

doi:10.11835/j.issn.1000-582X.2021.01.003

# 一种减小互耦的互素嵌套阵列及测向算法

刘 声<sup>1,2</sup>, 赵 静<sup>2</sup>, 曹海林<sup>1</sup>, 田昌海<sup>2</sup>, 吴德成<sup>1</sup>

(1. 重庆大学 空天地网络互连与信息融合重庆市重点实验室, 重庆 400044; 2. 铜仁学院  
大数据学院, 贵州 铜仁 554300)

**摘要:**为了减小阵元之间的互耦效应,首先提出一种阵元间距可调节的互素嵌套阵列。这种阵列由2个不同的嵌套子阵列组成,2个子阵的最小阵元间距由一对互素的正整数确定。只要这对正整数足够大,2个子阵的最小阵元间距便可远超过入射信号的半个波长,从而将阵元间的互耦效应减小到可忽略的程度。然后,为了解决大间距阵列所引起的角度模糊问题,提出了一种基于四阶累积量的无模糊波达方向(DOA, direction of arrival)估计算法。仿真实验表明,此算法具有较好的估计性能,相比一些经典的自校正DOA估计算法,此算法具有更高的角度分辨力和估计精确度。

**关键词:**互耦;互素嵌套阵;四阶累积量;DOA估计

**中图分类号:** TN957

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1000-582X(2020)01-020-09

## A co-prime nested array algorithm in reducing mutual coupling and DOA estimation

LIU Sheng<sup>1,2</sup>, ZHAO Jing<sup>2</sup>, CAO Hailin<sup>1</sup>, TIAN Changhai<sup>2</sup>, WU Decheng<sup>1</sup>

(1. Chongqing Key Laboratory of Space Information Network and Intelligent Information Fusion, Chongqing University, Chongqing 400044, P. R. China; 2. School of Data Science, Tongren University, Tongren, Guizhou 554300, P. R. China)

**Abstract:** In order to reduce the mutual coupling between sensors, a kind of co-prime nested array with adjustable element spacing is proposed. The proposed array consists of two nested arrays with different element spacing and the smallest intervals of two sub-arrays are determined by two co-prime positive integers. As long as the positive integers are big enough, the smallest intervals of each sub-array can be far more than half the wave length of incident signal, hence the reduction of the mutual coupling effect between sensors to a negligible level. To eliminate the direction ambiguity caused by large element spacing, a direction of arrival (DOA) estimation algorithm based on fourth-order cumulants is proposed to get

**收稿日期:** 2020-06-12

**基金项目:**国家自然科学基金资助项目(51877015, U1831117);贵州省科技厅联合基金资助项目(LH[2017]7320, LH[2017]7321);贵州省教育厅科技拔尖人才资助项目(KY[2018]075);贵州省教育厅重大资助项目(KY[2016]051)。

Supported by National Natural Science Foundation of China (51877015, U1831117), Cooperation Agreement Foundation of the Department of Science and Technology of Guizhou Province(LH[2017]7320, LH[2017]7321), Top-notch Talents Project of Education Department of Guizhou Province(KY[2018]075), Innovation Group Major Research Project of Education Department of Guizhou Province(KY[2016]051).

**作者简介:**刘声(1984—),男,博士,副教授,主要从事阵列信号处理方向研究,(E-mail)dshls@gztrc.edu.cn。

**通讯作者:**曹海林,男,副教授,博士生导师,主要从事通信、微电子方向研究,(E-mail)hailincao@cqu.edu.cn。

unambiguous direction estimation. Compared with some classical self-correcting methods, the proposed algorithm has a higher angle resolution and estimation precision. Simulation results have proved the improved performance of proposed algorithm.

**Keywords:** mutual coupling; co-prime nested array; fourth-order cumulant; DOA estimation

利用阵列天线接收空间信号并通过对接收信号进行处理来获取空间信号方位角的过程称为波达方向 (DOA, direction of arrival) 估计。DOA 估计在移动通信<sup>[1]</sup>、雷达定位<sup>[2-4]</sup>和电子对抗等领域有着广泛的应用。近年来,已有大量的 DOA 估计算法被提出,其中包括多重信号分类 (MUSIC, multiple signal classification) 算法<sup>[2-3]</sup>,旋转不变子空间 (ESPRIT, estimation of signal parameters via rotational invariance techniques) 算法<sup>[4-5]</sup>,传播算子 (PM, propagator method) 算法<sup>[6]</sup>以及稀疏重构类算法<sup>[7]</sup>。但这些算法最早都是针对均匀阵列提出的。

对于常规的均匀阵列,为了避免角度模糊,阵元间距不能超过入射信号的半个波长。事实上,在实际应用中,当阵元间距很小时,阵元间的互耦效应就会比较明显。Wang 等<sup>[8]</sup>利用矩阵分解的方法将互耦系数从流形矩阵中分离开,构造一个不包含互耦系数的代价函数,通过搜索代价函数的最值来实现对 DOA 的估计。Ye 等<sup>[9]</sup>利用阵列部分中间阵元的接收数据提出了一种解耦算法,能有效地消除互耦的影响,然而这种算法孔径损失较为严重。Liu 等<sup>[10]</sup>利用部分中间阵元接收数据的四阶累积量,提出了一种自校正 DOA 估计算法,可以弥补部分孔径损失。Cao 等<sup>[11]</sup>同样也是利用中间阵元接收数据,提出了一种针对非圆信号的自校正 DOA 估计算法。

除了利用算法来消除互耦效应对 DOA 估计的影响,使用稀疏阵列也是减小阵元间互耦效应的重要途径。阵元间的互耦效应会随着间距的增大而减弱,当间距足够大时,互耦效应便可以忽略。所以,在考虑互耦效应时,往往只需要考虑相近的阵元。稀疏阵列的阵元间距可以超过入射信号的半个波长,所以相对均匀阵列而言,稀疏阵列的互耦效应会更小。常见的稀疏阵列有互素阵列<sup>[12-13]</sup>,嵌套阵列<sup>[14-20]</sup>等。对于大部分稀疏阵列来说,虽然随着部分阵元间距的增加,互耦作用在一定程度上减小了,但是却很难做到将互耦的影响完全消除。为了获得具有连续虚拟阵元的虚拟阵列,大多数阵列的最小阵元间距依然不能超过入射信号的半个波长。虽然 Li 等<sup>[13]</sup>和 Shi 等<sup>[20]</sup>也提出了可以完全消除互耦作用的阵列结构,但在这些阵列对应的虚拟阵列中会出现很多的孔洞,从而无法像稀疏阵列<sup>[14-16]</sup>那样获得具有连续虚拟阵元的虚拟阵列。这样会使得很多经典的高精度 DOA 估计算法很难直接应用于这些阵列。

笔者提出一种由 2 个嵌套子阵列组成的互素嵌套阵列,2 个子阵的最小间距由一对互素的整数确定。这 2 个子阵列的最小间距可以远超过入射信号的半个波长。所以只要选择的互素整数足够大就可以将互耦效应减小到可以忽略的程度。针对这种特殊阵列结构,又提出另一种无模糊的 DOA 估计算法。此算法先利用接收数据的四阶累积量构造一个四阶累积量矩阵,然后通过对这个矩阵的多步处理获得一个信号子空间。这个信号子空间可以对应一个具有连续虚拟阵元的虚拟阵列,利用这个信号子空间可获得无模糊的 DOA 估计值。相对于其它稀疏线阵<sup>[14-19]</sup>,所提阵列可通过调整间距做到完全消除阵元间互耦效应影响,且不会产生角度模糊。相比于已有解耦算法<sup>[5-7]</sup>,所提的阵列结构及算法具有更高的角度分辨能力和估计精确度。

符号说明:符号“cum{·}”,“[·]<sup>T</sup>”,“[·]<sup>H</sup>”,“[·]<sup>\*</sup>”,“⊗”和“[·]<sup>+</sup>”分别表示四阶累积量,转置,共轭转置,共轭,kronecker 乘积和 Moore-Penrose 广义逆。 $\mathbf{H}(i, j)$ 表示矩阵  $\mathbf{H}$  第  $i$  行,第  $j$  列位置的元素, $\mathbf{H}(i:j, :)$ 表示选取矩阵  $\mathbf{H}$  的第  $i$  行至第  $j$  行, $\mathbf{I}_K$ 表示  $K$  阶单位矩阵。

## 1 互素嵌套阵列结构

如图 1 所示,互素嵌套阵列由 2 个子嵌套阵组成,每个子阵可看成嵌套阵列<sup>[14]</sup>的扩展结构。令  $d = \lambda/2$ ,其中  $\lambda$  表示信号波长,第一个子阵包含  $N$  ( $N = N_1 + N_2$ ) 个阵元,单位间距为  $qd$ 。第二个子阵包含  $M$  ( $M = M_1 + M_2$ ) 个阵元,单位间距为  $pd$ ,其中  $q$  与  $p$  是一对互素的正整数。图 2 给出了一个 9 元互素嵌套阵列结构,其中  $q = 3, p = 4$ 。

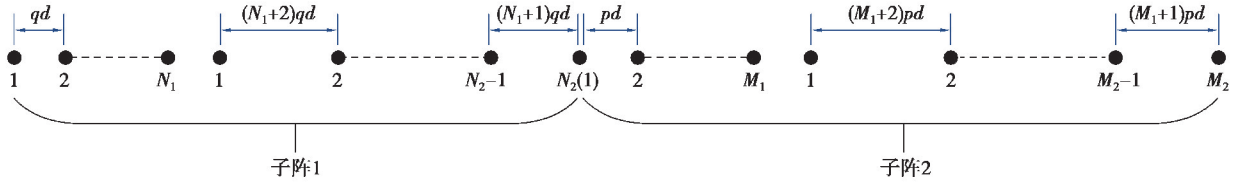


图 1 互素嵌套阵列

Fig. 1 Co-prime nested array

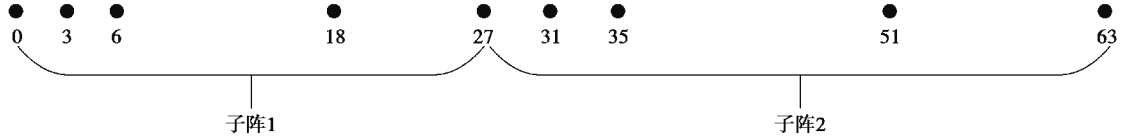


图 2 9 元互素嵌套阵列

Fig. 2 9-element co-prime nested array

令第一个子阵的第一个阵元为参考阵元, 设  $K$  个远场窄带不相干信号  $s_1(t), \dots, s_K(t)$  的方向角分别为  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K$ 。令  $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K]$ ,  $\Delta = 2\pi d/\lambda$ 。不考虑互耦效应时, 阵列接收可以表示为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}_1(t), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}_2(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_{N-1}(t), x_N(t)]^T \in \mathbf{C}^{N \times 1}$ ;  $\mathbf{y}(t) = [y_1(t), \dots, y_{M-1}(t), y_M(t)]^T \in \mathbf{C}^{M \times 1}$ ;  $\mathbf{s}(t) = [s_1(t), \dots, s_K(t)]^T \in \mathbf{C}^{K \times 1}$  表示非高斯信号向量;  $\mathbf{n}_1(t) = [n_{11}(t), \dots, n_{1N}(t)] \in \mathbf{C}^{N \times 1}$  和  $\mathbf{n}_2(t) = [n_{21}(t), \dots, n_{2M}(t)] \in \mathbf{C}^{M \times 1}$  是 2 个子阵接收的高斯噪声;  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_K)] \in \mathbf{C}^{N \times K}$ ;  $\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{b}(\theta_1), \dots, \mathbf{b}(\theta_K)] \in \mathbf{C}^{M \times K}$ ;  $\mathbf{a}(\theta_k) = [1, e^{-i\frac{2\pi qd}{\lambda} \sin \theta_k}, \dots, e^{-i\frac{2\pi qd}{\lambda} (N_1-1) \sin \theta_k}, e^{-i\frac{2\pi qd}{\lambda} N_1 \sin \theta_k}, e^{-i\frac{2\pi qd}{\lambda} (2N_1+2) \sin \theta_k}, \dots, e^{-i\frac{2\pi qd}{\lambda} [(N_2-1)(N_1+2)-2] \sin \theta_k}, \dots, e^{-i\frac{2\pi qd}{\lambda} [N_2(N_1+2)-3] \sin \theta_k}]^T$ ,  $\mathbf{b}(\theta_k) = [e^{-i\Delta_0 \sin \theta_k}, e^{-i(\frac{2\pi pd}{\lambda} + \Delta_0) \sin \theta_k}, \dots, e^{-i[\frac{2\pi pd}{\lambda} (M_1-1) + \Delta_0] \sin \theta_k}, e^{-i[\frac{2\pi pd}{\lambda} M_1 + \Delta_0] \sin \theta_k}, e^{-i[\frac{2\pi pd}{\lambda} (2(M_1+1) + \Delta_0) \sin \theta_k}, \dots, e^{-i[\frac{2\pi pd}{\lambda} (M_2(M_1+2)-3) + \Delta_0] \sin \theta_k}]^T$ ;  $\Delta_0 = \frac{2\pi qd}{\lambda} [N_2(N_1+2)-3]$ 。

当考虑阵元互耦效应时, 整个阵列接收可以表示为

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{M} \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{B}'(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix} \mathbf{s}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1(t) \\ \mathbf{n}'_2(t) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

其中:  $\mathbf{B}'(\boldsymbol{\theta})$  和  $\mathbf{n}'_2(t)$  分别表示  $\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})$  和  $\mathbf{n}_2(t)$  的后  $M-1$  行,  $\mathbf{M} \in \mathbf{C}^{(M+N-1) \times (M+N-1)}$  为互耦矩阵,  $m_{ij}$  表示第  $i$  个阵元与第  $j$  个阵元间的互耦系数, 且满足  $m_{ii} = 1$ 。当第  $i$  个阵元与第  $j$  个阵元间距离大于某值  $wd$  时,  $m_{ij} = 0$ , 即互耦效应可以忽略。对于所提阵列结构, 只要选取一对都大于  $w$  的互素整数, 便可消除互耦的影响。

## 2 DOA 估计算法描述

对于所提阵列, 由于单位间距大于半个波长, 且对应的虚拟阵列包含的虚拟阵元不具有连续性。所以无法直接使用空间平滑算法来构造扩展的协方差矩阵和获取信号子空间。下面针对这种特殊的阵列结构, 提出一种基于四阶累积量的 DOA 估计算法。

首先利用阵列接收数据的 4 阶累积量构造 4 个四阶累积量矩阵  $\mathbf{C}_1 \in \mathbf{C}^{[N_2(N_1+2)-2] \times [N_2(N_1+2)-2]}$ ,  $\mathbf{C}_2 \in \mathbf{C}^{[N_2(N_1+2)-2] \times [M_2(M_1+2)-2]}$ ,  $\mathbf{C}_3 \in \mathbf{C}^{[M_2(M_1+2)-2] \times [N_2(N_1+2)-2]}$  和  $\mathbf{C}_4 \in \mathbf{C}^{[M_2(M_1+2)-2] \times [M_2(M_1+2)-2]}$ 。对于任意给定的  $1 \leq u, v \leq N_2(N_1+2)-2, 1 \leq \bar{u}, \bar{v} \leq M_2(M_1+2)-2$  都存在以下唯一分解式

$$\begin{cases} u = u_1 + u_2(N_1 + 2), \\ v = v_1 + v_2(N_1 + 2), \\ \bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2(M_1 + 2), \\ \bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2(M_1 + 2), \end{cases} \quad (3)$$

其中,  $1 \leq u_1, v_1 \leq N_1 + 2, 1 \leq \bar{u}_1, \bar{v}_1 \leq M_1 + 2$ 。

利用分解式(3),  $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4$  可根据下面公式确定

$$\begin{cases} \mathbf{C}_1(u, v) = \text{cum}\{x_a(t), x_b^*(t), x_c^*(t), x_d(t)\}, \\ \mathbf{C}_2(u, \bar{v}) = \text{cum}\{x_a(t), x_b^*(t), y_e^*(t), y_{\bar{a}}(t)\}, \\ \mathbf{C}_3(\bar{u}, v) = \text{cum}\{y_e(t), y_{\bar{b}}^*(t), x_c^*(t), x_d(t)\}, \\ \mathbf{C}_4(\bar{u}, \bar{v}) = \text{cum}\{y_e(t), y_{\bar{b}}^*(t), y_e^*(t), y_{\bar{a}}(t)\}, \end{cases} \quad (4)$$

其中,  $a, b, c, d, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$  满足

$$\begin{cases} a = N_1 + 1 + u_2, b = N_1 + 2 - u_1; & \text{当 } u_1 < N_1 + 2, \\ a = N, b = N - u_2 - 1; & \text{当 } u_1 = N_1 + 2, \\ c = N_1 + 1 + v_2, d = N_1 + 2 - v_1; & \text{当 } v_1 < N_1 + 2, \\ c = N, d = N - v_2 - 1; & \text{当 } v_1 = N_1 + 2, \\ \bar{a} = M_1 + 1 + \bar{u}_2, \bar{b} = M_1 + 2 - \bar{u}_1; & \text{当 } \bar{u}_1 < M_1 + 2, \\ \bar{a} = M, \bar{b} = M - \bar{u}_2 - 1; & \text{当 } \bar{u}_1 = M_1 + 2, \\ \bar{c} = M_1 + 1 + \bar{v}_2, \bar{d} = M_1 + 2 - \bar{v}_1; & \text{当 } \bar{v}_1 < M_1 + 2, \\ \bar{c} = M, \bar{d} = M - \bar{v}_2 - 1; & \text{当 } \bar{v}_1 = M_1 + 2, \end{cases} \quad (5)$$

利用这 4 个四阶累积量矩阵  $\mathbf{C}_i, i=1, 2, 3, 4$  可以构造一个分块四阶累积量矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{C}_3 & \mathbf{C}_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \mathbf{S}_0 [\mathbf{A}^H \quad \mathbf{B}^H], \end{aligned} \quad (6)$$

其中:  $\bar{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}) = [\bar{a}(\theta_1), \dots, \bar{a}(\theta_K)] \in \mathbf{C}^{[N_2(N_1+2)-2] \times K}$ ;  $\bar{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}) = [\bar{b}(\theta_1), \dots, \bar{b}(\theta_K)] \in \mathbf{C}^{[M_2(M_1+2)-2] \times K}$ ;  $\bar{a}(\theta_k) = [1, e^{-i\frac{2\pi qd}{\lambda} \sin \theta_k}, \dots, e^{-i\frac{2\pi qd}{\lambda} [N_2(N_1+2)-3] \sin \theta_k}]^T$ ;  $\bar{b}(\theta_k) = [1, e^{-i\frac{2\pi pd}{\lambda} \sin \theta_k}, \dots, e^{-i\frac{2\pi pd}{\lambda} [M_2(M_1+2)-3] \sin \theta_k}]^T$ ;  $\mathbf{S}_0 = \text{diag}\{S_1, S_2, \dots, S_K\}$ ;  $S_k = \text{cum}\{s_k, s_k^*, s_k^*, s_k\}, k=1, 2, 3, \dots, K$ 。设  $\bar{\mathbf{A}}_1$  和  $\bar{\mathbf{A}}_2$  分别是由  $\bar{\mathbf{A}}$  的前  $N_2(N_1+2)-3$  行和后  $N_2(N_1+2)-3$  行构成的矩阵

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{A}}_1 = \bar{\mathbf{A}}(1:N_2(N_1+2)-3, :), \\ \bar{\mathbf{A}}_2 = \bar{\mathbf{A}}(2:N_2(N_1+2)-2, :). \end{cases} \quad (7)$$

设  $\bar{\mathbf{B}}_1$  和  $\bar{\mathbf{B}}_2$  分别是由  $\bar{\mathbf{B}}$  的前  $M_2(M_1+2)-3$  行和后  $M_2(M_1+2)-3$  行构成的矩阵

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{B}}_1 = \bar{\mathbf{B}}(1:M_2(M_1+2)-3, :), \\ \bar{\mathbf{B}}_2 = \bar{\mathbf{B}}(2:M_2(M_1+2)-2, :). \end{cases} \quad (8)$$

根据  $\bar{\mathbf{A}}_1, \bar{\mathbf{A}}_2, \bar{\mathbf{B}}_1, \bar{\mathbf{B}}_2$  的元素特点可知

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{A}}_2 = \bar{\mathbf{A}}_1 \boldsymbol{\Phi}_1, \\ \bar{\mathbf{B}}_2 = \bar{\mathbf{B}}_1 \boldsymbol{\Phi}_2, \end{cases} \quad (9)$$

其中:  $\boldsymbol{\Phi}_1 = \text{diag}\{e^{-i\frac{2\pi qd}{\lambda} \sin \theta_1}, \dots, e^{-i\frac{2\pi qd}{\lambda} \sin \theta_K}\}$ ;  $\boldsymbol{\Phi}_2 = \text{diag}\{e^{-i\frac{2\pi pd}{\lambda} \sin \theta_1}, \dots, e^{-i\frac{2\pi pd}{\lambda} \sin \theta_K}\}$ 。

对  $\mathbf{C}$  进行特征值分解,  $\mathbf{C}$  的  $K$  个最大特征值对应向量组成的矩阵  $\mathbf{U}_s$  称为信号子空间, 且存在可逆矩阵  $\mathbf{T}$  满足

$$\mathbf{U}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \mathbf{T}, \quad (10)$$

从  $\mathbf{U}_s$  中提出 2 个子矩阵, 分别记为

$$\begin{cases} \mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_s(1:N_2(N_1+2)-2,:), \\ \mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_s(N_2(N_1+2)-1:N_2(N_1+2)+M_2(M_1+2)-4,:). \end{cases} \quad (11)$$

再从  $\mathbf{U}_s$  中提取出 4 个矩阵, 分别记为

$$\begin{cases} \mathbf{U}_{11} = \mathbf{U}_s(1:N_2(N_1+2)-3,:), \\ \mathbf{U}_{12} = \mathbf{U}_s(2:N_2(N_1+2)-2,:), \\ \mathbf{U}_{21} = \mathbf{U}_s(N_2(N_1+2)-1:N_2(N_1+2)+M_2(M_1+2)-5,:), \\ \mathbf{U}_{22} = \mathbf{U}_s(N_2(N_1+2):N_2(N_1+2)+M_2(M_1+2)-4,:). \end{cases} \quad (12)$$

根据式(10)和(11), 可知

$$\begin{cases} \mathbf{U}_1 = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{T}; \\ \mathbf{U}_2 = \bar{\mathbf{B}}\mathbf{T}. \end{cases} \quad (13)$$

再根据式(10)和(13), 可知

$$\begin{cases} \mathbf{U}_{11} = \bar{\mathbf{A}}_1\mathbf{T}, \\ \mathbf{U}_{12} = \bar{\mathbf{A}}_2\mathbf{T}, \\ \mathbf{U}_{21} = \bar{\mathbf{B}}_1\mathbf{T}, \\ \mathbf{U}_{22} = \bar{\mathbf{B}}_2\mathbf{T}. \end{cases} \quad (14)$$

类似 ESPRIT 算<sup>[4-5]</sup>法, 利用式(14)可得

$$\begin{cases} \mathbf{U}_{11}^+\mathbf{U}_{12} = \mathbf{T}^{-1}\Phi_1\mathbf{T}; \\ \mathbf{U}_{21}^+\mathbf{U}_{22} = \mathbf{T}^{-1}\Phi_2\mathbf{T}. \end{cases} \quad (15)$$

然而, 在这里不能直接像 ESPRIT 算法一样, 通过对  $\mathbf{U}_{11}^+\mathbf{U}_{12}$  或者  $\mathbf{U}_{21}^+\mathbf{U}_{22}$  进行特征值分解来获取 DOA 估计值。当  $p \neq 1, q \neq 1$  时, 利用特征值分解得到得 DOA 估计值会出现角度模糊。

但是, 因为  $q$  与  $p$  是一对互素的整数, 所以一定存在另外 2 个整数  $p_1, q_1$  使得  $p_1p + q_1q = 1$ 。此时对  $\mathbf{U}_{11}^+\mathbf{U}_{12}$  和  $\mathbf{U}_{21}^+\mathbf{U}_{22}$  进行乘方运算, 便可得到

$$\begin{cases} (\mathbf{U}_{11}^+\mathbf{U}_{12})^{q_1} = \mathbf{T}^{-1}\Phi_1^{q_1}\mathbf{T}; \\ (\mathbf{U}_{21}^+\mathbf{U}_{22})^{p_1} = \mathbf{T}^{-1}\Phi_2^{p_1}\mathbf{T}; \end{cases} \quad (16)$$

如果当  $p_1$  或  $q_1$  是负数时, 定义  $(\mathbf{U}_{11}^+\mathbf{U}_{12})^{q_1} = (\mathbf{U}_{12}^+\mathbf{U}_{11})^{-q_1}$  或  $(\mathbf{U}_{21}^+\mathbf{U}_{22})^{p_1} = (\mathbf{U}_{22}^+\mathbf{U}_{21})^{-p_1}$ 。

设对角矩阵  $\Phi = \Phi_1^{q_1}\Phi_2^{p_1}$ , 根据(16)可知

$$\begin{aligned} \Phi &= \text{diag}\{e^{-i\frac{2\pi qq_1 d}{\lambda}\sin\theta_1}, \dots, e^{-i\frac{2\pi qq_1 d}{\lambda}\sin\theta_K}\} \text{diag}\{e^{-i\frac{2\pi pp_1 d}{\lambda}\sin\theta_1}, \dots, e^{-i\frac{2\pi pp_1 d}{\lambda}\sin\theta_K}\} \\ &= \text{diag}\{e^{-i\frac{2\pi(qq_1+p_1p)d}{\lambda}\sin\theta_1}, \dots, e^{-i\frac{2\pi(qq_1+p_1p)d}{\lambda}\sin\theta_K}\} \\ &= \text{diag}\{e^{-i\frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta_1}, \dots, e^{-i\frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta_K}\} \end{aligned} \quad (17)$$

令矩阵  $\Xi = (\mathbf{U}_{11}^+\mathbf{U}_{12})^{q_1}(\mathbf{U}_{21}^+\mathbf{U}_{22})^{p_1}$ , 由式(16)、(17)可知

$$\begin{aligned} \Xi &= (\mathbf{U}_{11}^+\mathbf{U}_{12})^{q_1}(\mathbf{U}_{21}^+\mathbf{U}_{22})^{p_1} \\ &= \mathbf{T}^{-1}\Phi_1^{q_1}\Phi_2^{p_1}\mathbf{T} = \mathbf{T}^{-1}\Phi\mathbf{T}. \end{aligned} \quad (18)$$

此时对  $\Xi$  进行特征值分解, 便可获得无模糊的 DOA。然而, 这个方法获得的 DOA 估计值的精确度依然不高, 所以利用  $\Xi$  对原有的信号子空间进行扩展。

构造 2 组选择矩阵  $\mathbf{E}_{1t} = \mathbf{I}_{N_2(N_1+2)-2} \otimes \hat{\mathbf{e}}_t, t=0, 1, 2, \dots, q-1, \mathbf{E}_{2t} = \mathbf{I}_{M_2(M_1+2)-2} \otimes \tilde{\mathbf{e}}_t, t=0, 1, 2, \dots, p-1$  其中  $\hat{\mathbf{e}}_t \in C^{1 \times q}, \tilde{\mathbf{e}}_t \in C^{1 \times p}$  表示只有第  $t+1$  个分量为 1, 其它分量为 0 的 2 个向量。利用  $\mathbf{E}_{1t}, \mathbf{E}_{2t}$  对  $\mathbf{U}_1$  和  $\mathbf{U}_2$  进行扩展, 构造出  $\mathbf{U}_{\text{new1}}$  和  $\mathbf{U}_{\text{new2}}$

$$\begin{cases} \mathbf{U}_{\text{new1}} = \sum_{t=0}^{q-1} \mathbf{E}_{1t} \mathbf{U}_1 \Xi^T = \tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{T}; \\ \mathbf{U}_{\text{new2}} = \sum_{t=0}^{p-1} \mathbf{E}_{2t} \mathbf{U}_2 \Xi^T = \tilde{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{T}. \end{cases} \quad (19)$$

合并  $\mathbf{U}_{\text{new1}}, \mathbf{U}_{\text{new2}}$  构造  $\mathbf{U}_{\text{new}}$

$$\mathbf{U}_{\text{new}} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{\text{new1}} \\ \mathbf{U}_{\text{new2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}) \\ \tilde{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix} \mathbf{T}, \quad (20)$$

其中:  $\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}) = [\tilde{\mathbf{a}}(\theta_1), \dots, \tilde{\mathbf{a}}(\theta_K)] \in \mathbf{C}^{q[N_2(N_1+2)-2] \times K}$ ;  $\tilde{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}) = [\tilde{\mathbf{b}}(\theta_1), \dots, \tilde{\mathbf{b}}(\theta_K)] \in \mathbf{C}^{p[M_2(M_1+2)-2] \times K}$ ;  $\tilde{\mathbf{a}}(\theta_k) = [1, e^{-i\frac{2\pi qd}{\lambda} \sin \theta_k}, \dots, e^{-i\frac{2\pi qd}{\lambda} [q(N_2(N_1+2)-2)-1] \sin \theta_k}]^T \in \mathbf{C}^{q[N_2(N_1+2)-2] \times 1}$ ;  $\tilde{\mathbf{b}}(\theta_k) = [1, e^{-i\frac{2\pi pd}{\lambda} \sin \theta_k}, \dots, e^{-i\frac{2\pi pd}{\lambda} [p(M_2(M_1+2)-2)-1] \sin \theta_k}]^T \in \mathbf{C}^{p[M_2(M_1+2)-2] \times 1}$ 。

从  $\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta})$  和  $\tilde{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta})$  的结构可以看出,这 2 个阵列流形矩阵对应的虚拟阵列是不存孔洞的,所以利用信号子空间  $\mathbf{U}_{\text{new}}$  来估计信号角度不会出现角度模糊。

对  $\mathbf{U}_{\text{new}}$  进行正交化可获得标准正交化向量  $\mathbf{U}_{\text{new}}^o$ <sup>[2]</sup>,再构造函数

$$f(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{I} - \mathbf{U}_{\text{new}}^o(\mathbf{U}_{\text{new}}^o)^H)\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})}, \quad (21)$$

搜索出  $f(\boldsymbol{\theta})$  的最大值,便可估计出正确的方向角。

### 3 仿真实验

通过几个仿真实验来对比所提算法与已有自校正算法的性能。假设  $\omega=2$ ,即当阵元间距超过  $2d$  时,阵元耦合效应可以忽略。假设阵元本身的互耦系数为 1,距离相差  $d$  的 2 个阵元的互耦系数为  $c_2=0.9+0.4i$ ,距离相差  $2d$  的 2 个阵元的互耦系数为  $c_3=0.5-0.35i$ 。对于所有算法,谱峰搜索的间隔固定为  $0.1^\circ$ 。设解耦算法<sup>[8-10]</sup>使用 14 元均匀阵列,阵元间距为  $d$ 。对于所提的阵列,设  $N=7, M=8$ ,因为 2 个子阵存在一个共用阵元,所以阵元总数也是 14。在前 2 组实验中,研究阵列取  $q=3, p=4$ ,在这种情况下阵列中所有阵元的互耦效应就可以完全忽略。在第二组仿真实验中,利用 DOA 估计的均方根误差(RMSE, root mean square error)来评价算法的估计精确度,并设 RMSE 的定义为

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{KJ} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K (\hat{\theta}_{kj} - \theta_k)^2}, \quad (22)$$

其中  $J=200$  表示 Monte-Carlo 实验的次数,  $\hat{\theta}_{kj}$  表示在第  $j$  次试验中对第  $k$  个信号的方向角估计值。

第一组仿真实验对比 4 种不同算法对角度的分辨能力,将快拍数固定在 500,信噪比 SNR(signal noise ratio)固定在 10 dB。首先设 4 个信号的方向角为  $30^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ$ 。图 3(a)显示了算法与 Liu 等<sup>[10]</sup>提出的算法的空间谱。图 3(b)显示的是 Wang 等<sup>[8]</sup>和 Ye<sup>[9]</sup>等所提算法的空间谱。通过观察这 2 幅对比图,可以发现只有算法和 Liu 的算法<sup>[10]</sup>能较好的将 4 个信号区分开,而其他 2 个算法对这 4 个信号的区分效果很差。然后将 4 个信号的方向角改为  $45^\circ, 50^\circ, 55^\circ, 60^\circ$ ,角度间隔减小到  $5^\circ$ 。图 4(a)显示出算法与 Liu 的算法<sup>[10]</sup>的空间谱,图 4(b)显示了 Wang 的算法<sup>[8]</sup>和 Ye 的算法<sup>[9]</sup>的空间谱。此时,可以发现算法依然能够将 4 个信号顺利的区分开,但其它 3 个算法都已无法区分这 4 个信号。这几幅仿真图中的结果可以反映出所提方法对信号的分辨能力要明显好过其它 3 种算法。

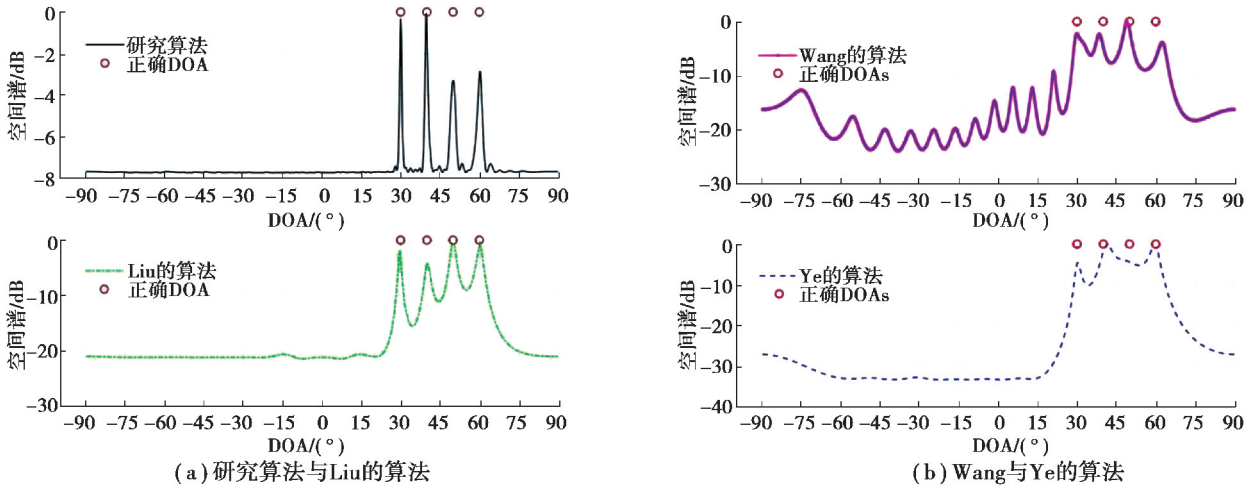


图 3 空间谱对比图(角度间隔为  $10^\circ$ )

Fig. 3 Spatial spectral comparison of four signals with  $10^\circ$  angular interval

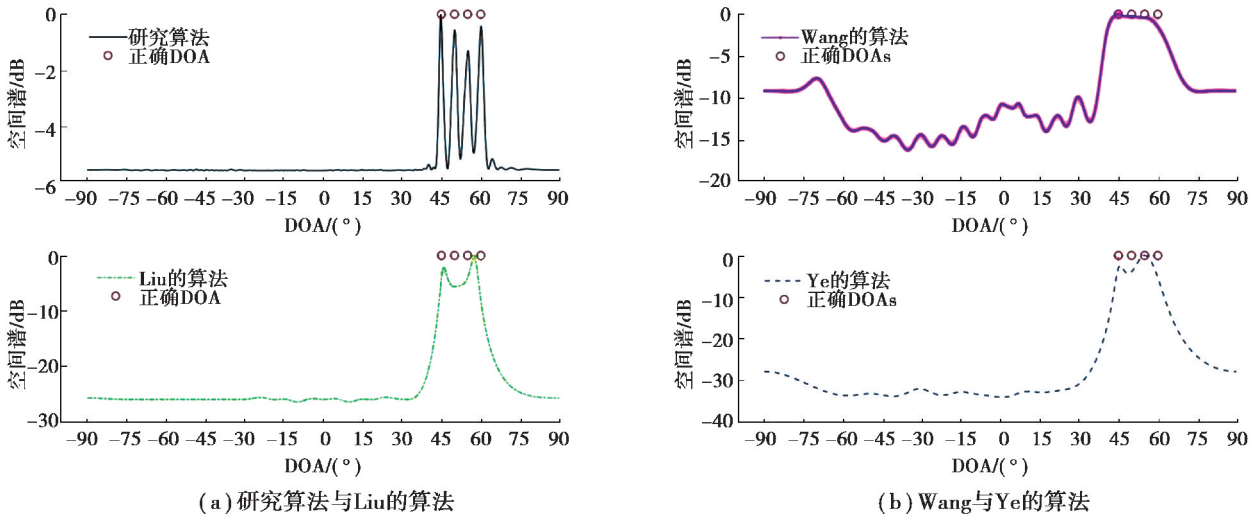


图 4 空间谱对比图(角度间隔为 5°)

Fig. 4 Spatial spectral comparison of four signals with 5° angular interval

第二组仿真实验对比 4 种不同算法对角度估计的精确度。此次实验是在信号能被分辨开的情况下进行对比,所以信号源的数量减少到 3 个,方向角设为 30°,40°,50°。首先将快拍数固定在 500。图 5 显示 4 个算法的均方根误差随信噪比的变化情况。然后将信噪比固定在 2.5 dB,图 6 显示 4 个算法的均方根误差随快拍数的变化情况。从这 2 幅对比图中可以发现,算法的估计精确度要远超过其他 3 种算法。另外,从图 5 中可以发现当信噪比较低的时候,算法的优势更加明显。而从图 6 中也可以发现算法即使在较低的快拍数下也能获得较好的估计性能。综合 2 组仿真实验的结果,算法无论是在估计精确度方面,还是对角度的分辨力方面都会优于已有的几种自校正 DOA 估计算法。

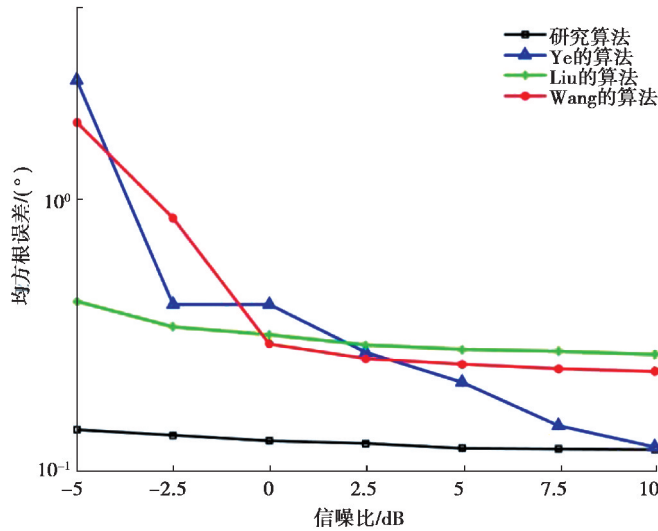


图 5 四种算法均方根误差随信噪比的变化曲线

Fig. 5 RMSE of four methods versus SNR

第三组仿真实验对比所提算法在不同的  $q, p$  取值下的 DOA 估计效果。为了反应阵元间距对 DOA 估计精确度的作用,此次仿真实验也不考虑阵元的互耦效应。从图 7 中可以看出,算法在  $q=4, p=5$  时估计的精确度是最高的。从这个仿真结果可以发现,所提的算法并不会因为阵元间距的增加而导致估计精确度的降低。反而随着间距增大估计精确度有提高的趋势。事实上,随着  $q, p$  取值的增大,阵列能应对的互耦效应的强度也会增大。当  $q=4, p=5$  时,便可应对  $w=3$  的情形。而此时对于解耦算法<sup>[8-10]</sup>,解耦效果就会进一

步降低,尤其是算法<sup>[9-10]</sup>孔径损失将会更加严重。

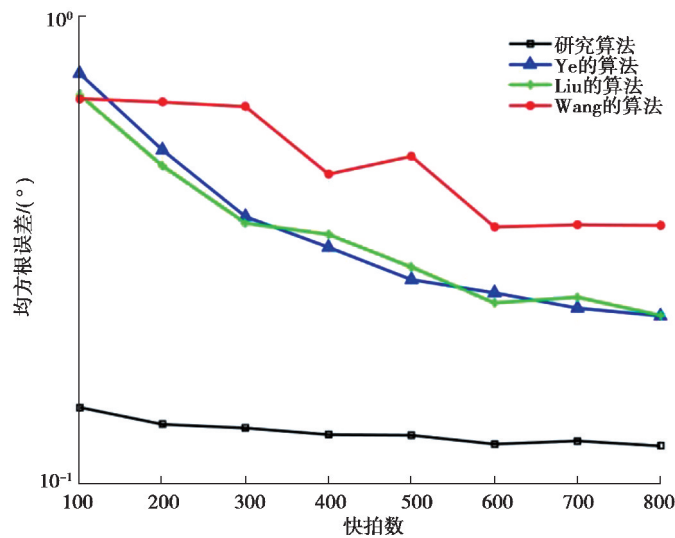


图 6 4 种算法均方根误差随快拍数的变化曲线

Fig. 6 RMSE of four methods versus snapshots

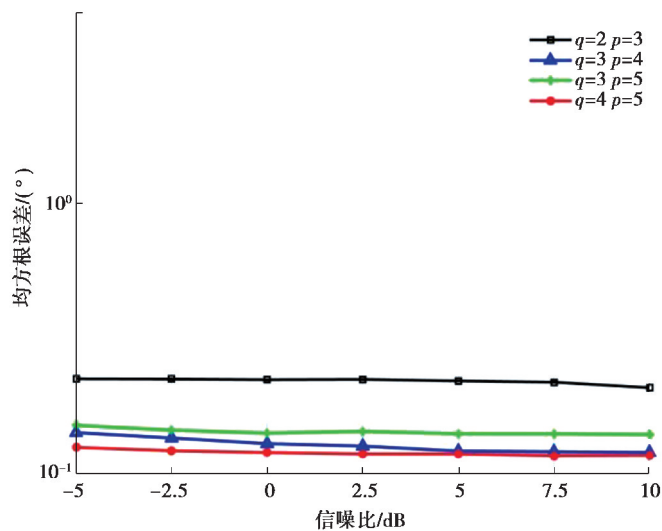


图 7 不同  $q, p$  下均方根误差随信噪比的变化曲线

Fig. 7 RMSE of proposed method versus SNR for different  $q$  and  $p$

## 4 结束语

为了最大限度地消除阵元互耦效应对 DOA 估计带来地影响,提出了一种可以根据互耦效应的强度来调整阵元间距的互素嵌套阵列。此阵列由 2 个大间距的嵌套阵列组成,只要间距足够大就可以消除互耦效应。并且针对这种大间距阵列提出了一种可以避免角度模糊的高分辨率的 DOA 估计算法,在减小互耦作用的同时还能确保 DOA 估计的准确性,不会因为间距的增大而造成估计精确度的降低。仿真结果表明此阵列配合所提 DOA 估计算法比一些已有的自校正算法具有更高的估计精确度和角度分辨力。

### 参考文献:

- [ 1 ] Su J, Sheng Z G, Leung V C M, et al. Energy efficient tag identification algorithms for RFID: survey, motivation and new design[J]. IEEE Wireless Communications, 2019, 26(3): 118-124.
- [ 2 ] Liu S, Yang L S M, Chen Z X, et al. Low-complexity MUSIC-like algorithm with sparse array[J]. Wireless Personal



- Communications, 2016, 86(3): 1265-1279.
- [3] 王旭东, 仲倩, 闫贺, 等. 一种二维信号波达方向估计的改进多重信号分类算法[J]. 电子与信息学报, 2019, 41(9): 2137-2142.  
Wang X D, Zhong Q, Yan H, et al. An improved MUSIC algorithm for two dimensional direction of arrival estimation [J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2019, 41(9): 2137-2142. (in Chinese)
- [4] 王摇波, 刘德亮, 张状和, 等. 短快拍条件下均匀矩形阵中的二维 DOA 估计[J]. 电讯技术, 2019, 59(8): 950-955.  
Wang Y B, Liu D L, Zhang Z H, et al. Two-dimensional DOA estimation in uniform rectangular matrix under short snapshots[J]. Telecommunication Engineering, 2019, 59(8): 950-955. (in Chinese)
- [5] Liu S, Yang L S, Li D, et al. Subspace extension algorithm for 2D DOA estimation with L-shaped sparse array[J]. Multidimensional Systems and Signal Processing, 2017, 28(1): 315-327.
- [6] Luo J, Zhang G P, Yu K G. An automatically paired two-dimensional direction-of-arrival estimation method for two parallel uniform linear arrays[J]. AEU - International Journal of Electronics and Communications, 2017, 72: 46-51.
- [7] 贾晋华, 于洁潇, 刘开华, 等. 导向矢量失配情况下基于稀疏表示的波达方向估计算法[J]. 计算机工程与科学, 2017, 39(11), 2016-2021.  
Jia J H, Yu J X, Liu K H, et al. A novel DOA estimation algorithm based on sparse representation under steering vector mismatch[J]. Computer Engineering and Science, 2017, 39(11), 2016-2021. (in Chinese)
- [8] 王布宏, 王永良, 陈辉, 等. 均匀线阵互耦条件下的鲁棒 DOA 估计及互耦自校正, 中国科学 E 辑, 2004, 34(2): 229-240.  
Wang B H, Wang Y L, Chen H, et al. Robust DOA estimation with uniform linear array under mutual coupling and self-correction of mutual coupling[J]. Science China Ser. E, 2004, 34(2): 229-240. (in Chinese)
- [9] Ye Z F, Liu C. On the resiliency of MUSIC direction finding against antenna sensor coupling[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2008, 56(2): 371-380.
- [10] Liu C, Ye Z F, Zhang Y F. DOA estimation based on fourth-order cumulants with unknown mutual coupling[J]. Signal Processing, 2009, 89(9): 1839-1843.
- [11] Cao S H, Xu D Y, Xu X, et al. DOA estimation for noncircular signals in the presence of mutual coupling[J]. Signal Processing, 2014, 105: 12-16.
- [12] Li J, Li D, Jiang D, et al. Extended-aperture unitary root MUSIC-based DOA estimation for coprime array[J]. IEEE Communications Letters, 2018, 22(4): 752-755.
- [13] Li J, Li Y, Zhang X. Two-dimensional off-grid DOA estimation using unfolded parallel coprime array[J]. IEEE Communications Letters, 2018, 22(12): 2495-2498.
- [14] Yang M, Sun L, Yuan X, et al. Improved nested array with hole-free DCA and more degrees of freedom[J]. Electronics Letters, 2016, 52(25): 2068-2070.
- [15] Iizuka Y, Ichige K. Extension of nested array for large aperture and high degree of freedom[J]. IEICE Communications Express, 2017, 6(6): 381-386.
- [16] Liu S, Liu Q G, Zhao J, et al. Triple two-level nested array with improved degrees of freedom[J]. Progress in Electromagnetics Research B, 2019, 84: 135-151.
- [17] Liu C L, Vaidyanathan P P. Super nested arrays: linear sparse arrays with reduced mutual coupling: part I: fundamentals [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2016, 64(15): 3997-4012.
- [18] Liu C L, Vaidyanathan P P. Super nested arrays: linear sparse arrays with reduced mutual coupling: part II: high-order extensions[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2016, 64(16): 4203-4217.
- [19] Liu J Y, Zhang Y M, Lu Y L, et al. Augmented nested arrays with enhanced DOF and reduced mutual coupling[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2017, 65(21): 5549-5563.
- [20] Shi J P, Hu G P, Zhang X F, et al. Generalized nested array: optimization for degrees of freedom and mutual coupling [J]. IEEE Communications Letters, 2018, 22(6): 1208-1211.