

doi: 10.11835/j.issn.1000-582X.2020.279

# 近场动力学与有限元混合模型研究

钱伟, 范存新, 沈峰, 夏益兵

(苏州科技大学 土木工程学院, 江苏 苏州 215000)

**摘要:** 兼顾近场动力学(peridynamics, PD)模拟不连续问题的优势和有限单元法(finite element method, FEM)较高的计算效率, 采用近场动力学与有限元混合建模方法, 建立了新的混合模型。该模型在裂纹出现区域, 采用近场动力学建模, 其他区域采用八结点等参元建模。通过杆单元连接PD物质点与等参单元结点, 将PD物质点对间相互作用视为杆单元, 最后对单元刚度集成, 实现了在有限元框架体系中两种方法的混合建模。该混合模型无需引入人工阻尼, 提高了计算效率。此外, 相较于四结点混合模型, 采用高阶(八结点)等参元与近场动力学方法建立的混合模型具有更高的计算精度。通过数值算例验证了该方法的有效性, 为断裂破坏问题的解决提供了一种新思路。

**关键词:** 近场动力学; 有限元; 不连续; 混合建模; 裂纹扩展

**中图分类号:** O313

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1000-582X(2021)10-087-08

## Study on hybrid model of peridynamics and finite element method

QIAN Wei, FAN Cunxin, SHEN Feng, XIA Yibing

(School of Civil Engineering, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou, Jiangsu 215000, P. R. China)

**Abstract:** Considering the advantages of peridynamics in simulating discontinuities and low computational cost of finite element method (FEM), a new hybrid model was established by using the hybrid modeling method of peridynamics and finite element method. The region where cracks appear was modelled by peridynamics theory, while the other regions were modelled by eight node isoparametric elements. The truss element was used to connect the material points with the isoparametric nodes, and the interaction between material points could be regarded as the truss element. Finally, the stiffness of the element was integrated to realize the hybrid modeling of the two methods in the finite element frame system. No artificial damping was needed in the model, which improved the calculation efficiency. In addition, compared with the four-node hybrid model, the proposed hybrid model based on high-order (eight-node) isoparametric element and peridynamics had higher accuracy. The validity of the method was verified by the numerical example. The proposed model provides a new idea to solve fracture problems.

**Keywords:** peridynamics; finite element method; discontinuity; hybrid modeling; crack propagation

收稿日期: 2020-01-17 网络出版日期: 2020-04-26

基金项目: 国家自然科学基金项目(51709194, U1934206, 11932006, 11672101); 国家重点研发计划课题资助项目(2018YFC0406703); 江苏高校优势学科建设工程资助项目。

Supported by National Natural Science Foundation of China (51709194, U1934206, 11932006, 11672101), National Key Technologies Research and Development Program (2018YFC0406703) and A Project Funded by the Priority Academic Program Development of Jiangsu Higher Education Institutions.

作者简介: 钱伟(1994—), 男, 硕士研究生, 主要从事结构损伤破坏研究, (E-mail)18915416523@163.com。

通讯作者: 沈峰(1984—), 男, 讲师, 主要从事灾变破坏力学研究, (E-mail)shenfeng1023@163.com。

以有限单元法为代表的基于偏微分方程的相关数值方法已经得到了广泛的运用,但在模拟裂纹扩展等不连续问题时,基于连续性假设的有限单元法无法自发模拟裂纹扩展,国内外学者通过设置界面单元或采用网格重划分技术来处理,但仍存在网格依赖性的问题<sup>[1]</sup>。

2000年,美国 Sandia 国家实验室的 Silling 博士提出了基于非局部作用思想的近场动力学方法<sup>[2-3]</sup>,在国际上引起了广泛关注,从根本上解决了连续介质力学在模拟裂纹路径等不连续问题时偏导数不存在的问题,逐渐成为计算力学与工程仿真及相关领域研究热点<sup>[4]</sup>,在断裂破坏问题中得到了广泛应用<sup>[5-8]</sup>。然而,近场动力学计算效率相较于有限元而言过低。为此,国内外学者尝试将近场动力学与有限元结合起来,充分发挥两者优势。Macek 和 Silling<sup>[9]</sup>将研究对象划分为 PD 子域与 FE 子域以及重叠域,重叠域采用有限元实体模型,将重叠域中的 PD 模型以及 PD 子域视作杆单元,通过镶嵌单元技术,实现了对 PD 与 FEM 的混合建模;Liu 和 Hong<sup>[10]</sup>在近场动力学子域与有限元子域设置界面单元,在界面单元内加入一定的物质点,计算耦合力并将耦合力通过两种方式分配到界面单元的结点上,以此来实现两种方法的混合建模;Seleson 等<sup>[11-12]</sup>通过在 $[0,1]$ 区间内变化的混合函数将局部作用区域的应变能密度与 PD 应变能密度混合实现了两区域的平滑过渡;Ren 等<sup>[13]</sup>利用不连续的 Galerkin 法建立了经典近场动力学控制方程,并给出了相关算例。上述混合模型均在显式体系下求解,处理静力问题时需引入人工阻尼,阻尼的大小影响迭代收敛速度,进而导致计算效率不足。此外,上述文章均局限于通过低阶单元与近场动力学方法实现混合建模,缺乏对高阶单元与近场动力学混合建模研究。

在此基础上,本文所建立的模型将研究对象划分为 PD 子域与 FE 子域,在裂纹出现的区域,采用近场动力学模型,其他区域采用等参元模型。通过杆单元连接 PD 物质点与等参元结点来实现混合建模。该模型无需引入人工阻尼,提高了计算效率。同时,该混合模型在 FE 子域采用八结点等参元,提高了计算精度,最后,通过对悬臂梁弹性变形及含裂纹正方形板破坏过程的模拟,证明了该混合模型的有效性。

## 1 近场动力学简介

### 1.1 近场动力学方法

如图 1 所示,设在任意时刻  $t$ ,任意空间  $R$  内任一物质点  $x$  与其邻域一定范围  $\delta$  内的其他物质点( $x' \in R: \|x' - x\| \leq \delta$ )存在单位相互作用力  $f$ ,根据牛顿第二定律,可得<sup>[14]</sup>:

$$\rho \ddot{u}(x, t) = \int_{H_x} f(u(x', t) - u(x, t), x' - x) dV_{x'} + b(x, t). \quad (1)$$

令式(1)中  $x' - x = \xi, u' - u = \eta, \xi$  为物质点间相对位置,  $\eta$  为物质点间相对位移。

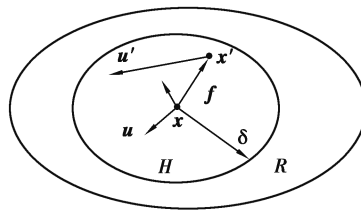


图 1 物质点间的相互作用

Fig. 1 Interaction of material points

式中:  $H_x$  为物质点  $x$  的邻域范围,  $\delta$  为邻域范围尺寸,  $\rho$  为物质点材料密度,  $u$  为物质点的位移,  $b$  为外力密度。

基于保守场的定义和性质,一定存在一个标量函数  $w(\eta, \xi)$  (物质点对势能密度),使得:

$$f(\eta, \xi) = \frac{\partial w(\eta, \xi)}{\partial \eta}. \quad (2)$$

物质点间的作用类似一个中心弹簧,则

$$w(\eta, \xi) = \frac{c(\xi)s^2\xi}{2}, \quad (3)$$

式中: $c(\xi)$ 为微模量函数, $s = \frac{|\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}| - |\boldsymbol{\xi}|}{|\boldsymbol{\xi}|}$ 为物质点对的伸长率。由式(2)可得微观弹脆性(prototype microelastic brittle, PMB)模型的本构力函数<sup>[15]</sup>:

$$f(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}|} s c(\xi) \mu(t, \boldsymbol{\xi}), \quad (4)$$

$\mu$ 为一标量函数,用来表征键的断裂:

$$\mu(t, \boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} 1, & s(t', \boldsymbol{\xi}) < s_0, 0 \leq t' \leq t; \\ 0, & \text{其他。} \end{cases} \quad (5)$$

式中: $s_0$ 为临界伸长率。当伸长率小于临界伸长率 $s_0$ 时, $\mu(t, \boldsymbol{\xi}) = 1$ ,键未发生断裂,否则, $\mu(t, \boldsymbol{\xi}) = 0$ ,键断裂。这里考虑材料的拉压异性,可以通过材料的抗拉强度、抗压强度和弹性模量 $E$ 去表征:

$$s_0 = \begin{cases} f_t/E, & s(\boldsymbol{\xi}) > 0, \\ f_c/E, & s(\boldsymbol{\xi}) < 0. \end{cases} \quad (6)$$

在近场动力学理论中,统一定义局部损伤

$$\varphi(\boldsymbol{x}, t) = 1 - \frac{\int_H \mu(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{\xi}) dV_{\boldsymbol{\xi}}}{\int_H dV_{\boldsymbol{\xi}}}, \quad (7)$$

式中: $0 \leq \varphi \leq 1$ ,  $\varphi = 0$ 表示材料未损伤,  $\varphi = 1$ 表示该点完全损伤。

## 1.2 改进的 PMB 模型

式(3)中的微观模量函数 $c(\xi)$ 可表示为:

$$c(\xi) = c(0, \delta) g(\xi, \delta), \quad (8)$$

式中: $c(0, \delta)$ 为集中函数, $g(\xi, \delta)$ 为核函数,表示远程力大小随物质点间距变化的规律。在改进的 PMB 模型中,考虑远程力对微观模量的影响,取核函数<sup>[16-17]</sup>为:

$$g(\xi, \delta) = \begin{cases} \left[ 1 - \left( \frac{\|\boldsymbol{\xi}\|}{\delta} \right)^2 \right]^2, & \|\boldsymbol{\xi}\| \leq \delta; \\ 0, & \|\boldsymbol{\xi}\| \geq \delta. \end{cases} \quad (9)$$

根据近场动力学应变能密度与连续介质力学应变能密度相等的原则,可以得到平面应力状态下的集中函数为:

$$c(0, \delta) = \frac{315E}{8\pi\delta^3}. \quad (10)$$

## 2 有限元简介

### 2.1 有限元方程

有限单元法静力问题求解方程为

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{R}, \quad (11)$$

式中: $\mathbf{K}$ 为整体刚度矩阵, $\mathbf{U}$ 为整体位移列阵, $\mathbf{R}$ 为整体等效结点荷载列阵。 $\mathbf{K}$ 和 $\mathbf{R}$ 可由式(12)得出

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K} &= \sum \mathbf{C}_e^T \mathbf{k} \mathbf{C}_e \\ \mathbf{R} &= \sum \mathbf{C}_e^T \mathbf{R}^e \\ \mathbf{k} &= \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} t dx dy \end{aligned} \right\}, \quad (12)$$

式中: $\mathbf{C}_e$ 为选择矩阵, $\mathbf{k}$ 为单元刚度矩阵, $\mathbf{R}^e$ 为等效荷载列阵, $\mathbf{B}$ 为应变转换矩阵, $\mathbf{D}$ 为弹性矩阵。

### 2.2 八结点等参元

相较于矩形单元,等参元精度高,且适用于复杂的曲线边界与曲面边界,因此得到了广泛的应用。这里在有限元子域采用八结点等参元。

图 2 为四边形单元在整体坐标系 $xy$ 下的单元结点分布,在每个四边形单元上建立局部坐标系 $\xi\eta$ ,如

图 3 所示,通过坐标变换,将每个四边形单元映射到标准正方形单元,建立了两种单元的对应关系。

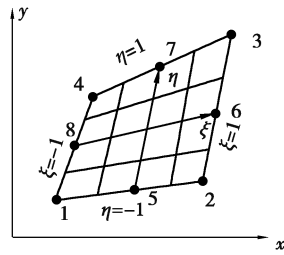


图 2 四边形单元

Fig. 2 Quadrilateral element

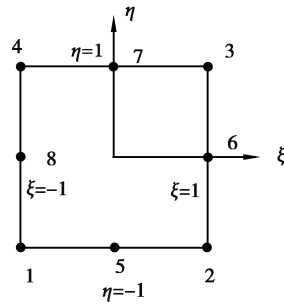


图 3 正方形单元

Fig. 3 Square element

设单元中任意一点的位移是  $u, v$ , 单元结点位移为  $u_i, v_i (i=1, 8)$ , 其位移模式为

$$u = \sum_{i=1}^8 N_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^8 N_i v_i. \quad (13)$$

坐标变换为:

$$x = \sum_{i=1}^8 N_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^8 N_i y_i. \quad (14),$$

式中,  $N_i (i=1, 8)$  为八结点等参元形函数, 其表达式为:

$$\left. \begin{aligned} N_i &= \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) (\xi_i \xi + \eta_i \eta - 1), & (i=1, 2, 3, 4), \\ N_5 &= \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 - \eta) \\ N_6 &= \frac{1}{2} (1 - \eta^2) (1 + \xi) \\ N_7 &= \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 + \eta) \\ N_8 &= \frac{1}{2} (1 - \eta^2) (1 - \xi) \end{aligned} \right\}, \quad (15)$$

式中,  $\xi, \eta$  是定义在标准单元上的局部坐标,  $\xi_i, \eta_i (i=1, 2, 3, 4)$  分别代表标准单元 4 个结点的局部坐标值。

### 3 近场动力学与有限元耦合方案

如图 4 所示, 将几何模型划分为 PD 子域与 FE 子域, 在 PD 子域采用近场动力学建模, 在 FE 子域采用八结点等参元建模。在两类子域的交界面上, 如图 5 所示, 交界面上的每个有限元结点通过杆单元与其近场范围内的物质点相连接<sup>[18-19]</sup>, 其中, PD 子域物质点对间相互作用可视为杆单元。为求解近场动力学方程, 将研究对象离散为一系列带有物性信息的物质点, 近场动力学积分方程转化为对有限个物质点的求和, 即:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \sum_j \mathbf{f}(\mathbf{u}_j^n - \mathbf{u}_i^n, \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) V_j + \mathbf{b}_i^n. \quad (16)$$

对于静力问题, 令加速度为 0, 可得近场动力学的平衡方程:

$$\sum_j \mathbf{f}(\mathbf{u}_j^n - \mathbf{u}_i^n, \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) V_j + \mathbf{b}_i^n = 0. \quad (17)$$

根据公式(1), 可将 PD 方程改写成矩阵形式

$$\mathbf{K}_{ij}^{\text{PD}} \mathbf{u}_j = \mathbf{f}, \quad (18)$$

式中  $\mathbf{K}_{ij}^{\text{PD}}$  为任意物质点  $i, j$  的刚度贡献矩阵

$$\mathbf{K}_{ij}^{PD} = \frac{c(\xi)}{|\xi|^3} \begin{bmatrix} \xi_x^2 & & & \\ \xi_x \xi_y & \xi_y^2 & \text{sym} & \\ -\xi_x^2 & -\xi_x \xi_y & \xi_x^2 & \\ -\xi_x \xi_y & -\xi_y^2 & \xi_x \xi_y & \xi_y^2 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

式中: $c(\xi)$ 为微模量函数, $|\xi| = |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$ , $\xi_x = x_i^x - x_j^x$ , $\xi_y = x_i^y - x_j^y$ ,上标  $x, y$  分别为坐标在  $x, y$  轴的坐标分量。

杆单元的刚度贡献矩阵为:

$$\mathbf{K}^t = \frac{k(\xi', \delta)}{|\xi'|^3} \begin{bmatrix} \xi_x'^2 & & & \\ \xi_x' \xi_y' & \xi_y'^2 & \text{sym} & \\ -\xi_x'^2 & -\xi_x' \xi_y' & \xi_x'^2 & \\ -\xi_x' \xi_y' & -\xi_y'^2 & \xi_x' \xi_y' & \xi_y'^2 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

式中: $k(\xi', \delta) = \frac{315E}{8\pi\delta^3} \left[ 1 - \left( \frac{\xi'}{\delta} \right)^2 \right]^2$ ,为平面应力问题下杆单元的刚度, $\xi'$ 为有限元结点与物质点的相对距离。

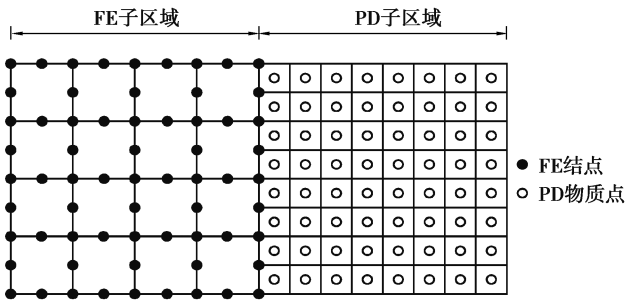


图 4 有限元(FE)与近场动力学(PD)子域  
Fig. 4 FE and PD region

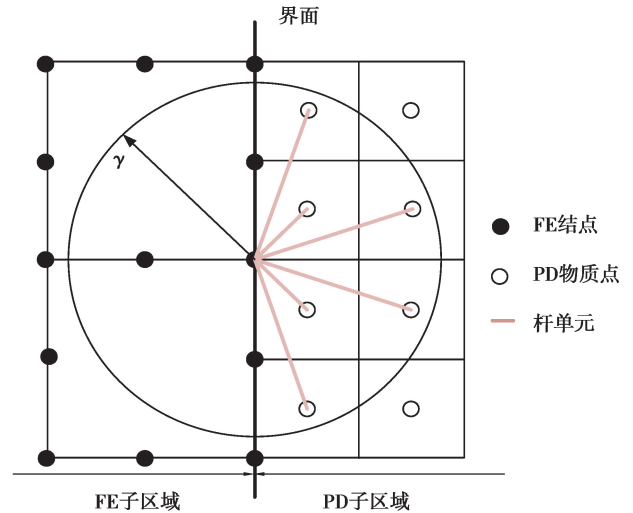


图 5 FE 结点与 PD 物质点连接示意图  
Fig. 5 Interactions between FE nodes and PD nodes through trusses

通过求解式(12)、式(19)、式(20),分别得到了等参元、物质点对间、杆单元的刚度贡献矩阵,其中,物质点对间相互作用视为杆单元,通过对刚度贡献矩阵的集成,形成整体刚度矩阵。最后根据有限元静力方程求解位移,实现了近场动力学与有限元的混合建模。

## 4 数值算例

### 4.1 悬臂梁的弹性变形

悬臂梁几何尺寸及子域划分如图 6 所示<sup>[19]</sup>,跨长 1 000 mm,截面高为 200 mm,弹性模量  $E$  为 100 GPa,泊松比  $\nu = 1/3$ ,物质点间距取为 2.5 mm,近场范围尺寸取  $\delta = 4\Delta x$ ,有限元网格为 10 mm×10 mm 的八结点等参单元,右端受大小为 1 050 kN/m 的均布荷载,探讨不同数值方法对精度的影响。

表 1 给出了采用不同数值方法得到的最大水平位移计算结果。由表 1 可得,采用近场动力学方法计算的最大水平位移与解

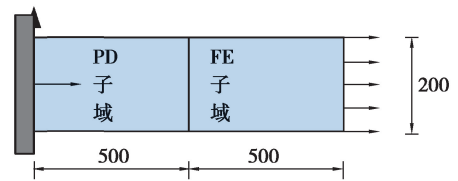


图 6 悬臂梁几何模型  
Fig. 6 Geometric model of cantilever beam

析解的相对误差为 2.19%，采用四结点混合模型时相对误差为 0.67%，采用八结点混合模型的误差为 0.28%，混合模型的精度比近场动力学的计算精度高，且本文中建立的八结点混合模型高于四结点混合模型的计算精度。证明了本文中提出的混合模型的精确性。其中，当不设置 FE 子域时，可根据有限元静力求解方程，得到近场动力学计算结果。

表 1 最大水平位移计算结果

Table 1 Calculation results of maximum horizontal displacement

计算方法	观测点水平位移/m	相对误差/%
解析解	$1.050 \times 10^{-5}$	—
近场动力学	$1.027 \times 10^{-5}$	2.19
四结点混合模型	$1.043 \times 10^{-5}$	0.67
八结点混合模型	$1.047 \times 10^{-5}$	0.28

#### 4.2 含 I 型裂纹板受拉破坏分析

考虑如图 7 所示含 I 型裂纹正方形板，模型尺寸及材料参数如下，边长为 50 mm，在板中间预制一条长为 10 mm 的裂纹，弹性模量为 30 GPa， $f_t$  为 2.01 MPa， $f_c$  为 20.1 MPa，泊松比为 1/3。将正方形板划分为两个有限元子域与一个近场动力学子域，物质点间距取为 0.5 mm，近场范围尺寸取  $\delta = 4\Delta x$ ，有限元网格为  $2 \text{ mm} \times 2 \text{ mm}$  八结点等参元，采用位移加载，每一步位移增量为  $1.0 \times 10^{-8} \text{ m}$ 。

混合模型计算得到的正方形板裂纹扩展过程如图 8 所示，当加载到 57 步时（此时位移荷载为  $5.7 \times 10^{-7} \text{ m}$ ），预制裂纹的裂尖出现损伤；随着荷载的进一步增大，裂纹发生扩展，如图 8(b)(c) 所示；当加载至 92 步时，（此时位移荷载为  $9.2 \times 10^{-7} \text{ m}$ ），裂纹贯穿整个正方形板，构件发生破坏。

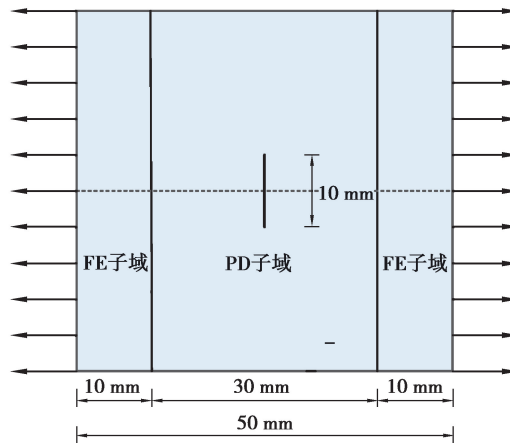


图 7 正方形板几何模型

Fig. 7 Geometric model of square plate

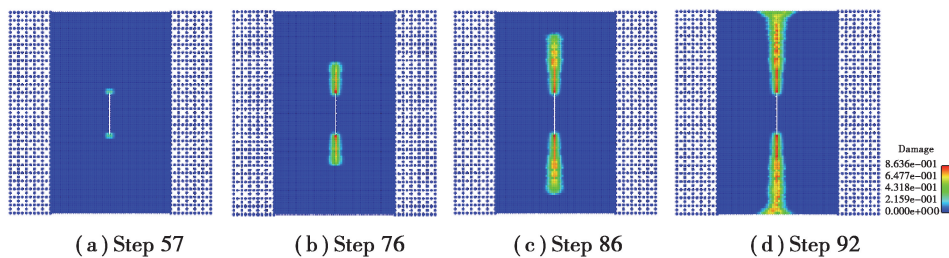


图 8 裂纹扩展示意图

Fig. 8 Crack propagation process

### 4.3 多裂纹板受拉破坏分析

考虑如图 9 所示的含两条斜裂纹的正方形板,模型尺寸及材料参数如下,板的边长为 50 mm,初始裂纹长度为 10 mm, $b$  为 10 mm,弹性模量为 30 GPa, $f_t$  为 2.01 MPa, $f_c$  为 20.1 MPa,泊松比为 1/3。将正方形板划分为两个有限元子域与一个近场动力学子域,物质点间距取为 0.5 mm,近场范围尺寸取  $\delta=4\Delta x$ ,有限元网格为 2 mm×2 mm 的八结点等参单元,采用位移加载,每一步位移增量为  $1.5\times 10^{-8}$  m。

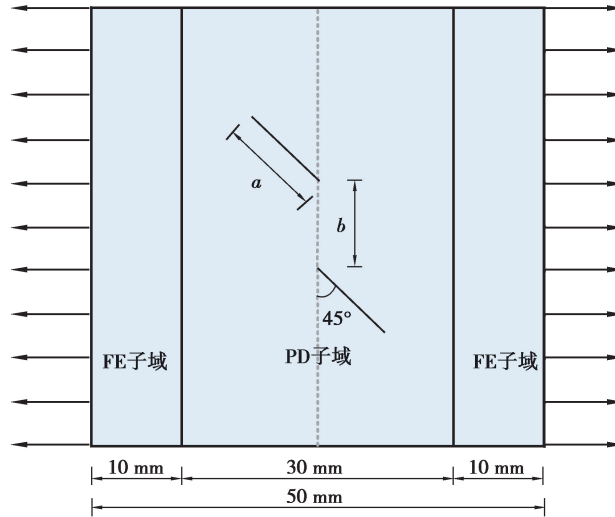


图 9 正方形板几何模型

Fig. 9 Geometric model of square plate

混合模型计算得到的正方形板裂纹扩展过程如图 10 所示,加载到 39 步时(此时位移荷载为  $5.85\times 10^{-7}$  m),裂纹裂尖出现损伤;随着荷载的进一步增大,裂纹发生扩展并交汇,如图 10(b)(c)所示;当加载至 63 步时,(此时位移荷载为  $9.45\times 10^{-7}$  m),裂纹贯穿整个正方形板,构件发生破坏。图 10(e)为多维虚内键计算结果<sup>[20]</sup>。对比可得,混合模型与虚内键计算结果基本吻合。

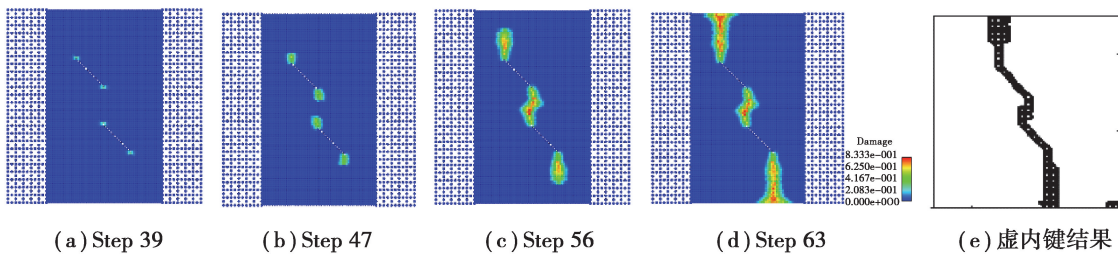


图 10 裂纹扩展示意图

Fig. 10 Crack propagation process

## 5 结 论

PD 理论通过求解积分方程模拟材料断裂破坏行为,在分析裂纹扩展等不连续问题时具有显著优势,然而,PD 理论计算效率相较 FEM 而言过低。为兼顾两者优势,采用近场动力学与有限元混合建模的方法,建立了新的混合模型,该模型将研究对象划分为 PD 子域与 FE 子域,在 PD 子域采用近场动力学建模型,FE 子域采用等参元模型,通过杆单元连接 PD 物质点与等参单元结点来实现混合建模。此混合模型在求解处理静力问题时无需引入人工阻尼,采取类似有限元的方法,对刚度集成,形成整体刚度矩阵,然后根据有限元支配方程求解静力问题,提高了计算效率。同时在 FE 子域采用八结点等参元建模,提高了混合模型的计算精度。最后,采用所建立的混合模型计算分析了悬臂梁的弹性变形和含裂纹正方形板的破坏过程,取得了较好的结果,为断裂破坏问题的解决提供了一种新思路。

## 参考文献:

- [1] Murotani K, Yagawa G, Choi J B. Adaptive finite elements using hierarchical mesh and its application to crack propagation analysis[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2013, 253: 1-14.
- [2] Silling S A, Epton M, Weckner O, et al. Peridynamic states and constitutive modeling[J]. *Journal of Elasticity*, 2007, 88(2): 151-184.
- [3] Silling S A. Linearized theory of peridynamic states[J]. *Journal of Elasticity*, 2010, 99(1): 85-111.
- [4] 黄丹, 章青, 乔丕忠, 等. 近场动力学方法及其应用[J]. *力学进展*, 2010, 40(4): 448-459.  
Huang D, Zhang Q, Qiao P Z, et al. A review on peridynamics (PD) method and its applications[J]. *Advances in Mechanics*, 2010, 40(4): 448-459. (in Chinese)
- [5] 顾鑫, 章青, 黄丹. 基于近场动力学方法的混凝土板侵彻问题研究[J]. *振动与冲击*, 2016, 35(6): 52-58.  
Gu X, Zhang Q, Huang D. Peridynamics used in solving penetration problem of concrete slabs[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2016, 35(6): 52-58. (in Chinese)
- [6] 郁杨天, 章青, 顾鑫. 含单边缺口混凝土梁冲击破坏的近场动力学模拟[J]. *工程力学*, 2016, 33(12): 80-85.  
Yu Y T, Zhang Q, Gu X. Impact failure simulation of a single-edged notched concrete beam based on peridynamics[J]. *Engineering Mechanics*, 2016, 33(12): 80-85. (in Chinese)
- [7] 沈峰, 章青, 顾鑫. 弹丸侵彻混凝土靶板破坏过程的近场动力学模拟[J]. *重庆大学学报*, 2019, 42(1): 64-69.  
Shen F, Zhang Q, Gu X. Peridynamics modeling for projectile penetrating into concrete[J]. *Journal of Chongqing University*, 2019, 42(1): 64-69. (in Chinese)
- [8] 沈峰, 章青, 黄丹, 等. 基于近场动力学方法的结构准静态变形的定量计算[J]. *重庆大学学报*, 2016, 39(5): 49-55.  
Shen F, Zhang Q, Huang D, et al. Quantitative calculation of quasi-static deformation of structure based on peridynamics theory[J]. *Journal of Chongqing University*, 2016, 39(5): 49-55. (in Chinese)
- [9] Macek R W, Silling S A. Peridynamics via finite element analysis[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2007, 43(15): 1169-1178.
- [10] Liu W Y, Hong J W. A coupling approach of discretized peridynamics with finite element method[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2012, 245/246: 163-175.
- [11] Seleson P, Beneddine S, Prudhomme S. A force-based coupling scheme for peridynamics and classical elasticity[J]. *Computational Materials Science*, 2013, 66: 34-49.
- [12] Seleson P, Ha Y D, Beneddine S. Concurrent coupling of bond-based peridynamics and the navier equation of classical elasticity by blending[J]. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 2015, 13(2): 91-113.
- [13] Ren B, Wu C T, Askari E. A 3D discontinuous Galerkin finite element method with the bond-based peridynamics model for dynamic brittle failure analysis[J]. *International Journal of Impact Engineering*, 2017, 99: 14-25.
- [14] Silling S A. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2000, 48(1): 175-209.
- [15] Silling S A, Askari E. A meshfree method based on the peridynamic model of solid mechanics[J]. *Computers & Structures*, 2005, 83(17/18): 1526-1535.
- [16] Huang D, Lu G D, Wang C W, et al. An extended peridynamic approach for deformation and fracture analysis[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2015, 141: 196-211.
- [17] Huang D, Lu G D, Qiao P Z. An improved peridynamic approach for quasi-static elastic deformation and brittle fracture analysis[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2015, 94/95: 111-122.
- [18] 郁杨天, 章青, 顾鑫. 近场动力学与有限单元法的混合模型与隐式求解格式[J]. *浙江大学学报(工学版)*, 2017, 51(7): 1324-1330.  
Yu Y T, Zhang Q, Gu X. Hybrid model of peridynamics and finite element method under implicit schemes[J]. *Journal of Zhejiang University(Engineering Science)*, 2017, 51(7): 1324-1330. (in Chinese)
- [19] 章青, 郁杨天, 顾鑫. 近场动力学与有限元的混合建模方法[J]. *计算力学学报*, 2016, 33(4): 441-448, 450.  
Zhang Q, Yu Y T, Gu X. Hybrid modeling methods of peridynamics and finite element method[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2016, 33(4): 441-448, 450. (in Chinese)
- [20] 张振南, 陈永泉. 基于 VMIB 多裂纹岩石材料拉伸破坏数值模拟[J]. *岩土工程学报*, 2008, 30(10): 1490-1495.  
Zhang Z N, Chen Y Q. Numerical simulation for fracture propagation of multi-cracked rock materials using virtual multidimensional internal bonds[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2008, 30(10): 1490-1495. (in Chinese)