 = \int_0^1 [\boldsymbol{\Psi}_{y,\beta\beta}^T \boldsymbol{\Psi}_{y,\beta\beta}] d\beta, \quad (62)$$

$$\nu = (\phi - 1) \frac{3(N^2 + N + 2)}{(N + \phi)(N + 2)(N + 3)} + \frac{N + 1}{N + \phi}. \quad (63)$$

表 1 为中心刚体半径为 0 时,功能梯度指数 N 恒定,采用假设模态法和有限元法得到的功能梯度材料梁横向弯曲固有频率随转速的变化情况。计算时,功能指数 $N=1$; $\phi=151/70$; $\varphi=3\ 000/2\ 707$ 。计算相对误差以有限元法的计算结果为计算基础。从表 1 可以看出梁的横向弯曲固有频率会随着转速的增加而变大。在转速较低时,两种离散方法仿真结果基本一致,随着转速的增加,两者偏差越来越大,进一步说明在高转速下,假设模态法的结果并不可靠。这主要是因为假设模态法的模态函数是在小变形假设的前提下提出的,而有限元法的形函数并不存在小变形假设。随着转速的增加,柔性梁的变形必然增大,因而基于小变形假设的假设模态法的结果在变形较大时并不可靠。

表 1 功能梯度材料梁在不同转速下两种不同离散方法的固有频率比较
Table 1 Comparison of natural frequencies of FGM beams with two different discrete methods at different rotational speeds

无量纲角速度 比率 γ	假设模态法 (一阶)	有限元法 (一阶)	计算相对 误差/%	假设模态法 (三阶)	有限元法 (三阶)	计算相对 误差/%
1	4.325 1	4.325 4	0.006 0	75.847 0	76.554 6	0.924 0
2	4.390 8	4.390 7	0.003 0	76.177 2	76.891 8	0.929 0
3	4.494 9	4.494 3	0.013 0	76.724 3	77.450 4	0.937 0
4	4.630 9	4.629 6	0.028 0	77.483 4	78.225 3	0.948 0
5	4.791 7	4.789 6	0.043 0	78.448 1	79.209 7	0.961 0
10	5.772 6	5.764 9	0.133 0	86.048 7	86.953 7	1.040 0
20	7.869 0	7.815 0	0.690 0	111.131 3	112.397 9	1.126 7

表 2 为中心刚体半径为 0,功能梯度材料梁转速恒定,采用假设模态法和有限元法得到的功能梯度材料梁横向弯曲的固有频率随功能梯度指数 N 的变化情况。计算时 $\phi=151/70$; $\varphi=3\ 000/2\ 707$, $\gamma=3$ 。从表 2 中可以发现,当转速一定时,固有频率会随着功能梯度指数 N 增大而减小,说明 N 越大柔性梁系统的柔度越大,与图 10 所示结论一致。

表 2 功能梯度材料梁在不同功能梯度指数下两种不同离散方法的固有频率比较
Table 2 Comparison of natural frequencies of FGM beams with two different discrete methods under different FGM indices

功能梯度 指数 N	假设模态法 (一阶)	有限元法 (一阶)	假设模态法 (二阶)	有限元法 (二阶)	假设模态法 (三阶)	有限元法 (三阶)
1	4.494 9	4.494 3	27.865 9	27.949 8	76.724 3	77.450 4
2	4.375 2	4.374 5	27.109 9	27.191 0	74.556 6	75.262 9
3	4.312 4	4.311 8	26.713 6	26.793 3	73.419 4	74.115 3
4	4.264 4	4.263 7	26.410 2	26.488 8	72.548 1	73.236 0
5	4.223 8	4.223 1	26.153 9	26.231 6	71.811 9	72.493 1
10	4.085 8	4.085 0	25.281 7	25.356 2	69.303 5	69.961 8
20	3.958 3	3.957 5	24.475 8	24.547 4	66.982 2	67.619 3
50	3.844 8	3.843 9	23.758 7	23.827 6	64.913 0	65.531 2
100	3.797 8	3.797 0	23.462 2	23.530 1	64.056 6	64.667 0
300	3.763 4	3.762 6	23.244 7	23.311 8	63.427 9	64.032 6
500	3.756 2	3.755 3	23.199 2	23.266 0	63.296 1	63.899 6

3 结 论

1) 功能梯度梁末端最大横向变形位移随功能梯度指数 N 的增大而变大, 当 $N > 0$ 时, 稳态振动平衡位置会发生偏移, 不在梁轴线上。

2) 假设模态法在变形较大时结果发散, 不能处理大变形问题。有限元法结果收敛, 可用于求解大变形问题。

3) 作大范围匀速转动的功能梯度梁的横向弯曲固有频率随着转速的增大而变大, 随着功能梯度指数 N 的增大而减小。

因此, 对比假设模态法, 有限元法的计算模型更具有优越性, 在工程中处理大变形问题应该优先选用有限元法。功能梯度指数 N 的取值对横向弯曲固有频率影响显著, 工程中应该给予重视, 对构件进行设计时应选择合理的功能梯度指数材料。

参考文献:

- [1] 李信, 刘海昌, 滕元成, 等. 功能梯度材料的研究现状及展望[J]. 材料导报, 2012, 26(S1): 370-373.
LI Xin, LIU Haichang, TENG Yuancheng, et al. Research status and future directions on functionally gradient materials[J]. Materials Review, 2012, 26(S1): 370-373. (in Chinese)
- [2] 吴胜宝. 作大范围运动柔性梁和柔性薄板刚柔耦合动力学建模与仿真[D]. 南京: 南京理工大学, 2009.
WU Shengbao. Modeling and simulation of rigid-flex coupling dynamics of flexible beam and flexible thin plate[D]. Nanjing: Nanjing University of Science and Technology, 2009. (in Chinese)
- [3] 杨辉, 洪嘉振, 余征跃. 刚-柔耦合多体系统动力学建模与数值仿真[J]. 计算力学学报, 2003(4): 402-408.
YANG Hui, HONG Jiazhen, YU Zhengyue. Dynamics modeling and numerical simulation for a rigid-flexible coupling multibody system[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2003(4): 402-408. (in Chinese)
- [4] Ji Lin, Fen Chen, Yuhui Zhang, et al. An accurate meshless collocation technique for solving two-dimensional hyperbolic telegraph equations in arbitrary domains[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2019, 108: 372-384.
- [5] Earl Ryan M A, Zamayla A D, Shayne Lyle M T. Decision-making system of soccer-playing robots using finite state machine based on skill hierarchy and path planning through Bezier polynomials[J]. Procedia Computer Science, 2018, 135: 230-237.
- [6] 张弛, 范纪华, 章定国, 等. 考虑端部质点的中心刚体-楔形梁系统动力特性研究[J]. 力学季刊, 2018, 39(2): 270-279.
ZHANG Chi, FAN Jihua, ZHANG Dingguo, et al. Dynamic study of central rigid body-tapered beam system with tip mass [J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2018, 39(2): 270-279. (in Chinese)
- [7] Rezaei V, Shafei A M. Dynamic analysis of flexible robotic manipulators constructed of functionally graded materials[J]. Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering, 2019, 43(1): 327-342.
- [8] 黎亮, 章定国, 洪嘉振. 中心刚体-功能梯度材料梁系统的动力学特性[J]. 机械工程学报, 2013, 49(13): 77-84.
LI Liang, ZHANG Dingguo, HONG Jiazhen. Dynamics of hub-functionally graded material beam systems[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013, 49(13): 77-84. (in Chinese)
- [9] Tang D, Hao L, Li Y, et al. Dual gradient direct ink writing for formation of kaolinite ceramic functionally graded materials[J]. Journal of Alloys and Compounds, 2020, 814: 152275.
- [10] Zhang C, Chen F, Huang Z F, et al. Additive manufacturing of functionally graded materials: A review[J]. Materials Science & Engineering A, 2019, 764: 138209.
- [11] Sun C Y, Gao H J, He W, et al. Fuzzy neural network control of a flexible robotic manipulator using assumed mode method[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2018, 29(11): 5214-5227.

(下转第 89 页)

- SHENG Tao, WANG Xu, WANG Xiaolei, et al. Response surface methodology to optimize the honeycomb sandwich fabrication process[J]. *Hi-Tech Fiber and Application*, 2019(1):43-52. (in Chinese)
- [10] 李烁, 徐元铭, 张俊. 复合材料加筋结构的神经网络响应面优化设计[J]. *机械工程学报*, 2006, 42(11): 115-119.
LI Shuo, XU Yuanming, ZHANG Jun. Neural network response surface optimization design for composite stiffened structures[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2006, 42(11):115-119. (in Chinese)
- [11] Xu Y M, Li S, Rong X M. Composite structural optimization by genetic algorithm and neural network response surface modeling[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2005, 18(4):310-316.
- [12] Bisagni C, Lanzi L. Post-buckling optimisation of composite stiffened panels using neural networks [J]. *Composite Structures*, 2002, 58(2):237-247.
- [13] 郭占一. 一体化复合材料上层建筑力学性能及其连接结构设计研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2016.
GUO Zhanyi. Mechanical analysis and joints design of integrated composite superstructure [D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2016. (in Chinese)
- [14] 苟鹏, 刘蔚, 崔维成. 船舶结构多学科设计优化近似方法的比较[J]. *船舶力学*, 2007, 11(6): 913-923.
GOU Peng, LIU Wei, CUI Weicheng. A comparison of approximation methods for multidisciplinary design optimization of ship structures[J]. *Journal of Ship Mechanics*, 2007, 11(6): 913-923. (in Chinese)
- [15] Montgomery D C. Design and analysis of experiments[M]. New York, USA: John Wiley & Sons, 2004.
- [16] 张崎. 基于 Kriging 方法的结构可靠性分析及优化设计[D]. 大连: 大连理工大学, 2005.
ZHANG Qi. Structural reliability analysis and optimal design based on kriging method[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2005. (in Chinese)

(编辑 郑 洁)

(上接第 76 页)

- [12] 杜超凡. 基于无网格法的刚-柔耦合系统的动力学建模与仿真[D]. 南京: 南京理工大学, 2017.
DU Chaofan. A study on the dynamic modeling and simulation for the rigid-flexible coupled system based on meshless methods[D]. Nanjing: Nanjing University of Science and Technology, 2017. (in Chinese)
- [13] 范纪华, 章定国. 基于变形场不同离散方法的柔性机器人动力学建模与仿真[J]. *力学学报*, 2016, 48(4):843-856.
FAN Jihua, ZHANG Dingguo. Dynamic modeling and simulation of flexible robots based on different discretization method[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2016, 48(4):843-856. (in Chinese)
- [14] Salahshoor E, Ebrahimi S, Zhang Y. Frequency analysis of a typical planar flexible multibody system with joint clearances[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2018, 126:429-456.
- [15] 蹇开林, 殷学纲. 旋转梁的固有频率计算[J]. *重庆大学学报(自然科学版)*, 2001, 24(6):36-39.
JIAN Kailin, YIN Xuegang. Computation of natural frequencies of a rotating beam[J]. *Journal of Chongqing University (Natural Science Edition)*, 2001, 24(6): 36-39. (in Chinese)
- [16] 杜超凡, 章定国. 基于无网格点插值法的旋转悬臂梁的动力学分析[J]. *物理学报*, 2015, 64(3): 406-415.
DU Chaofan, ZHANG Dingguo. Dynamic analysis of rotating cantilever beam based on meshless point interpolation[J]. *Acta Physica Sinica*, 2015, 64(3): 406-415. (in Chinese)
- [17] 杜超凡, 章定国, 洪嘉振. 径向基点插值法在旋转柔性梁动力学中的应用[J]. *力学学报*, 2015, 47(2): 279-288.
DU Chaofan, ZHANG Dingguo, HONG Jiazhen. A meshfree method based on radial point interpolation method for the dynamic analysis of rotating flexible beams[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2015, 47(2):279-288. (in Chinese)
- [18] He G L, Ding K, Wu X M, et al. Dynamics modeling and vibration modulation signal analysis of wind turbine planetary gearbox with a floating sun gear[J]. *Renewable Energy*, 2019, 139: 718-729.

(编辑 郑 洁)